# 离　散　数　学

孙　晶　张东林　编著

东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/ 孙晶，张东林编著.— 沈阳：东北大学出版社，2004.4

ISBN 7-81054-996-0

Ⅰ.离… Ⅱ.①孙… ②张… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 009910 号

## 内 容 简 介

离散数学是一门重要的专业基础课，是计算机、信息、软硬件开发和应用研究以及数学建模中不可缺少的知识。

本书包括数理逻辑、集合论、代数系统、图论四部分内容。并附有教学大纲和模拟试题及考研试题等。

本书深入浅出，通俗易懂，详细的例题介绍，便于自学。

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www.neupress.com

印 刷 者：东北大学印刷厂

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：10

字　　数：250 千字

出版时间：2004 年 4 月第 1 版

印刷时间：2004 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：张德喜　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：29.00 元

# 前　　言

离散数学是现代数学中的一个学科，主要以研究离散量为主，是研究离散量的结构及相互关系的学科。随着计算机的发明和发展，离散数学正变得越来越重要，它在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、操作系统、软件工程、数据库与信息检索系统、人工智能与机器人、网络、计算机图形学以及人机通信等各个领域，都有着广泛的应用。

作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养他们抽象思维和严格逻辑推理的能力。

本书包括数理逻辑、集合论、代数系统、图论四部分内容。

数理逻辑是逻辑学的一部分，它是用数学的方法研究数学推理和数学性质以及数学基础，也就是引进一些符号，用符号的方法来演绎推理规律，所以也称为符号逻辑。

集合论是数学的基础，现代集合论是以公理为基础，讨论集合的理论和性质。

代数系统也称代数结构或近世代数，是代数学中研究的重要对象，是抽象的代数学，所以也称为抽象代数，它是对“不相关的代数”抽象出共同的性质，即它们是由一些元素组成的集合，它们满足一个或几个运算，运算的结果仍然在此集合中。在研究时，不考虑元素具体是什么，只考虑元素和结构的性质。

图论从 18 世纪产生到现在，一直为其他应用科学所重视。随着计算机的发展，这个学科有了更大的应用空间。

离散数学这个古老而又年轻的学科，还在不断地丰富和发展。

编　者

2003 年 10 月于沈阳

# 目　　录

# 第 1 章　数理逻辑

数理逻辑是研究推理的数学分支,是用数学的方法研究演绎推理的科学方法的学科．用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科就叫做数理逻辑,也叫做符号逻辑．

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程,把推理过程像数学一样利用公式来进行计算,从而得出正确的结论．1847 年,英国数学家布尔发表了《逻辑的数学分析》,建立了“布尔代数”,并创造一套符号系统,利用符号来表示逻辑中的各种概念．布尔建立了一系列的运算法则,利用代数的方法研究逻辑问题,初步奠定了数理逻辑的基础．1884 年,德国数学家弗雷格出版了《数论的基础》一书,在书中引入量词的符号,使得数理逻辑的符号系统更加完备.对建立这门学科作出贡献的还有美国人皮尔斯,他也在著作中引入了逻辑符号,从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成,成为一门独立的学科．

数理逻辑包括两个最基本的也是最重要的组成部分,就是“命题演算”和“谓词演算”.

命题演算是研究关于命题如何通过一些逻辑联结词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法．

谓词演算也叫做命题涵项演算．在谓词演算里,把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式,由命题涵项、逻辑联结词和量词构成命题,然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系．

命题涵项就是指除了含有常项以外还含有变项的逻辑公式．常项是指一些确定的对象或者确定的属性和关系;变项是指一定范围内的任何一个,这个范围叫做变项的变域．命题涵项和命题演算不同,它无所谓真和假．如果以一定的对象概念代替变项,那么命题涵项就成为真的或假的命题了．

命题涵项加上全程量词或者存在量词,那么它就成为全称命题或者特称命题了．

数理逻辑这门学科建立以后,发展比较迅速,促进它发展的因素也是多方面的．

数理逻辑新近还发展了许多新的分支,如递归论、模型论等．递归论主要研究可计算性的理论,它和计算机的发展和应用有密切的关系．模型论主要是研究形式系统和数学模型之间的关系．

数理逻辑近年来发展特别迅速,主要原因是这门学科对于数学其他分支如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大的影响,特别是对新近形成的计算机科学的发展起到了推动作用.反过来,其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展．

## 1.1　命题与联结词

为了表达概念,陈述理论和规则,常常需要应用语言进行描述,但是日常使用的自然语言,往往叙述时不够确切,也容易产生多义性,因此就需要引入一种目标语言．

### 1.1.1　命题的概念

引入了目标语言和一些公式符号,就形成了数理逻辑的形式符号体系．目标语言就是一种能够表达判断的一些语言,而判断就是对事物有肯定或否定的一种思维形式,因此能表达判断的语言是陈述句,而推理必须包含前提和结论,且前提和结论又都是由陈述句组成的,因而陈述句就成了推理的基本要素．但并不是所有的陈述句都是推理的要素,数理逻辑中所要求的是能判断真假而不是可真可假的陈述句,称能够判断真假的陈述句为命题．

作为命题的陈述句所表达的判断结果,称为命题的真值．真值只取两个值:真或假．真值为真的命题称为真命题;真值为假的命题称为假命题．真命题表达的判断正确,假命题表达的判断错误．任何命题的真值都是惟一的．判断给定句子是否为命题,应该分两步:首先判定它是否为陈述句,其次判断它是否有惟一的真值．

【例 1 - 1】　判断下列句子是否为命题．

(1) 3 是奇数．

(2) 5 是偶数．

(3) $x$ 大于 $y$.

(4) 地球上有生物．

(5) 明天是晴天．

(6) 你好吗?

(7) 祝你新年快乐!

(8) 这朵花真美丽啊!

(9) 我正在说假话．

本题的 9 个句子中,(6)是疑问句,(7)是祈使句,(8)是感叹句,因而这 3 个句子都不是命题．

剩下的 6 个句子都是陈述句,(3)与(9)不是命题．(3)无确定的真值,根据 $x$, $y$ 的不同取值情况它可真可假,即无惟一的真值,因而不是命题．若(9)的真值为真,即“我正在说假话”为真,则(9)的真值应为假;反之,若(9)的真值为假,即“我正在说假话”为假,也就是“我正在说真话”为真,则又推出(9)的真值应为真．于是(9)的真值无法确定,它显然不是命题．像(9)这样由真推出假,又由假推出真的陈述句称为悖论．凡是悖论都不是命题．

本例中,只有(1),(2),(4),(5)是命题,(1),(4)为真命题．(2)为假命题,虽然今天还不知道(5)的真值,但它们的真值客观存在,而且是惟一的,不久的将来就会知道它的真值．

### 1.1.2　命题符号

对命题和它的真值进行抽象,就是将命题和真值符号化．可以用大写英文字母 $A$, $B$, $C$, …, $P$, $Q$, $R$, …表示命题,用“T”表示真,用“F”表示假,有时也用“1”表示真,用“0”表示假,于是命题的真值取值范围为 T,F(或 0,1).

例如(例 1-1 中的)命题表示为:

(1) $A$:3 是奇数．

(2) $B$:5 是偶数．

(4) $D$:地球上有生物．

(5) $E$:明天是晴天.

则可以表示 $A$, $D$ 的真值为 T, $B$ 的真值为 F, $E$ 的真值明天才能知道.于是, $A$, $B$, $D$, $E$ 就成了所表示命题的代表.把它们称为命题表示符号.

### 1.1.3　复合命题

在例 1-1 中, $A$, $B$, $D$, $E$ 所表示的命题都是简单陈述句,它们都不能被分解成更简单的陈述句了,称这样的命题为简单命题或原子命题.但在各种论述和推理中,所出现的命题多数不是简单的陈述句,而是由简单陈述句通过联结词联结而成的陈述句,称这样的命题为复合命题.

【例 1-2】　设命题 $P$:如果今天多云,那么今天下雨.

它就是由"命题 $A$:今天多云"和"命题 $B$:今天下雨"复合而成的复合命题.

在日常语言中,由一些简单的陈述句,通过一些"联结词"可组成较为复杂的语句叫复合语句.联结词可以是"不"、"并且"、"或者"、"如果…则…"、"当且仅当",等等.

在命题演算中,由原子命题通过特定的"联结词"可构成复合命题.原子命题与复合命题均称为命题.当然,由一些命题,通过"联结词"所构成的陈述句,仍是命题.

在命题演算中也有类似于日常语言中的一些联结词,叫命题联结词,或逻辑联结词.但是如果从严格的意义上讲,它们的含义有时并不完全与日常语言的联结词一致.

在数理逻辑中,复合命题是由原子命题与逻辑联结词组合而成,联结词是复合命题中的重要组成部分,为了便于书写和进行推演,必须对联结词做出明确规定并符号化.

下面讲述常用的五个命题联结词.

### 1.1.4　常用的五个命题联结词

(1) 否定

定义 1.1.1　设 $P$ 为一命题, $P$ 的否定,记做 $\neg P$."$\neg$"表示否定联结词.

若当 $P$ 的真值为 T 时, $\neg P$ 真值为 F;若当 $P$ 的真值为 F 时, $\neg P$ 真值为 T.

命题 $P$ 与其否定 $\neg P$ 的关系如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1　　命题 $P$ 与其否定 $\neg P$ 的关系

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

【例 1-3】　设命题 $P$ 为"沈阳是一个大城市";则 $P$ 的否定为

$\neg P$:沈阳不是一个大城市.

【例 1-4】　设命题 $P$ 为"赵玲是个三好学生";则"赵玲不是个三好学生",可写为 $\neg P$.

$\neg P$:赵玲不是个三好学生.

可以看出,"否定"联结词,它是一个一元运算.

日常用语中有许多表示否定的词,如"不"、"非"、"没有"、"无"、"并非"、"并不"等.

(2) 合取

定义 1.1.2　设 $P$, $Q$ 是两个命题,命题 $P$ 和 $Q$ 的合取命题,记做 $P\wedge Q$."$\wedge$"表示合取联结词.

当 $P, Q$ 的真值同时为 T 时, $P\wedge Q$ 的真值为 T;在其他情况下, $P\wedge Q$ 的真值都是 F.

联结词“ ∧ ”的定义如表 1.1.2 所示 .

表 1.1.2　　联结词“ ∧ ”的定义

| $P$ | $Q$ | $P\wedge Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

【例 1 - 5】　设命题 $P$ 为“ 王华的成绩很好 ”, $Q$ 为“ 王华打得一手好球 ”,则“ 王华的成绩很好并且打得一手好球 ”可以写为 $P\wedge Q$.

$P\wedge Q$:王华的成绩很好并且打得一手好球 .



【例 1 - 6】　设命题 $P$:今天下雨, $Q$:明天下雨,则今天下雨而且明天下雨可表示为:

$P\wedge Q$:今天下雨而且明天下雨 .

或 $P\wedge Q$:今天与明天都下雨 .

显然只有当“ 今天下雨 ”与“ 明天下雨 ”都是真时,“ 今天与明天都下雨 ”才是真的 . 合取的概念与自然语言中的“ 与 ”意义相似,但并不完全相同 .

【例 1 - 7】　设 $P, Q$ 是两个命题, $P$:我们去看电影 . $Q$:房间里有十张桌子 .

则 $P, Q$ 命题的合取为:

$P\wedge Q$:我们去看电影与房间里有十张桌子 .

在自然语言中,上述命题是没有意义的,因为 $P$ 与 $Q$ 没有内容联系,但在数理逻辑中,对 $P$ 和 $Q$ 的合取 $P\wedge Q$ 来说,它仍可成为一个新的命题,只要按照定义,在 $P, Q$ 分别取真值后, $P\wedge Q$ 的真值也必然确定 .

命题联结词“ 合取 ”也可以将若干个命题联结在一起 . 联结词“ 合取 ”甚至可以将两个互为否定的命题联结在一起 .

“ 合取 ”联结词是一个二元运算 .

日常用语中对“ 合取 ”可以有多种不同表示方式:如“ 且 ”、“ 并且 ”、“ 和 ”、“ 与 ”、“ 同 ”、“ 又 ”、“ 以及 ”、“ 而且 ”、“ 不但…而且… ”、“ 既…又… ”、“ 尽管…仍然… ”、“ 虽然…依旧… ”,等 .

(3) 析取

定义 1.1.3　设 $P, Q$ 是两个命题,命题 $P$ 和 $Q$ 的析取,记做 $P\vee Q$.

“ ∨ ”表示析取联结词 .

当 $P, Q$ 真值同时为 F 时, $P\vee Q$ 的真值为 F,在其他情况下, $P\vee Q$ 的真值为 T.

联结词“ ∨ ”的定义如表 1.1.3 所示 .

表 1.1.3　　联结词“ ∨ ”的定义

| $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

析取的概念与自然语言中的“或”有些类似.

【例 1-8】 设 $P$:我爱学习数学, $Q$:我爱学习语文;

则 $P\vee Q$:我爱学习数学或语文.

但是,从析取的定义可以看到,联结词“$\vee$”与汉语中的“或”的意义也不全相同,因为汉语中的“或”,可表示“排斥或”,也可表示“可兼或”.

【例 1-9】 设 $P$:他是 100 米赛跑的冠军, $Q$:他是 400 米赛跑的冠军.

则 $P\vee Q$:他是 100 米或 400 米赛跑的冠军.

此例的“或”是“可兼或”.

即当“$P$:他是 100 米赛跑的冠军”是真时;当“$Q$:他是 400 米赛跑的冠军”是真时;当 $P$, $Q$ 同时是真时;则有“$P\vee Q$:他是 100 米或 400 米赛跑的冠军”都是真的.

【例 1-10】 设 $P$:今天晚上七点钟我在家看电视. $Q$:今天晚上七点钟我去剧场看戏.

则 $P\vee Q$:今天晚上七点钟我在家看电视或去剧场看戏.

在此例中的“或”是“排斥或”,也称“不可兼或”.

即“$P$:今天晚上七点钟我在家看电视”和“$Q$:今天晚上七点钟我去剧场看戏”不能同时成立.“不可兼或”的概念放在后面讲.现在的析取指的是“可兼或”.

【例 1-11】 设命题 $P$ 为“今天晚上我写字”, $Q$ 为“今天晚上我看书”,则“今天晚上我写字或看书”,可以写为 $P\vee Q$.

$P\vee Q$:今天晚上我写字或看书.

还有一些汉语中的“或”字.实际不是命题联结词.

【例 1-12】 他昨天做了二十或三十道习题.

这个例子中的“或”字,只表示了习题的近似数目,不能用联结词“析取”表达,这个例子是个原子命题.

“析取”联结词是二元运算.

日常用语中对“析取”的表示方式:如“或”、“或许”、“可能”、“或者”等.

(4) 条件

定义 1.1.4 设 $P$, $Q$ 是两个命题,命题 $P$ 和 $Q$ 的条件命题记做: $P\rightarrow Q$.“$\rightarrow$”表示条件联结词.

当 $P$ 的真值为 T, $Q$ 的真值为 F 时, $P\rightarrow Q$ 的真值为 F. 在其他情况下, $P\rightarrow Q$ 的真值为 T.

称 $P$ 为前件, $Q$ 为后件.

联结词“$\rightarrow$”的定义如表 1.1.4 所示.

表 1.1.4 联结词“$\rightarrow$”的定义

| $P$ | $Q$ | $P\rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

【例 1-13】 设 $P$:今天多云, $Q$:今天下雨.

则条件命题 $P\rightarrow Q$:如果今天多云,那么下雨.

【例 1 - 14】 设 $P$:3 + 5 = 8. $Q$:李明是优秀学生 .

则条件命题 $P\rightarrow Q$:如果 3 + 5 = 8,则李明是优秀学生 .

【例 1 - 15】 设 $P$:雪是黑的 . $Q$:太阳是红的 .

则条件命题 $P\rightarrow Q$:如果雪是黑的,那么太阳是红的 .

上述三个例子都是用条件命题 $P\rightarrow Q$ 表达的 .

在自然语言中,“ 如果… ”与“ 那么… ”之间常常是有因果联系的,否则就没有意义 . 但对条件命题 $P\rightarrow Q$ 来说,只要 $P$, $Q$ 能够分别确定真值, $P\rightarrow Q$ 即成为命题 .

此外自然语言中对“ 如果…则… ”这样的语句,当前提为假时,结论不管真假,这个语句的意义,往往无法判断 . 而在条件命题中,规定为“ 善意的推定 ”,即前提为 F 时,条件命题的真值都取为 T.

“ 条件 ”联结词是二元运算 .

日常用语中对“ 条件 ”可以有多种不同表示方式:如“ 如果…那么… ”、“ 当…则… ”、“ 若…那么… ”、“ 假如…那么… ”等 .

(5) 双条件

定义 1.1.5 设 $P$, $Q$ 是两个命题,命题 $P$ 和 $Q$ 的双条件命题,记做 $P$\ $Q$.“ \ ”表示双条件联结词 .

当 $P$ 和 $Q$ 的真值相同时, $P$\ $Q$ 的真值为 T,在其他情况下, $P$\ $Q$ 的真值为 F.

联结词“ \ ”的定义可如表 1 .1 .5 所示 .

表 1.1.5　　联结词“ \ ”的定义

| $P$ | $Q$ | $P$\ $Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

【例 1 - 16】 设 $P$:两个三角形全等 . $Q$:两个三角形的三组对应边相等 .

则 $P$\ $Q$:两个三角形全等,当且仅当它们的三组对应边相等 .

【例 1 - 17】 设 $P$:2 + 2 = 4 , $Q$:雪是白的 .

则 $P$\ $Q$:2 + 2 = 4,当且仅当雪是白的 .

【例 1 - 18】 设 $A$:三号房间的面积 . $B$:五号房间的面积 .

则 $A$, $B$ 的“ 双条件 ”命题是:

$A$\ $B$:三号房间的面积与五号房间的面积一样大 .

“ 双条件 ”联结词是二元运算 .

日常用语中对“ 双条件 ”可以有多种不同表示方式:如“ 充分必要 ”、“ 当且仅当 ”、“ 相同 ”、“ 相等 ”、“ 一样 ”、“ 等同 ”、“ 只有…才能… ”等 .

例如从语句“ 只有睡觉才能缓解疲劳 ”可以看出,联结词“ 只有…才能… ”与“ 双条件 ”有相同之逻辑含义 .

在命题联结词中有些地方与一般习惯用语是不同的:两个逻辑上完全没有联系的命题可加以命题联结词而形成新的复合命题 .

【例 1 - 19】 设命题 $P$ 为“ 2 + 3 = 5 ”,命题 $Q$ 为“ 他游泳 ”.

则下列都是命题 $P$, $Q$ 的复合命题:

"$2+3=5$ 并且他游泳";

"$2+3=5$ 或者他游泳";

"如果 $2+3=5$,则他游泳";

"$2+3=5$ 等价于他游泳".

在日常生活中,$P$, $Q$ 这两个命题是毫无逻辑联系的,它们是不可能组合成一个复合语句的.但是,在命题演算中这是完全合理的,因为 $P$ 与 $Q$ 均是命题,通过命题联结词组成复合命题,而且还可以确定其真假值,这个真假值依赖于相联结命题的真假值.

命题演算中的五个联结词其含义与日常用语大致相同,但在某些时候并不一致,其衡量标准是五个联结词的定义.故在命题演算中,五个联结词的含义由其定义惟一确定,而不是由其日常用语的含义确定.

## 1.2 命题公式与真值表

前面已经仔细地讨论了命题与命题联结词.今后为了进一步研究命题的运算,这里只注意命题之真假值,而并不注意其内容含义.对命题联结词只承认它的定义,而并不理会它的日常实际含义.这样,就可以在命题与命题联结词的基础上建立起一个形式.

### 1.2.1 命题变元

一个特定的命题必然有确定的真值,通常称这个命题是一个常值命题,它只有"T"或"F"一个确定的结论(真值);一个任意的没有赋以具体内容的命题符号,是一个变化的命题.对于它,可以定义命题变元的概念.

**定义 1.2.1** 以"真"、"假"为其取值范围的变元,称为命题变元,用 $P$, $Q$, $R$, …表示,在不发生混淆的情况下,它也可以简称为命题.

由一些原子命题经命题联结词的连接,可构成各种形式的复合命题,在复合命题中涉及到括号的使用问题,目前均使用圆括号.

为减少括号的数目,作下列规定.

(1) 五个联结词之结合能力强弱顺序为:"否定"、"合取"、"析取"、"条件"、"双条件",其中否定为最强,双条件为最弱,凡符合此顺序者,括号均可省略.

(2) 规定具有相同结合能力的联结词,按其出现的先后顺序,先出现者先运算,凡符合此要求者,其括号均可省略.

(3) 最外层括号可省略.

例如复合命题 $((P\wedge Q)\rightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)))$ 可按上述规定,省去一部分括号,写成 $P\wedge Q\rightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$.

### 1.2.2 命题公式

由命题和命题联结词可构成命题演算公式,也称为命题公式.

规定如下.

**定义 1-2-2** 命题演算公式(或简称公式)规定为:

(1) 命题变元是公式;

(2) 如果 $P$ 是公式时,$\neg P(\neg P)$是公式;

(3) 如果 $P, Q$ 是公式,则 $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \backslash Q$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \backslash Q)$是公式;

(4) 有限步使用上述法则所得的结果都是公式.

命题公式是一个按上述法则由命题变元、命题联结词及圆括号所组成的字符串.

例如按照上述定义,字符串$(P \vee Q)$, $P \wedge Q$, $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$都是公式;

字符串$((P \vee Q)$, $(P \rightarrow \wedge (\neg P \vee \neg Q)$, $P \wedge Q \vee$都不是公式.

下面用几个例子说明由日常用语翻译成复合命题过程.

【例 1-20】 设命题 $P$ 为"明天上午七点下雨", $Q$ 为"明天上午七点下雪", $R$ 为"我去学校";则



"如果明天上午七点雨夹雪,则我去学校."可写为:

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

"如果明天上午七点不下雨并且不下雪,则我去学校."可写为:

$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

"如果明天上午七点下雨或下雪,则我不去学校."可写为:

$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$

"如果明天上午七点不是雨夹雪,则我去学校."可写为:

$\neg (P \wedge Q) \rightarrow R$

"只有当明天上午七点不下雪并且不下雨时,我才去学校."可写为:

$(\neg P \wedge \neg Q) \backslash R$

### 1.2.3 真值表

设有一个由 $N$ 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_N$ 所组成的命题公式,则此公式的真假,由这 $N$ 个命题变元惟一确定.

这 $N$ 个命题变元,也称为命题公式的 $N$ 个分量.

给出 $N$ 个命题变元的一组确定的值后(它们由若干个 T 及 F 组成),则公式亦能得到一个确定的真值(或为 T 或为 F).

命题变元的一组确定的值,叫做公式的一个指派.

每个指派对应公式的一个确定的值,所有的指派,构成的公式的全部真值.汇成表格后,组成了此公式真值表.

真值表是命题公式所有真值的表示形式.

下面举例说明真值表的构造方法.

【例 1-21】 构造命题公式$\neg P \vee Q$ 的真值表.

【解】 此命题公式有两个命题变元 $P, Q$,它一共有四组指派,分别是:(T,T),(T,F),(F,T),(F,F).

对此四种指派分别考虑命题公式$(\neg P \vee Q)$的真、假值,可得真值表(表 1.2.1).

表 1.2.1　　　　　　　　　　**真　值　表**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P\vee Q$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

**【例 1-22】　构造命题公式** $(P\to Q)\wedge\neg Q$ **的真值表．**

**【解】　分别考虑** $P, Q$ **的所有指派和命题公式的真、假值，可得真值表**(表 1.2.2)．

表 1.2.2　　　　　　　　　　**真　值　表**

| $P$ | $Q$ | $P\to Q$ | $\neg Q$ | $(P\to Q)\wedge\neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

**【例 1-23】　分别求命题公式** $P\wedge Q, P\vee Q, P\to Q, P\backslash Q$ **的真值表．**

**【解】　分别考虑** $P, Q$ **的所有指派和命题公式的真、假值，可得真值表**(表 1.2.3)．

表 1.2.3　　　　　　　　　　**真　值　表**

| $P$ | $Q$ | $P\wedge Q$ | $P\vee Q$ | $P\to Q$ | $P\backslash Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | F | T | T | F |
| F | F | F | F | T | T |

**【例 1-24】　分别求命题公式**$\neg P\vee Q, P\to Q, \neg P\vee Q\backslash P\to Q$ **的真值表．**

**【解】　分别考虑** $P, Q$ **的所有指派和命题公式的真、假值，可得真值表**(表 1.2.4)．

表 1.2.4　　　　　　　　　　**真　值　表**

| P | Q | ¬P | ¬P∨Q | P→Q | ¬P∨Q\ P→Q |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

**【例 1-25】　分别求命题公式**$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q), (\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q), (P\to Q)\wedge(Q\to P), P\backslash Q$ **的真值表．**

**【解】　分别考虑** $P, Q$ **的所有指派和命题公式的真、假值，可得真值表**(表 1.2.5, 表 1.2.6)．

表 1.2.5　　　　　　　　　　**真　值　表**

| $P$ | $Q$ | $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ | $(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |