教育科学“十五”国家规划课题研究成果

离 散 数 学

杜忠复　陈兆均　主　编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一。

全书内容包括：集合论、关系、代数系统、图论和数理逻辑。本书避免先从数理逻辑开始，用逻辑联结词来处理各段内容，并简介了图论的实际应用问题，使学生易于接受。叙述上力求简单、直观易懂，选择大量且较为典型的例题、习题，以便于学生理解、消化。

本书可作为应用型院校计算机专业及相关专业的学生使用，也可供科技人员参考。

图书在版编目(CIP)

离散数学/杜忠复，陈兆均主编．—北京：高等教育出版社，2004.4

ISBN 7-04-014000-4

Ⅰ．离…　Ⅱ．①杜…②陈…　Ⅲ．离散数学-高等学校-教材　Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字

策划编辑　马　丽　　责任编辑　丁鹤龄　　封面设计　王凌波　　责任绘图　朱　静
版式设计　王艳红　　责任校对　俞声佳　　责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第1版
印　　张	13.25	印　　次	年　月　第　次印刷
字　　数	240 000	定　　价	15.70元

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心

世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组

课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　　言

离散数学是描绘一些离散量与量之间的相互逻辑结构及关系的学科。它的思想方法及内容已渗透到计算机科学的各个领域中。因此它成为计算机及相关专业的一门重要专业基础课。

本书是针对大学本科应用型人才培养目标及要求，适用于应用型本科计算机及相关专业的教材。在编写过程中，考虑到这一层次学生的特点及其培养要求，我们在内容上本着必需够用、突出思想方法的原则，选取了离散数学的主要内容：集合论、关系、代数系统、图论和数理逻辑五个部分。在教学实践中我们体会到：结构上，先从集合论入手，后介绍数理逻辑。这样做比先介绍数理逻辑，而只通过逻辑联结词，贯穿全书这种体系更便于学生学习。文字处理上力求简洁、通俗、直观易懂。为使学生能很好的消化理解书中内容，书中列举了大量的较为典型、易于接受、说明问题的例题，配备了相当数量的习题，也列举了部分实际应用问题。

本书由杜忠复、陈兆均主编，其中杜忠复编写第一～第四章，陈兆均编写第五章。全书最后由杜忠复统一定稿。全国高等教育研究会数学学科专业委员会副主任委员、吉林大学数学科学院博士生导师李辉来教授，详细的审阅了本书，提出了一些中肯的意见，作者向他表示衷心的感谢。

高等教育出版社数学策划编辑李艳馥同志，多年来在工作中从各方面给予作者大力的支持和帮助；我校的冯莹女士、赵宏伟老师在本书的编排工作中，也做了许多的工作。作者在这里也一并向她们表示真诚的谢意。

本书是作者在多年从事离散数学教学、总结教学经验的基础上编写而成，由于学识有限，不妥之处必定难免，敬请同行指正。

作者

2003 年 10 月于北华大学

目　　录

第一章　集　合　论

集合论简称集论．这一数学分支是在 19 世纪初开始发展起来的．德国数学家康托尔

透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌，因而各数学分支的完整体系，都是在所取集合上，设定其元素及子集的性质和运算的公理而构成．所以，不熟悉集合论的原理就不可能对近代数学获得正确的理解．本章就是先对集合论做一下简单介绍．

第一节　集合的概念

一、集合的概念

数学中的概念有两种定义形式．其中，一种概念可以用严格的数学逻辑形式来定义，叫做可定义概念．另一种则不能用严格形式来定义，而只能用语言对它进行大致的描述，叫做不可定义概念．集合便属于后一种概念．虽然我们不能给集合以确切的定义，但是一提到一个集合，我们便都清楚所指的是什么；这是因为所提集合中的事物都具有某种共同的性质．为此我们有:

定义 1　把具有某种共同属性的事物的全体称为一个集合．

通常用大写字母 A、B、C、…、M 等表示集合．集合中的每一事物叫做集合的元素．常用小写字母 a、b、c 等表示集合中的元素．

以上只是对集合进行了一些描述，在研究具体问题时，还需把它具体表示出来．集合的常用表示法有三种:

i)

例 1　小于 5 的所有自然数集合．

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

全体正奇数集合．

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$$

ii) x 具有某种性质 P $x)$
叙述之，或可表成 $x|\ x$ 具有性质 $P(x)\}$ $x\,|\,P(x)\}$

例 2 ①全体有理数的集合．

$$A=\{x\,|\,x \text{ 是有理数}\}$$

② 方程 $x^2-1=0$ 的解的集合．

$$B=\{x\,|\,x \text{ 是 } x^2-1=0 \text{ 的解}\}$$

iii)

注意

1．所谓给出一个集合，就是规定了这个集合是由哪些元素组成的．并且，对于任意一个元素都能判定它是否是这个集合的元素，是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，二者必居其一．

2．集合里若干个相同的元素，只能算作一个，也只用一个符号表示出来．比如，$M=\{1,1,1,2\}$ 1 在集合 M 中虽出现三次，但元素 1 只能算作集合 M 的一个元素，通常写成 $M=\{1,2\}$

3．集合里不考虑元素的顺序．如 $a, b, c\}$ $b, c, a\}$ $a, c, b\}$
同，但从元素看来都认为是同一个集合．

一个元素 a，或者是集合 A 的元素，或者不是集合 A 的元素，二者必居其一．元素与集合的这种关系叫做从属关系．

若 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$．“$\in$”读作“属于”．若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$ 或 aú A．“$\notin$”或“ú ”读作“不属于”．

例 3 $A=\{x\,|\,x \text{ 是自然数}\}$

$$3\in A,\ 10\in A,\ 0\in A,\ \text{而}\ -5\notin A．$$

二、集合间的关系

一个集合，如果它能包括我们所考虑的对象之内的全体元素．则称此集合为全集合，简称全集，记为 E $X)$

例 4 在有理数集合内，讨论它的一些元素所成的集合．像自然数集合，整数集合，奇数集合，方程 $x^2-1=0$ 的解集等等，都是一些有理数组成的集合．而全体有理数构成的集合，包含了我们所考虑对象的全体元素，故在这里全体有理数集合便是一个全集合．

与全集相对应的，不包含任何元素的集合，则称为空集，记作 或$\{\ \}$

例 5 方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合便是空集．

定义 2 如果集合 A 与 B 之元素相同，则称这两个集合是相等的．记为 $A=B$，否则称这两个集合为不相等，记为 $A\neq B$．

定义 3 设有集合 A、B，如果对于任一 $a\in A$，都有 $a\in B$，则称集合 A 是集合 B 的子集合，或者说 B 包含 A．记为 B A 或 A B，“ ”读作“包含”，“ ”读作“包含于”．若 B A 且有 $b\in B$ 但 $b\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，或者说 B 真包含 A，记为 B A 或 A B，“ ”读作“真包含”，“ ”读作“真包含于”.

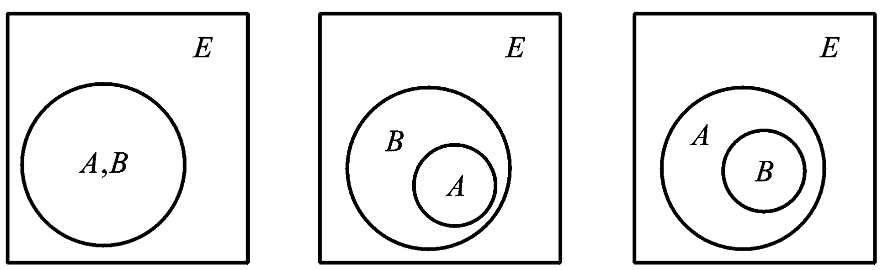
A 不被 B 包含或 B 不包含 A，记作 Aň B 或 Bǹ A．

例 6 ① 设 $A=\{a,b,b,c\}$ $B=\{a,b,c\}$ $A=B$．

② 设 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$ $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ A $\mathbf{N}$ 且有 A $\mathbf{N}$．

③ 设 $A=\{x\mid x\geq 5\}$ $B=\{x\mid x\geq 0\}$ A B 且有 A B．

关于集合的一些属性，直观上可用图示法，即所谓的文氏 Venn）述．用矩形表示全集合，用圆表示集合．子集合的概念，可用图 1 - 1 直观表示出来．



$A=B$ $B\supseteq A$ 或 $B\supsetneqq A$ $A\supseteq B$ 或 $A\supsetneqq B$

图 1 - 1

关于集合还有：

定理 1 任意集合 A，必有 A．

证 假设 A 不包含 ，则至少存在一个元素 x，$x\in$ ；但 中无有元素，故 $x\notin$ ，与假设矛盾．这个矛盾说明必有 A．证毕．

定理 2 对任意集合 A，都有 E A．

定理 3 对任意集合 A，必有 A E．

定理 4 设有集合 A、B，则 $A=B$ 充要条件是 A B 且 B A．

证 充分性 设 A B 且 B A．假设 $A\neq B$，由定义 2 至少有一元素属于其中之一，而不属于另一集合．令其为 x，且令 $x\in A$，而 $x\notin B$；但由于 A B，故当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，与 $x\notin B$ 矛盾；同理对于 $x\in B$ 且 $x\notin A$ 亦可产生矛盾．这表明必有 $A=B$．

必要性 设 $A=B$ 且假设 A B，B A 至少有一个不成立；不妨设 B A 不成立，则必至少存在一个 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 这与 $A=B$ 是矛盾的．故 A B 且 B A 成立．证毕．

练习题 1 - 1

1. 下列所述是否能组成集合？为什么？

2. 令 $S = \{2, a, \{3\}, b\}$ $M = \{\{a\}, 3, \{b\}, 1\}$

(1) $a\} \in S$, 2) $3 \notin S$, 3) $a\} \in M$, 4) $3 \in M$, 5) $b \in M$.

3. 举出两个集合:

(1) 一个集合是另一个集合的子集合;

(2) 一个集合是另一个集合的真子集合;

(3) 两个集合相等.

4. 集合 A、B、C 有 A B 且 B C, 证明:

$$A \quad C,$$

并举例说明.

5. 试问: 集合 A 与集合 B 在什么条件下有 B A 和 B A, 同时成立？

6. [*] 证明: 空集是惟一的.

第二节 集合的运算

一、集合的基本运算

定义 1 由集合 A、B 之所有元素合并组成之集合, 叫做集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例 1 若 $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{c, d, e, f\}$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

例 2 $A = \{x \mid x \text{ 是有理数}\}$ $B = \{x \mid x \text{ 是无理数}\}$ $A \cup B = \{x \mid x \text{ 是实数}\}$

注意 两个集合的公共元素在并集中只能出现一次.

定义 2 由集合 A、B 所有的公共元素所组成的集合, 叫做集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}$$

例 3　若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$　$B = \{2, 4, 6, 8\}$　　$A \cap B = \{2, 4\}$

例 4　若 $A = \{ x \mid x \geq 3\}$　$B = \{ x \mid x \leq 7\}$　　$A \cap B = \{ x \mid 3 \leq x \leq 7\}$

定义 3　集合 A、B 若满足 $A \cap B =$　，则称 A，B 是分离的 .

例 5　$A = \{1, 2, 3\}$　$B = \{ a, b, c\}$　　$A \cap B =$　，即 A 与 B 是分离的 .

定义 4　由集合 A、B 中所有属于 A，而不属于 B 的元素所组成之集合，叫做 A 与 B 的差集合，记作 $A - B$. 即

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B \}$$

例 6　$A = \{ a, b, c, d\}$　$B = \{ b, c, e\}$　　$A - B = \{ a, b\}$　$B - A = \{ e\}$

定义 5　集合 A 之补集，记作 $\complement A$. 定义为 $\complement A = E - A$.

例 7　设 $E = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$　$A = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$

$$\complement A = E - A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$$

定义 6　集合 A、B 之对称差，记作 $A \quad B$. 定义为

$$\begin{aligned} A \quad B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{ x \mid (x \in A \text{ 且 } x \notin B) \text{ 或 } (x \in B \text{ 且 } x \notin A) \} \end{aligned}$$

例 8　$A = \{1, 2, 3, 4\}$　$B = \{3, 4, 5, 6\}$　　$A \quad B = \{1, 2, 5, 6\}$

前面，我们定义了交集合，那里集合中的元素是定义中两个集合中公共元素，交集合是由这些公共元素作成的集合，而对称差与之正好相反，它恰是去掉二集合的所有公共元素，由剩下的所有元素组成的集合 . 以上我们定义了集合中的六种基本运算均可通过文氏图，清楚地表示出来 . 如图 1 - 2 .

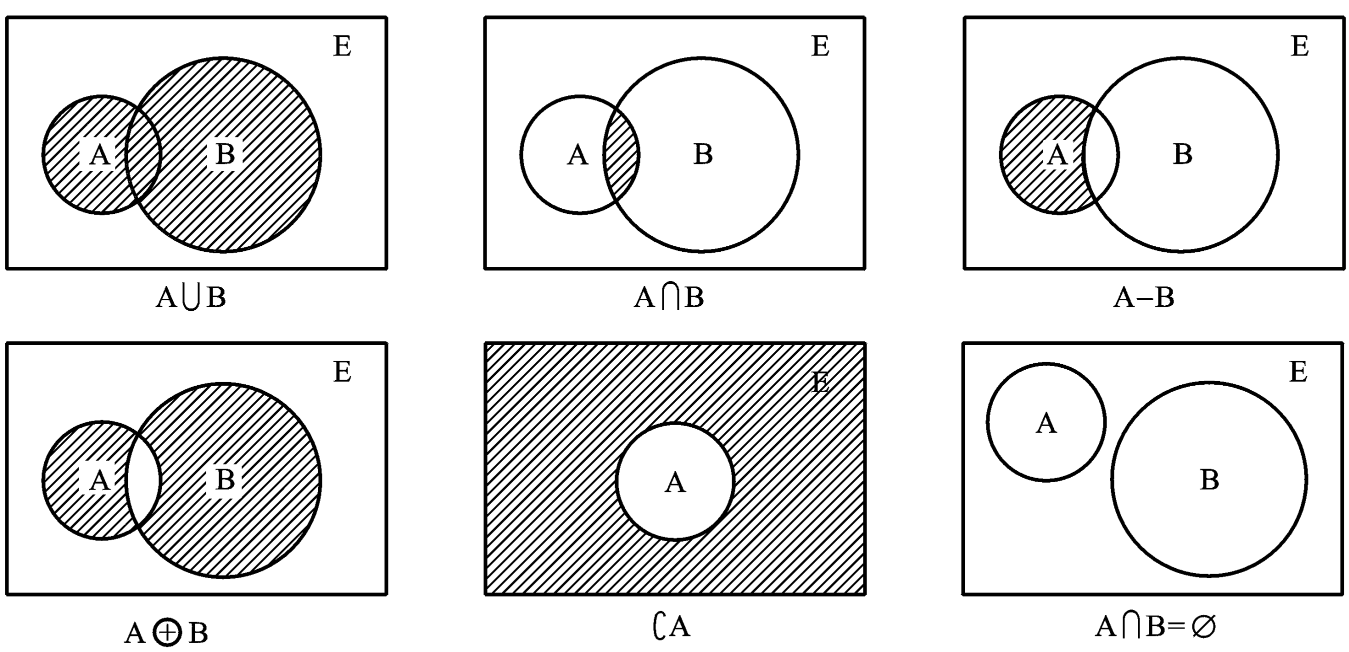


图 1 - 2

下面介绍几个集合运算的重要公式 .

定理 1 对于任意的集合 A、B，有

$$A\cap B \quad A,\quad A\cap B \quad B,$$
$$A \quad A\cup B,\quad B \quad A\cup B .$$

证 $A \quad A\cup B$，$B \quad A\cup B$ 显然成立．其次，如果 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，故 $A\cap B \quad A$ 且 $A\cap B \quad B$．证毕．

定理 2 若 $A \quad B$，则 $A\cup B = B$，$A\cap B = A$．

证 设 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$．若 $x\in A$，则由 $A \quad B$，可知 $x\in B$，总之有 $A\cup B \quad B$．由定理 1，有 $B \quad A\cup B$，故 $A\cup B = B$．同理 $A\cap B = A$．证毕．

定理 3 设 A、B 为任意集合，则有

a) $A - B = A\cap ∁ B$．

b) $A - B = A - A\cap B$．

证 a)

b) $x\in A - B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$．故必有 $x\notin A\cap B$，因此 $x\in [A - (A\cap B)]$

$$A - B \quad [A - (A\cap B)]$$

又设 $x\in [A - (A\cap B)]$ $x\in A$ 且 $x\notin (A\cap B)$ $x\in A$ 且 $x\in ∁(A\cap B)$ $x\in A$ 且 $[x\in ∁ A$ 或 $x\in ∁ B]$． $∁ A\cap B) = ∁ A\cup ∁ B$ 后面将介绍.) $x\in A$ 且 $x\in ∁ A$ 是不可能的，故只能有 $x\in A$ 且 $x\in ∁ B$．由 a) $x\in A - B$，从而得到 $A - (A\cap B) \quad A - B$．因此

$$A - B = A - (A\cap B)$$

定理 4 设 A、B 为两个集合，若 $A \quad B$，则

a) $∁ B \quad ∁ A$;

b) $B - A)\cup A = B$．

证 a) $x\in A$，则 $x\in B$，因此 $x\notin B$ 必有 $x\notin A$，故 $x\in ∁ B$，必有 $x\in ∁ A$，即 $∁ B \quad ∁ A$．

b) 设 $x\in (B - A)\cup A$，则 $x\in B - A$ 或 $x\in A$．若 $x\in B - A$，则 $x\in B$; 若 $x\in A$，由已知 $A \quad B$，应有 $x\in B$．因此，$B - A)\cup A \quad B$．

反之，设 $x\in B$，由 $A \quad B$ 有，或者是 $x\in A$，或者是 $x\in B - A$，总之有 $x\in (B - A)\cup A$，即 $B \quad (B - A)\cup A$．因此

$$(B - A)\cup A = B．证毕．$$

二、集合的运算律

集合上的运算是用给定去指定一新的集合．如上我们所定义的六种运算便是如此．它们之间各种运算还可以混合进行，且运算遵循一定的规律，其一些

运算律如下:

(1) **幂等律**　$A \cup A = A$.

$A \cap A = A$.

(2) **结合律**　$A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) **交换律**　$A \cup B = B \cup A$.

$A \cap B = B \cap A$.

(4) **分配律**　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5)　$A \cup \quad = A$.

$A \cap \quad = \quad$.

(6)　$A \cup E = E$.

$A \cap E = A$.

(7)　$A \cup \complement A = E$.

$A \cap \complement A = \quad$.

(8) **吸收律**　$A \cup (A \cap B) = A$.

$A \cap (A \cup B) = A$.

(9) **德·摩根律**　$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

(10)　$\complement \quad = E$.

$\complement E = \quad$.

(11)　$\complement\complement A = A$.

以上共介绍了二十一个恒等式，除最后一个外，其他的都是成对出现的．我们现在来证其中的公式 9)　**·摩根律，其他从略．**

往证$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$　$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ **同理**)　　$x \in \complement(A \cup B)$ **则** $x \notin A \cup B$，**因此** $x \notin A$ **且** $x \notin B$，**从而** $x \in \complement A$ **且** $x \in \complement B$，**即** $x \in \complement A \cap \complement B$，**从而**$\complement$　$A \cup B)$　$\complement A \cap \complement B$．

反之，设 $x \in \complement A \cap \complement B$，**则** $x \in \complement A$ **且** $x \in \complement B$，**从而** $x \notin A$ **且** $x \notin B$，**还有** $x \notin A \cup B$，**于是必有** $x \in \complement(A \cup B)$　　$\complement A \cap \complement B$　$\complement(A \cup B)$　　$\complement$　$A \cup B) = \complement A \cap \complement B$．**证毕．**

三、例题

上面两段，我们介绍了集合的运算及运算律，现在通过几个例子，我们来观察一下，集合的运算律在运算过程及实际中的应用．

例 1 化简$(A\cup B)\cap(A\cup\complement B)$

解 $(A\cup B)\cap(A\cup\complement B)\xlongequal{\text{分配律}}A\cup(B\cap\complement B)$

$$\xlongequal{\text{公式 7)}}A\cup$$

$$\xlongequal{\text{公式 5)}}A.$$

例 2 化简$(A\cup B)\cup(\complement A\cap B)$

解 $(A\cup B)\cup(\complement A\cap B)$

$$\xlongequal{\text{分配律}}[(A\cup B)\cup\complement A]\cap[(A\cup B)\cup B]$$

$$\xlongequal{\text{结合律}}[A\cup B\cup\complement A]\cap[A\cup B\cup B]$$

$$\xlongequal{\text{交换律、 7)}}(E\cup B)\cap(A\cup B)$$

$$\xlongequal{(6)}E\cap(A\cup B)$$

$$\xlongequal{(6)}A\cup B.$$

例 3 证明若 $A\cup B=A\cap B$，则 $A=B$.

证 $A\xlongequal{\text{吸收律}}A\cup(A\cap B)\xlongequal{\text{已知条件}}A\cup(A\cup B)\xlongequal{(2)}(A\cup A)\cup B\xlongequal{(1)}A\cup B.$

而 $B\xlongequal{\text{吸收律}}B\cup(B\cap A)\xlongequal{\text{已知条件}}B\cup(B\cup A)\xlongequal{(2)}(B\cup B)\cup A\xlongequal{(1)}A\cup B.$

故得 $A=B$. 证毕.

例 4 某图书馆有藏书 100 万册，有一读者前往查阅，他希望了解 19 世纪法国的以描写农民生活为题材的长篇小说，以及 1979 年出版的，我国的，不是描写“文化大革命”的长篇小说之书名. 请将此读者所要了解之书名用集合论的方法描述之.

解 令 E 表示该图书馆全体藏书之集合;

A: 所有法国图书之集合;

B: 所有 19 世纪的书组成的书名集合;

C: 所有描写农民生活题材长篇小说的书组成的书名集合;

D: 所有长篇小说所组成的书名集合;

F: 所有 1979 年出版的书的书名集合;

G: 所有中国的书之书名集合;

H: 所有描写“文化大革命”长篇小说的书之书名集合,

则此读者所要了解之书可用集合方式描述为

$$D\cap[(B\cap A\cap C)\cup(F\cap G\cap\complement H)]$$

此例只是集合论在实际中的一个简单应用，它的应用绝不只于此，这里我们不再一一赘述.

练习题 1 - 2

1. **设** $A = \{ x \mid x < 5, x \in \mathbf{N} \}$　$B = \{ x \mid x < 7, x$ **是正偶数**$\}$　**N 是自然数集合)**　:
   $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \quad B$.
2. **设** $A = \{ x \mid x$ **是** book **中的字母**$\}$　$B = \{ x \mid x$ **是** black **中的字母**$\}$
   $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \quad B$.
3. **证明**: a) $\sim \quad = E$.　　　b) $\sim E = \quad$.
4. **简化下列集合运算**:

(1)　$A \cup B) \cap (A \cup B)$

(2)　$A \cup B) \cup (A \cup B)$

(3)　$A \cup B) \cup (A \cap C \cap B)$

(4)　$A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \cup (A \cap B)$

(5)　$A \cup B \cup \sim C) \cap (\sim A \cap \sim B \cap C)$

5. **设** A、B、C **为三个集合，则**

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

6. **应用集合的运算证明**:

(1)　$A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

(2)　$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(3)　$A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(4)　$A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

(5)　$A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B$.

7. **设** A、B **为任一集合，证明** $A \quad B$ **的充要条件为** $A \cap \sim B = \quad$.
8. **设全集** $E = \{ x \mid x$ **是自然数**$\}$
   $A = \{1, 2, 7, 8\}$　$B = \{ x \mid x^2 < 50 \}$
   $C = \{ x \mid x$ **可被** 3 **整除**$, 0 \leq x \leq 30\}$
   $D = \{ x \mid x = 2^k, k$ **是正整数** $0 \leq k \leq 6\}$

求下列集合:

(a)　$A \cup [B \cup (C \cup D)]$　　　(　　$A \cap [B \cap (C \cap D)]$

(c)　$B - (A \cup C)$　　　(　　$(\sim A \cap B) \cup D$.

9. (a)　　$A \cup B = A \cup C$ **是否必须** $B = C$?

(b)　　$A \cap B = A \cap C$ **是否必须** $B = C$?

(c)　　$A \quad B = A \quad C$ **是否必须** $B = C$?

第三节　幂集合与笛卡儿乘积

一、幂集合

定义 1　**设** A **是一集合，**A **的幂集合** $\rho \quad A)$ 　　A **的所有子集作元素所**

组成的集合 及 A 自身)

例 1 设 $A=\{a,b,c\}$ A 有子集:

$A_1=$, $A_2=\{a\}$ $A_3=\{b\}$ $A_4=\{c\}$ $A_5=\{a,b\}$ $A_6=\{a,c\}$

$A_7=\{b,c\}$ $A_8=\{a,b,c\}$

因此 A 的幂集合为

ρ $A)=\{$, $a\}$ $b\}$ $c\}$ $a,b\}$ $a,c\}$ $b,c\}$ $a,b,c\}\}$

一个给定集合的幂集合是惟一的, 因此求一个集合的幂集合是以集合为运算对象的一元运算 .

从上面例子我们看到, 求一个集合的幂集, 关键是把它的所有子集全部找到, 然而一个集合究竟有多少个子集呢 ? 下面的定理便回答了这一问题 .

定理 1 若集合 A 为由 n 个元素所组成之有限集合, 则 ρ $A)$ 由 2^n 个元素组成 . 即 A 有 2^n 个子集 .

证 我们将 ρ $A)$ A 之子集) 对应关系 . 设 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ n 位二进制数; b_1, b_2, $\cdots, b_n$, 当 A 的某一子集出现有 a_i 时, 则对应之 b_i 为 1, 当不出现 a_i 时, 则对应之 b_i 为 0 . 这样, 任一个 A 的子集就与一个二进制数建立一一对应关系: 给一个二进制数可得到一个 A 的子集, 反之, 给一个 A 的子集可得到一个二进制数, 而 n 位二进制数共有 2^n 个数, 因此可知 ρ $A)$ 2^n 个 . 证毕 .

例 2 设集合 $A=\{a,b,c\}$ ρ $A)$ $2^3=8$ 个元素 . 若 $A=$, 则 ρ $A)$ $2^0=1$ 个元素, 即 ρ $A)=\{$ $\}$

显见, 即使 A 为空集, ρ $A)$ A 也是不同 .

例 3 $A=\{a\}$ ρ $A)=\{$, $a\}\}$

以上我们只介绍了有限个元素的集合情形, 对集合为无限个元素时, 仍有幂集之说, 若 A 是无限元素之集, 则 ρ $A)$

二、笛卡儿乘积

在实际生活中, 有许多事物是成对出现的, 而这种成对出现的事物 . 具有一定的顺序 . 例如, 上、下; 左、右; $2<7$; 平面上点的坐标 . 一般地有:

定义 2 两个按一定顺序排列之客体; a, b 组成一个有序列, 我们叫做序偶, 并记作 $a,b)$

加上面我们所说的便可记为(上、下) $2,7)$ $x,y)$ 映了两个客体之间的顺序, 当顺序不同时, 序偶也是不同的 . 如: $x,y)\neq(y,x)$ $2,7)\neq(7,2)$

定义 3 两个序偶相等: $a,b)=(c,d)$ $a=c$, $b=d$.