# 第 1 章　绪 论

## 1.1　离散数学的研究对象

“离散数学”是一门相对于“连续数学”而命名的数学分支。大家都知道，数学分析和复变函数是以函数为主要研究对象的。在那里，函数这一概念是指一个(或多个）连续变量和另一个连续变量之间的关系，连续变量在一确定的范围内变化（取值)。离散数学中也研究函数和关系，可是一般而言，这里主要讨论的是‘离散量’的结构及其关系。

所谓‘离散量’(或离散对象)是一个很普遍的概念，一般来说一个离散变量可取有限个或无限可列*个元素作为其值。这正是和计算机本身的结构和用计算机可处理（解决)问题的有限性和对象的离散性相一致的。

例如一个旅行社拟新辟一条旅游线路：从旅行社所在城市出发，巡回其余 $n-1$ 个城市(或景点)，而后返回出发地。当然，旅行社必须考虑它的经济效益和游客一般不愿在一次旅行中两次光顾同一景点的愿望。那么，它应该如何设计它的这条旅游线路呢？诚然，如果在这条线路上存在不太多的景点时，人们并不一定要依赖计算机来解决这个问题。他们可以在纸上画出 $n$ 个小圆圈(或点)表示上述这 $n$ 个城市或景点，再用连接两个小圆圈的线段（直线段或曲线段都无所谓！)表示该两端点间的一条交通线。现在，剩下的问题就是看能否用一支铅笔，从代表起点的小圆圈开始，沿着图上已有的线段，将其余 $n-1$ 个小圆圈每个划过一次且仅划过一次并最后回到起点了。也许，旅行社的工作人员这样试了不多的几次就找到了一条符合要求的线路。但是，也许他们用掉了很多很多纸，甚至于磨掉了一支铅笔也没能设计出这样的线路来！因为，很可能这样的线路根本就不存在。而离散数学的理论对这个问题很可能只需一个很简单的计算就知道这条路线是不存在的了(这是一个所谓的哈密尔顿问题，将在第 5 章图论中讨论)。

看一看这个旅游线路问题的解决过程，它的解决(求得解或是证实无解）经历了以下几个阶段：首先是将 $n$ 个城市和连接它们的交通线绘制成一幅点和线组成的图。这是人们解决问题的第一步抽象，或者说是建立待解问题的“数学模型”。它将现实世界中的对象即城市和交通线抽象成了小圆圈和线段这样一些离散对象。这是解决问题的本质的一步（至少对旅行线路这一特殊问题是本质的)：从每一城市直接可抵达的有哪些城市。完全不必关心诸如某一城市的人口、气候等等其他与本问题无关的属性。有了对现实世界正确的完整的抽象，第二步就是将现实问题转化为一个数学问题。最后的步骤就是用数学方法(和理论)求解问题的答案或证明问题无解。

通过以上这个简单例子，我们试图向读者说明两件事：一是数学（当然也包含离散数学）的抽象为什么常常可以用来解决实际问题。二是某些离散对象的问题，必须被正确地抽象为一个离散数据结构及其关系的模型。解决这类问题的有力工具无疑非离散数学莫属了。

* 集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 就是我们最熟悉的无限可列个元素的集。

## 1.2 离散数学的主要内容

离散数学作为一门大学课程，在国外最早大约是20世纪70年代的事了。当时，一些主攻计算机科学的学生感到自己的数学基础不足以很好地学习和解决本专业的许多问题，于是就有一些计算机科学家根据自身对计算机科学的理解，与一些数学家一起圈定了一些他们认为对计算机科学是必需的数学专题，结合计算机科学中的一些实例编著了一些主要是命名为“离散数学结构和方法”或“离散数学基础”之类的书籍，开设相应的课程供大学里学习计算机专业和其他一些相关工程专业的学生选修。由于反映很好，渐渐在各计算机专业中，“离散数学”即作为必修课来开设。我国大约是在20世纪80年代初期，从翻译国外离散数学专著开始，逐渐由各著名工科院校的教师编写了一些适合我国教学情况的离散数学教材，并在计算机科学系中开设了相应的课程。

如上所述，由于各专家主攻计算机的方向和他们对计算机教学的理解不尽相同，因此，在“离散数学”名下的内容也不完全一样。不过，经过这些年的实践，作为计算机专业所需的离散数学内容主要包括四大部分：数理逻辑、集合论和关系、图论初步和代数系统。本书也以这些内容为主要架构，同时添加了诸如离散数函数和递推关系等很有用的内容。基本上已涵盖了计算机专业所需的数学内容。

## 1.3 学习离散数学的方法

离散数学是计算机科学系所有专业的基础数学课程。一方面有其实用性（应用数学的特征），另一方面有其本身作为数学基础课的理论的严谨性。所以，学习任何一个专题时，首先要精确严格地掌握好每一概念和术语，正确理解它们的内涵和外延。因为公理、定理或定律的基石都是概念。只有正确地理解了概念，才能把握定理的实质，熟练地将公理、定理应用于解决问题。完全地、精确地掌握一个概念的好主意是首先要深刻理解概念的内涵，然后举一些属于和不属于该概念外延的正反两方面的实例。如果对一些似是而非的例子也能辨别的话，应该说这个概念是真正理解了。对一些重要的概念，能记住一两个实例也很管用。这对牢固掌握一个概念是很有好处的。

必须提醒读者，千万不要在完全理解某些概念、基本定理之前就匆忙去做相应的习题。几乎可以肯定地说，这样做是不能学懂离散数学的，更无法去应用它。

总的说来，读者应养成一种自觉的学习习惯，就是首先要掌握好基本概念和术语，在此基础上，理解每一基本定理的本质，最后通过学习和借鉴书中提供的例题，独立地完成每一次作业，并且在每次作业完成之后，能自觉地归纳出其中用到的基本解题方法。

虽说离散数学是一门很抽象的课程，但只要读者肯动脑筋思考，掌握正确的学习方法，那么一定会在以后的学习中体会到越学越轻松的感觉。一般而言，毕竟学习离散数学只需要有一定的中学数学基础就够了。

# 第 2 章　数理逻辑

推理是人类特有的思维活动。人们在社会实践中自觉或不自觉地通过感官接受外界的消息形成所谓表象，同类表象的反复出现就会在人脑中建立起一个概念。概念已不再囿于个别的表象而具有一类表象的本质属性，这就是概念的内涵。反过来说，所有衍生出该概念的具有特定表象的事物(对象)组成了概念的外延。例如，人们在品尝了苹果、梨、香蕉等等之后，将具有各种特定香味而富含营养和水分的植物果实概括为“水果”这一概念。客观世界里并不存在具体的一个水果，但水果这一概念却包涵了每一个苹果、梨、香蕉等等。因此，我们说概念是存在于人脑里的对现实世界中某些对象的一种抽象，它只存在于人的思维过程，而水果这一概念的外延却是由客观世界中存在的所有有水果属性的个体组成。我们可以向别人展示一只梨，并对他说：这是一只梨，它是一种水果(严格地说，应当说这是水果中的一个)，但任何人都无法展示水果是什么。这就是说，概念存在于思维之中，而概念的外延存在于客观世界。当然，以上的叙述只是为了使大家明白概念是怎样产生的。现实生活中还有很多“抽象的概念”，如时间、空间、数学上的点等等。事实上，我们根本不可能找到一个只有位置而无大小的几何点。但是，我们照样可以完美地将所有的实数和几何上的一根有方向的直线对应起来。于是我们要对前面提到的“外延存在于客观世界”一语作一些说明。通常，在科学技术领域里，人们在研究某些现象时发现，必须对某些客观实体作出更为抽象的概括，摒弃客体的某些属性，张扬它的局部属性，形成一种全新的概念。这样往往可将被研究事物的本质属性突现出来。例如，几何上的点就是从具有一定几何大小的普通的点，通过忽略其大小而强调其几何位置所得。这样就使得实数理论建立在一个有形的对应物——数轴上了。不要低估了这样做的影响。从此，几何学与代数学建立起密切的联系，使得解析几何、画法几何、微分几何得以借助分析手段长足地发展起来。所以说，“概念的外延存在于客观世界”一语的正确理解应当是：人们不可能杜撰一个根本不反映任何客观事物本质属性的概念。如果有这样的概念，那只能存在于迷信或神话中。

概念还不是人类思维的全部，判断是人们更具创造力的思维活动。所谓判断，就是对某些概念之间的必然联系作出的断言。判断的真实性最终只能为客观实践所证实或否定。这就是我们通常说的“实践是检验真理的惟一标准”。数理逻辑主要研究的就是如何从一组已知判断，通过所谓有效推理而最终获得一个全新判断的逻辑学分支。

说到有效推理，它是一组明确规定的法则，允许从一个或一组已知判断，得到一个新的判断。特别要强调的是：有效推理是经过反复实践认证符合客观规律的一种人类的正确思维。但它只保证推理本身是正确的，并不能保证推理的结果——最终得出的判断也正确。因为如果作为推理的前提的判断是虚假的或局部是虚假的话，即使推理过程是有效的，我们也不能保证结论一定是正确的。我们惟一可以保证的是在正确的前提下，经过有效推理必定产生正确的结果。

逻辑学是一门研究人类思维规律的科学。由于它的普遍适用性，推理规则应当与任一具体的论证或学科的内容无关。这使逻辑学必须使用一种所谓形式语言。它由完全定义了的概念或术语，以及如何使用这些概念的语法组成。再则，为不让形式语言有二义性，我们使用有

明确定义的符号来表示形式语言中的概念，使得形式语言被描述成类似于数学公式的样子。因此，有时我们也称之为符号逻辑。

最后，提醒读者：在定义和描述无二义性的形式语言之前，我们有的只是日常生活中使用的语言(如汉语、英语等)，这种语言常称之为元语言。元语言不乏二义性（大家都知道双关语)。用一种并非严格的自然语言来定义或描述一种精确而无二义性的语言，这种困难一开始就应充分留意。

## 2.1 命题

### 2.1.1 命题的概念

命题逻辑中的基本语素是命题。在形式语言中，如下定义的陈述语句是命题。

定义 2.1　命题　就是在特别指定的范围、时间和空间内，具有惟一确定的真假性的陈述语句。

由于在命题逻辑中只讨论有确定真假性的陈述语句，并不关心语句本身的语义是什么，所以"语句"一词与"命题"被等价地使用。

定义 2.2　命题的真假值　在特定的范围、时间和空间内，真实的命题具有"真"的真假值。反之，虚假的命题具有"假"的真假值。

命题的真假值通常简称为真值。真值"真"也可以用符号 T(TRUE) 或 1 来表示；"假"可以用 F(FALSE)或 0 来表示。

值得指出的是一个命题的真值总是确定存在的(非真即假，别无其他)。它与我们的主观感受和是否知道这个真值完全无关。

在很多文献中，一个命题之前冠以一个用圆括号封闭起来的数字，并用它代表这个命题。

例如有如下命题。

(1) 宇宙中必然存在除人类以外的智慧生物。

人类还无法判断这个命题是真是假。但是其具有确定的真假性是肯定的。

值得一提的是真值通常与论述一个命题的范围、时间和空间有关。例如：

(2) $101 + 1 = 110$。

这个命题在二进制计数制下是真的，在其他计数制下则为假，然而在论述命题的上下文中，通常总可以确定为是在二进制范围内给出的。

定义 2.3　原子命题　除命题本身之外，它的任何局部都不是命题。这样的命题叫原子命题。

定义 2.4　复合命题　由两个或两个以上命题通过联结词和圆括号适当组成的命题是复合命题。

"联结词"在下一节讨论。

### 2.1.2 命题的表示

原子命题与复合命题的共同特点是他们均有惟一的真值。在不必要研究一个命题的结构时，他们都被笼统地称为"命题"，都可以用大写的字母，如 $A, B, C, \cdots, P, Q, R$ 等表示。也可用字母加下标的方式表示不同的命题。如 $P_1, P_2, \cdots, P_i$ 表示 $i$ 个不同的命题。

(3) $P$:天下雪了。

这里,把符号‘$P$”看成了命题“天下雪了”的等价物。这种表示命题的符号被称作标识符。

应该特别指出，标识符在上面是被用来表示某一特定的命题。标识符还有一个用法，就是一个标识符并不具体代表一个命题，而是表示在该符号所在的位置上可以用某一确定的命题去代替他。这种替代，通常叫指派。如前所述，由于在命题逻辑里，一般并不关心命题的语义，只关心其真假值。所以明白地说，对一个标识符的指派，实际上就是给它一个 T或 F 这样的真假值。

归纳一下，在上面提到的标识符第一种用法中，该标识符称为一个命题常量；而第二种用法的标识符叫做命题变量（元)。命题变元在对其指派前不是命题，没有真值。

一个符号究竟为命题常量还是命题变量，不会引起混淆。因为在它们出现的环境中均会得到说明。

下面是另一些命题：

(4) 上海是一个国际大都市。

(5) 2002 年人类将踏上火星。

(6) 哥伦布发现了美洲大陆。

(7) 罗马是法国的首都。

(8) 费城是一个古老的城市。

这些命题中,(4)、(6)的真值是 T,(7) 的真值是 F,(5)的真值目前尚无法确定,(8)在美国这个只有 200多年历史的国家里是真的，而对于一些有数千年文明史的国家来说是假的 (我们说过，命题的真值是在指定的范围、时间和空间中确定的 ).

下面的两个语句不是命题：

你就别去了吧。

DNA 为什么被称为生命的密码？

因为前一语句是祈使句，后一个是疑问句。对他们讨论真假性是无意义的。

最后我们给出一个语句：

托马斯为本镇所有自己不刮脸的男人刮脸。

这是一个悖论。他不可能有真假值。因为托马斯这个（男 )理发师，无论他是否为他自己刮脸，都与上述陈述句发生矛盾。关于悖论的规避，我们在第 3 章集合论和关系中还会作些说明 。

## 2.2 命题联结词

联结词是用来将(原子 )命题联结成复合命题的一种基本语素，通常由词或短语组成。自然语言中也有联结词(或、和、……) ，可是他们经常产生二义性。如“他有钢笔或铅笔”。究竟说的是某人只有钢笔或铅笔二者之一呢？抑或二者同时拥有呢？本节我们来为逻辑联结词定义，并给予符号化。

有必要再次强调的是以下的标识符都作为命题变元使用。因此，在对一个符号表达式中的每一个标识符指派之前，它不可能有真值，因此这种表达式不是一个命题，我们称之为命题公式。对一个命题公式中每一标识符均指派一个命题真值之后，原来的命题公式成为复合命题。这时，它有一个确定的真值。

通常，我们把对一个命题公式中的每一个变元均指派一个真值的做法，称作对命题公式的一次指派。因此，我们说仅当对命题公式作了指派之后，命题公式才是一个复合命题。

### 2.2.1 联结词的定义

定义 2.5 否 定 设 $P$ 是一个命题，则 $P$ 的否定也是命题，记为“$\neg P$”，读作“非 $P$”。$\neg P$为真，当且仅当 $P$ 为假。

“否定”的定义也可以用表 2.1 给出。

表 2.1 否定的真值表

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

【例 2.1】 设 $P$：伦敦是一个多雾的城市。

那么，$\neg P$ 表示的命题是：

$\neg P$：并非伦敦是一个多雾的城市。

或者

$\neg P$：伦敦不是一个多雾的城市。

虽然以上两自然语言的语句形式上有所不同，但他们的真值完全相同。读者从此也可看出符号化的语言是如何消除语言的二义性的。

“否定”只是对一语句的修饰，习惯上仍称作联结词。有时也说它是一元联结词或一元运算。因为一语句在用“否定”修饰后生成一个意义和真值完全不同的新语句。

定义 2.6 合取 设 $P,Q$ 是两命题，则 $P,Q$ 的合取是一个新的命题，记为“$P \wedge Q$”，读作“$P$ 与 $Q$”或者“$P$ 且 $Q$”。$P \wedge Q$ 为真，当且仅当 $P$ 为真且 $Q$ 也真。合取的定义也可以用表 2.2 给出。

表 2.2 合取的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

【例 2.2】 构造以下二语句的合取。

$P$：这房子很大。

$Q$：$2+2=4$。

解 $P \wedge Q$ 这房子很大且 $2+2=4$。

以上结果看起来很可笑。但从逻辑的语法规则来衡量，它一点也没有错。事实上，它因袭了两个原子语句的真值并且有自己完全确定的真值。这反映了这样一个事实：形式语言与所论述的内容（语义）和学科无关。在命题逻辑中，我们主要关心的只是命题的真假性。

【例 2.3】 分析以下命题中的联结词。

$G$：小张与小王都是三好学生。

$R$：小张与小王是表弟兄。

解 对于命题 $G$，我们可以引入两个原子命题：

$A$：小张是三好学生。

$B$：小王是三好学生。

于是，$G$ 就可表成 $A \wedge B$。

可是对语句 $R$ 而言，其中的"与"是两个名词"小张""小王"的联结词。而命题逻辑中的"与"仅仅是一种语句间的联结词。因此它不能用于名词的联结。实际上，语句 $R$ 在命题逻辑中是原子命题。其中不含有逻辑联结词"与"。

再强调一下，原子命题在命题逻辑演算中是一最小单位，不可再细分。

定义 2.7 析 取 设 $P,Q$ 是两个命题，则 $P$ 和 $Q$ 的析取也是命题，记为"$P \vee Q$"读作"$P$ 或 $Q$"。$P \vee Q$ 为假，当且仅当 $P$ 和 $Q$ 均为假。析取的定义也可以用表 2.3 给出。

表 2.3 析取的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

【例 2.4】 分析以下语句中的联结词。

(1) 小张或小王是三好学生。

(2) 电影院中有 400 或 500 名观众。

(3) 今天下午 3:00，我在教室或阅览室。

解 语句(1)可表达成"小张是三好学生"和"小王是三好学生"两个原子命题的析取。所以语句中的"或"是命题联结词"$\vee$"。

语句(2)中的"或"不是析取联结词。该语句真正表达的意思是说，电影院里的观众人数 $n$ 在 400～500 之间：$400 \leqslant n \leqslant 500$。实际人数可能是 400，401，402，…，499，500 人中的某一个值。

如果表达成如下复合命题：

(4)电影院中有 400 人或电影院里有 500 人。

显然与原来的意义就不一样了。因此，自然语言中的"或"除作为语句联结词之外，另一种用法是表示对象的一个大致的范围。

语句(3)的"或"虽然是一个命题联结词，但是与我们先前定义的析取并不一样。因为在下午 3:00 这一时刻，"我"不可能既在教室里又在阅览室里。如果我们将原先定义的"$\vee$"称作"可兼或"，那么，语句(3)中的或称为"不可兼或"，用"$\overline{\vee}$"表示。表 2.4 定义了不可兼或。

定义 2.8 条 件 设 $P,Q$ 是命题，则 $P \rightarrow Q$ 称为条件命题。读作"如果 $P$，则 $Q$"。$P \rightarrow Q$ 为假，当且仅当 $P$ 为真，$Q$ 为假。条件的定义也可以用表 2.5 给出。

表 2.4　不可兼或的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \bar{\vee} Q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

表 2.5　条件的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

在复合语句 $P \to Q$ 中，$P$ 称作前件，$Q$ 称作后件。

自然语言里，有多种措辞与 $P \to Q$ 对应：

(1) $P$ 是 $Q$ 的充分条件。

(2) $Q$ 是 $P$ 的必要条件。

(3) $Q$，如果 $P$。

(4) $P$ 仅当 $Q$(仅当 $Q,P$)。

在表 2.5 中，后两组指派的结果与我们的预期相吻合。但前两组的指派所得结果常常令人困惑。语句“如果工具齐全，我们今天完成工程”。当工具齐全，我们今天完成了工程时，该语句是真自然没有问题，即我们履行了承诺。当工具齐全而今天我们没有完成工程，则语句为假也不会引起异议，因为我们违约了。可是，当工具不齐全的情况下(前件为假)，有两种情况：我们在今天完成了工程（后件为真）或没有完成工程（后件为假），我们是守约的（上面语句为真）还是违约的(语句为假)呢？为消除二义性，我们是这样定义的：当一个条件命题 $P \to Q$ 的前件 $P$ 为假时，不论后件 $Q$ 为真或为假，$P \to Q$ 总是真的。这叫做善意推定。

【例 2.5】 若函数 $f(x)$在区间$(a,b)$上有导数，则 $f(x)$在$(a,b)$上连续。

这是一真命题。

【例 2.6】 你将一事无成，除非你努力学习。

解　设 $P$：你努力学习。

　　$Q$：你将一事无成。

于是原语句可符号化成

$$\neg P \to Q$$

【例 2.7】 下面是一些有微妙差异的语句。

(1) 我承认它，除非太阳从西方升起。

(2) 我不承认它，除非太阳从西方升起。

(3) 如果太阳从西方升起，我承认它。

解　设 $P$：太阳从西方升起。

　　$Q$：我承认它。

于是以上三语句符号化后成为

(1) $\neg P \to Q$

(2) $\neg P \to \neg Q$

(3) $P \to Q$

因为 $P$ 是假的，所以 $\neg P$ 是真的。这样就清楚了，语句 (1)表示了‘我’对某事物的坚决肯定，语句 (2)表示对某事物的坚决否定；两种情况下，观点都是明确的。可语句 (3)就不同了，因为他的前件 $P$ 是假的，所以，无论‘我’是否承认某事物，该语句总是真的。看来，一个观点模棱两可或者蓄意诡辩的人，用一个假的前件来表明自身的看法时，我们要特别注意。

**定义 2.9** 双条件 设 $P, Q$ 是命题，则 $P \rightleftarrows Q$ 称为双条件命题。读作“$P$ 当且仅当 $Q$”。$P \rightleftarrows Q$ 为真，当且仅当 $P, Q$ 同时有相同的真值(同时为真，或同时为假)。双条件的定义也可以用表 2.6 给出。

表 2.6 双条件的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

自然语言中有多种措辞与 $P \rightleftarrows Q$ 对应。

(1) $P$ 即 $Q$.

(2) $P$ 与 $Q$ 是等价的。

(3) $P(Q)$是 $Q(P)$的充分且必要条件。

**【例 2.8】** 符号化以下语句。

(1) 我上街，当且仅当你上街去。

(2) 函数 $y=f(x)$在 $x=a$ 处连续的充分必要条件是：$f(x)$在 $x=a$ 的邻域$(a-\delta, a+\delta)$上有定义，且$\lim f(x)=f(a)$，其中 $\delta>0$。

(3) $1+1=2$，当且仅当雪是黑的。

解答留给读者完成。

## 2.2.2 命题逻辑中联结词的最小集

上面定义了五种命题逻辑演算中常用的联结词。但除了“否定”之外，其余四种并非都是必不可少的。事实上，稍后我们学习了命题公式的等价性之后就会明白这一点。通常，只用两种联结词 $\{\neg, \wedge\}$或者$\{\neg, \vee\}$就可以表示所有我们定义过的联结词组成的任何命题公式，并有完全相同的结果。这个联结词的最小集也称为完全集。

若选择联结词集是 $\{\neg, \vee\}$，那么

$P \wedge Q$ 也可表示为 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$

$P \to Q$ 可表示为 $\neg P \vee Q$

$P \rightleftarrows Q$ 可表示为 $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

一般情况下，所有联结词和括号在命题公式中的优先作用次序是：

1. 在存在括号的情形下，命题公式在同一层次的括号内的那些部分（称子式）运算优先次序相同。内层括号优先于外层。

2. 在无括号情况下，联结词的优先次序按 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftarrows$ 递减。

例如在 $(W \rightarrow R) \wedge (S \vee (\neg A \rightleftarrows Q))$ 里，按以上规则先后起作用的联结词是 $\neg$，$\rightleftarrows$，$\rightarrow$，$\vee$，$\wedge$（由于处于同一层括号的关系，$\rightarrow$ 和 $\vee$ 的次序也可相反）。

## 2.3 命题的合式公式

上一节讨论的是用联结词生成新的、最简单的命题公式的问题。还可以由这些命题公式，通过联结词产生更复杂的公式。这一节要给出怎样的公式在命题逻辑演算下是有效的，即合式公式的定义。

### 2.3.1 合式公式

**定义 2.10 命题演算的合式公式(wff)** 合式公式是按以下规则由命题标识符加括号和联结词构成的一个符号串：

(1) 单一的命题变元 $P, Q, \cdots$ 等是 wff。

(2) 若 $P$ 是一个 wff，那么 $\neg P$ 也是 wff。

(3) $P, Q$ 均是 wff，则 $(P \wedge Q)$，$(P \vee Q)$，$(P \rightarrow Q)$，$(P \rightleftarrows Q)$ 也都是 wff。

(4) 一个符号串是一个 wff，当且仅当它可有限次地引用以上(1)(2)(3)各步骤生成。

由此可知，

$(\neg P \wedge Q)$，$\neg(P \rightarrow Q)$，$(((Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$ 都是合式公式，而

$$\neg(P, (Q \rightarrow S) \vee R), PQ \rightarrow R$$

都不是 wff。

为了便捷起见，我们约定，以后一概省略最外层的括号，并将"合式公式"简称为"公式"。

### 2.3.2 语句的符号化

把一个由自然语言描述的命题用符号公式表达出来以避免二义性就是语句符号化。

对一个合式公式进行指派后，就是一个复合命题。或者说，任一复合命题都可通过对某一合式公式所作的指派得出。所以，合式公式的规则自然也是判断一复合命题有效的标准。这在语句符号化(语句翻译)时特别有用。

【例 2.9】 符号化语句"今天下午 3:00，我在教室或在阅览室"。

解　设 $P$：今天下午 3:00，我在教室里。

　　$Q$：今天下午 3:00，我在阅览室里。

语句被符号化为：

$$P \vee Q$$

为避免引入过多的联结词，我们也可翻译成

$$\neg(P \rightleftarrows Q)，或 (\neg P \rightleftarrows Q)，或 (P \rightleftarrows \neg Q)$$

稍后，我们就会明白这样做的理由。

【例 2.10】 翻译语句"晚会上，她唱歌或跳舞"。

解　设 $P$ 晚会上,她唱歌。

$Q$ 晚会上,她跳舞。

上述语句翻译成

$P \vee Q$ 或 $Q \vee P$

这里用了可兼或是合理的。因为整个晚会期间，她可能既唱了歌，也跳了舞。

注意 语句‘ 晚会上,她先唱歌,而后又跳了舞 ’就是一个原子命题,是与本例不同的。

【例 2.11】　将语句‘ 小张成绩好,待人也好 ’符号化。

解　设 $A$ ：小张成绩好。

$B$：小张待人好。

语句被翻译成

$A \wedge B$ 或 $B \wedge A$

例 2.10 和例 2.11 说明:合取和析取都是满足“ 可交换 ”规律的。虽然这从语义上讲得通，但我们宁肯认为这是由形式语言的语法规定的，正如前面提到的“ 善意推定 ”是为规避歧义而由语法定义一样。

【例 2.12】　语句“ 如果你和他不都固执已见的话，就不会发生不愉快了 ”。

解　设 $A$ :你固执。

$B$ :他固执。

$C$ ：你和他发生不愉快的事。

则语句符号化为

$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg C$

或者　$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg C$

【例 2.13】　翻译“ 如果你和他都不固执已见的话，不愉快就不会发生了 ”。

解　沿用上例的标识符，翻译成

$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$

或者　$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg C$

读者要细细体味以上二例的区别。

## 2.4　真值表、永真式和永假式

### 2.4.1　真值表

有时我们也用标识符表示一个合式公式。如 $A$ 表示一个合式公式,它含有 $P_1, P_2, \cdots, P_r$ 等 $r$ 个原子变元。于是可用 $A(P_1, P_2, \cdots, P_r)$ 表示这个公式。对它进行一个指派，即对 $P_1$, $P_2, \cdots, P_r$ 中的每一变元均指派一个或真或假的值，那么公式 $A$ 就具有一个确定的真值。对一个有 $r$ 个变元的公式而言，可能的不同指派有 $2^r$ 个。将所有这些不同指派以及相应公式的真值以表格形式给出就是它的真值表。

**定义 2.11**　对合式公式的指派设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_r)$是 wff。对其中每一原子变元均以一个命题(真值)取代之，使之成为一个复合命题。这样的一次替代，叫做对公式 $A$ 的一次真值指派。

以下是一些命题公式的真值表。

【例 2.14】 给出$\neg P\vee Q$的真值表。

解　见表 2.7。

表 2.7

| $P$　　$Q$ | $\neg P$ | $\neg P\vee Q$ |
|---|---|---|
| F　F | T | T |
| F　T | T | T |
| T　F | F | F |
| T　T | F | T |

注意该公式与条件命题 $P\rightarrow Q$ 有相同的真值表(参见表 2.5)。

【例 2.15】 给出$\neg(P\rightleftarrows Q)$的真值表。

解　见表 2.8。

表 2.8

| $P$　　$Q$ | $P\rightleftarrows Q$ | $\neg(P\rightleftarrows Q)$ |
|---|---|---|
| F　F | T | F |
| F　T | F | T |
| T　F | F | T |
| T　T | T | F |

同样注意该公式与“不可兼或”$\bar{\vee}$的真值表完全一样(参见表 2.4)。

【例 2.16】 给出 $P\vee(\neg P\vee Q)$的真值表。

解　见表 2.9。

表 2.9

| $P$　　$Q$ | $\neg P\vee Q$ | $P\vee(\neg P\vee Q)$ |
|---|---|---|
| F　F | T | T |
| F　T | T | T |
| T　F | F | T |
| T　T | T | T |

我们看到对公式的任何真值指派，公式的真值全部为“真”。

【例 2.17】 给出公式$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge\neg Q)$的真值表。

解　见表 2.10。

表 2.10

| $P$　　$Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P\wedge\neg Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge\neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F　F | T | T | T | F | F |
| F　T | T | F | F | T | F |
| T　F | F | T | F | T | F |
| T　T | F | F | F | T | F |

该公式对所有真值指派都取“假”为真值。

### 2.4.2 永真式和永假式

命题公式可以分成永真式、永假式和可满足的三类。

**定义 2.12** 设 $A$ 是 wff。$A$ 是永真式，当且仅当对 $A$ 的任何真值指派，其真值均为 T。永真式也称重言式或逻辑真理。

永真式用记号“**T**”表示。为书写方便，常不用黑体，就记为“T”。

从以上真值表 2.9 可知，公式 $P\vee(\neg P\vee Q)$是永真式。

**定义 2.13** 设 $A$ 是 wff。$A$ 是永假式，当且仅当对 $A$ 的任何真值指派，公式的真值均为 F。永假式也称矛盾。

永假式用记号“**F**”表示。为书写方便可写作“F”。

表 2.10 对应的公式$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge\neg Q)$就是一个永假式。

**定义 2.14** 设 $A$ 是命题公式。$A$ 是可满足的，当且仅当它不是永假式。

有时，我们需要用一个或多个公式，去置换某一公式中的一个或多个原子变元。如，公式

$$A: P\rightarrow\neg Q$$

当用公式$(W\vee Q)$置换 $P$ 后得到一个新的公式

$$B: (W\vee Q)\rightarrow\neg Q$$

我们称 $B$ 是 $A$ 的置换例式。若以公式$(P\wedge Q)$置换 $A$ 中的 $Q$，则得另一置换例式

$$C: P\rightarrow\neg(P\wedge Q)$$

再若以$(W\vee Q)$置换 $P$，同时以$(P\wedge Q)$置换 $Q$，则产生公式

$$D: (W\vee Q)\rightarrow\neg(P\wedge Q)$$

公式 $D$ 是 $A$ 的置换例式，但公式

$$E: (W\vee(P\wedge Q))\rightarrow\neg(P\wedge Q)$$

不是 $A$ 的置换例式。因为这是先用$(W\vee Q)$置换 $A$ 中的 $P$，得到 $B$ 之后，再以$(P\wedge Q)$置换 $B$ 中的 $Q$ 产生的。

另外 $P\rightarrow(\neg J\vee R)$也不是 $A$ 的置换例式。因为它用$(\neg J\vee R)$置换了$\neg Q$，但$\neg Q$不是原子变元。

**定义 2.15** 公式 $B$ 是 $A$ 的一个置换例式，当且仅当 $B$ 是通过以下规则由 $A$ 生成的：

1. 若 $A$ 中某一原子变元 $P_i$ 被公式 $S$ 置换，则 $A$ 中出现的所有同一变元 $P_i$ 也被 $S$ 置换。
2. 若 $A$ 中若干原子变元 $P_1,P_2,\cdots,P_i$ 分别被公式 $S_1,S_2,\cdots,S_i$ 置换，则这种置换必须是同时进行的。

以上第 2 条，实际上意味着各原子变元间是相互独立的。即任一变元的置换不依赖别的变元的置换。这一点很重要。

一般的置换例式没有什么意义。但永真式的任何置换例式仍是永真的；永假式的置换例式是永假的。

以永真式 $P\vee\neg P$ 为例，它的以下各置换例式都是永真式。

$(P\rightarrow Q)\vee\neg(P\rightarrow Q)$

$((P\wedge Q)\rightarrow R)\vee\neg((P\wedge Q)\rightarrow R)$

## 2.5 公式的等价和蕴含

设合式公式的全体由集合 $C$ 表示。那么，$C$ 的无限个公式当中，某些公式之间是否存在着某种联系呢？答案是肯定的，其中最重要的是等价关系和蕴含关系。

### 2.5.1 公式的等价

**定义 2.16** 设公式 $A$ 和 $B$ 中所有的变元是 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。若公式 $A, B$ 在上述 $n$ 个变元有相同值的任意两组指派下，总是有相同的真值，则称公式 $A$ 与 $B$ 是等价的。记为 $A \Leftrightarrow B$。

下面就是等价的例子。

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
2. $(P \wedge \neg P) \vee Q \Leftrightarrow Q$
3. $(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow Q \wedge \neg Q$

上述第 2 个等价关系中，两公式所含变元并不完全相同。但只要它们共同包含的变元 $Q$ 有相同的真值，它们的真值就相等（就等于 $Q$ 的真值）第 3 个等价关系则表示了两个无共同变元的公式，但用等价的定义来判断，他们的真值永远相同（是 F），所以也是等价的。

有多种证明公式等价的方法。用真值表直接通过定义来证明，是最基本的方法。

【例 2.18】 试证明以上第 2 个等价关系。

证明　见表 2.11 所示。

表 2.11

| $P$　　$Q$ | $P \wedge \neg P$ | $(P \wedge \neg P) \vee Q$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| F　F | F | F | F |
| F　T | F | T | T |
| T　F | F | F | F |
| T　T | F | T | T |

我们将两公式的真值表按同一指派所得结果列出在同一行上的方法，清楚地看出它们是等价的。证完。

【例 2.19】 试证 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 是等价的。

证明　列出该两公式的真值表 2.12 如下：

表 2.12

| $P$　　$Q$ | $\neg P$ | $Q$ | $\neg P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|
| F　F | T | F | T | T |
| F　T | T | T | T | T |
| T　F | F | F | F | F |
| T　T | F | T | T | T |

上表中最后两列完全相同。证完。

【例 2.20】 试证明 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow P\rightleftarrows Q$。

证明 列出真值表 2.13 如下。

表2.13

| $P$ $Q$ | $P\rightarrow Q$ | $Q\rightarrow P$ | $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$ | $P\rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|---|---|
| F F | T | T | T | T |
| F T | T | F | F | F |
| T F | F | T | F | F |
| T T | T | T | T | T |

以上两公式的真值表完全相同，根据定义，他们是等价的。证完。

由以上等价的基本定义，可得出它的另一个本质与它一致的定义。

定理 2.1 公式 $A\Leftrightarrow B$,当且仅当 $A\rightleftarrows B$ 是永真式。

用“等价”的基本定义和双条件的定义不难证明它。证明留给读者。要强调的是“$A\Leftrightarrow B$”是一个命题,“$A$ 与 $B$ 是等价的”。而‘$A\rightleftarrows B$”仅仅是一个公式。当且仅当命题‘$A\rightleftarrows B$ 是永真式”成立时,$A\Leftrightarrow B$ 成立。换个角度说，当我们表述“$A\Leftrightarrow B$’时,是断言有两个公式 $A$ 和 $B$,他们有等价的关系，但‘$A\rightleftarrows B$”是一个用联结词连接成的复合命题公式，它不是一个断言或命题。

综上所述,语句‘$A\Leftrightarrow B$’和语句‘$A\rightleftarrows B$ 是永真式’是一回事,而‘$A\Leftrightarrow B$”与“$A\rightleftarrows B$’不是一回事。

我们将经常要用到的一些基本等价关系列出在表 2.14 中，大家要熟记。

表 2.14 常用的基本等价关系

| | | |
|---|---|---|
| $P\wedge P\Leftrightarrow P$ | $P\vee P\Leftrightarrow P$ | (1)幂等律 |
| $\neg\neg P\Leftrightarrow P$ | | (2)对合律 |
| $(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$ | $(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$ | (3)结合律 |
| $P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$ | $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$ | (4)交换律 |
| $P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ | $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$ | (5)分配律 |
| $P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$ | $P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$ | (6)吸收律 |
| $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ | $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$ | (7)摩根律 |
| $P\wedge T\Leftrightarrow P$ | $P\vee F\Leftrightarrow P$ | (8)同一律 |
| $P\wedge F\Leftrightarrow F$ | $P\vee T\Leftrightarrow T$ | (9)零壹律 |
| $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$ | $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$ | (10)否定律 |
| $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$ | | (11) |

从等价的定义可推知等价关系的三个初等性质：

1. 若 $A$ 是合式公式,则 $A\Leftrightarrow A$(自反性)。
2. 若 $A,B$ 是合式公式,$A\Leftrightarrow B$,则 $B\Leftrightarrow A$(对称性)。
3. 若 $A,B,C$ 是合式公式,$A\Leftrightarrow B,B\Leftrightarrow C$,则 $A\Leftrightarrow C$(传递性)。

在化简公式或证明公式等价时，经常要用另一公式对一个公式的某一子公式进行替换。

因此，我们先给出子公式的定义：

**定义 2.17** 设 $A$ 是合式公式。$X$ 是 $A$ 中的一个子符号串，若 $X$ 是合式的，则称 $X$ 是公式 $A$ 的子公式。

于是有关于替换子公式的一个定理。

**定理 2.2** 设 $A$ 是 wff，$X$ 是 $A$ 的一个子公式。此外，$C$ 是一个 wff，且 $C \Leftrightarrow X$，则以 $C$ 代换 $A$ 中的 $X$ 得到的新公式 $B$ 是与 $A$ 等价的。

该定理的证明可在书后参考文献[2]中找到。

当公式包含较多的原子变元时，用真值表证明公式之间的等价性是一件很繁冗的事。因为对有 $n$ 个变元的公式来说，它的真值表有 $2^n$ 行。这时，我们可以结合本章 2.4.2 小节中讨论过的置换例式和这里的定理 2.2来证明等价关系。

下面就是这方面的几个例子。

**【例 2.21】** 试证 $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$。

证明

1. 先证 $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$

首先，由定理 2.1 可知，表 2.14 所列的每一个等价式，对应有一个相应的永真式。如 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，则有永真式 $(P \to Q) \rightleftarrows (\neg P \vee Q)$。所以表 2.14 实际上给出了同样数目的永真式。再回忆 2.4.2 小节中讨论过的对永真（假）式的任何置换例式仍是永真（假）式的事实，所以我们现在可以补充说：在两个等价的公式中，以相同的公式置换它们相同变元所得的两置换例式仍然是等价的。于是，

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \to (\neg Q \vee R)$$

（以 $Q$ 置换表 2.14的式(11)中的 $P$，同时以 $R$ 置换 $Q$ 得 $Q \to R \Leftrightarrow \neg Q \vee R$。并以 $\neg Q \vee R$ 代换 $P \to (Q \to R)$ 中的等价子式 $Q \to R$）

$$P \to (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$$

（以 $\neg Q \vee R$ 置换表 2.14的式(11)中的 $Q$）

$$\neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$

（在表 2.14 的式(3)中，以 $\neg P$ 置换 $P$，$\neg Q$ 置换 $Q$）

$$(\neg P \vee \neg Q) \vee R \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R$$

（在 $(\neg P \vee \neg Q) \vee R$ 中，以等价子式 $\neg (P \wedge Q)$ 代换 $\neg P \vee \neg Q$）

$$\neg (P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$$

（对表 2.14 的式(11)作置换例式：$(P \wedge Q)$置换 $P$。同时以 $R$ 置换 $Q$）

对以上五个等价式，先后应用 4 次等价的传递性就可得到题中前两式等价的结论。

2. 再证 $(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \to R &\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\
&\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee R \\
&\Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \\
&\Leftrightarrow Q \to (\neg P \vee R) \\
&\Leftrightarrow Q \to (P \to R)
\end{aligned}$$

【例 2.22】 试证$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow R$

证明

$$
\begin{aligned}
\text{左式}&\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))\\
&\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\vee P)\wedge R)\\
&\Leftrightarrow((\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)\\
&\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)\\
&\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((P\vee Q)\wedge R)\\
&\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q))\wedge R\\
&\Leftrightarrow(\neg T\vee R\\
&\Leftrightarrow R
\end{aligned}
$$

【例 2.23】 试证$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$是永真式。

证明

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee\neg(\neg Q\vee\neg R)))\vee\neg(P\vee Q)\vee\neg(P\vee R)\\
&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\\
&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge((P\vee Q)\wedge(P\vee R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\\
&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\wedge R))\\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

最后一步，是用$(P\vee Q)\wedge(P\wedge R)$置换$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$里的变元$P$得出的。

### 2.5.2 公式的蕴含

蕴含是一种较等价更为普遍的关系。

定义 2.18 设公式$A$和$B$中所有的变元是$P_1,P_2,\cdots,P_n$。若公式$A,B$在上述$n$个变元有相同值的任意两组指派下，当$A$为真时$B$也必定为真，则称$A$蕴含$B$。记为“$A\Rightarrow B$”。

以下是一些蕴含的例子。

1. $P\Rightarrow P\vee Q$
2. $R\Rightarrow(\neg P\vee P)$
3. $(\neg P\wedge P)\Rightarrow R$
4. $P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P\vee Q$

其中，式 2 中的$\neg P\vee P$是永真的，由蕴含定义可知：任何公式蕴含永真式。式 3 中的$\neg P\wedge P$是一永假式，所以任何公式被永假式所蕴含。而式 4 中的两公式是等价的，但确实他们中的任一个都蕴含另一个，即一个等价式实际上隐含两个蕴含式。

定理 2.3 公式$A$蕴含$B$，当且仅当$A\rightarrow B$是一个永真式。

像定理 2.1 一样，我们要分清$A\Rightarrow B$是一命题，而$A\rightarrow B$只是一个公式。

证明一个蕴含关系$A\Rightarrow B$，可先假设$A$为真，然后推出$B$必为真。例如，要证$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$，可设$P\wedge(P\rightarrow Q)$为真，于是有$P$为真和$P\rightarrow Q$为真。最后可知$Q$必为真。

表 2.15 是一些基本的蕴含关系。