高职高专计算机系列规划教材

离 散 数 学

（第 2 版）

马叔良　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

离散数学和微积分不同，离散数学是以离散对象为研究对象，是计算机专业和其他一些工程专业的数学基础课程。本教材包含了数理逻辑、集合论、数函数和递推关系、图论、代数系统及布尔代数等主要内容。

本教材注重理论的系统性和准确性，并有很多例题和习题。特别重视理论难点的诠释，叙述通俗易读。

本书不仅适合作为教材供高职高专计算机专业或其他工程类专业学生学习，也可以作为对离散数学有兴趣的读者自学使用。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/马叔良主编. —2 版.—北京：电子工业出版社，2004.6
高职高专计算机系列规划教材

ISBN 7-5053-9978-0

Ⅰ.离…　Ⅱ.马…　Ⅲ.离散数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 053627 号

责任编辑：程超群
印　　刷：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1 092　1/16　印张：13　字数：330 千字
印　　次：2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：6 000 册　　定价：17.00 元

前　　言

面对信息技术日新月异的发展，通信和计算技术日益深入到我们每一个人的生活和工作中来。近年来，数字地球、3G手机、xDSL技术、视频通话、远程诊疗、CS游戏、数码相机、数码摄像、非线性编辑……数不清的新技术一股脑地涌入我们的视野。就在笔者撰写本书时，媒体报道了嗅觉又成为多媒体的一个新元素（如“气味邮件”）。人们普遍面临着知识不断更新的需求。而作为计算机科学、微电子科学和其他相近学科专业的学生，更是必须深入学习和掌握计算机的基本理论和知识，了解当今信息技术最新发展的趋势，为今后的工作奠定坚实的基础。

数学作为一切自然学科的基础是不言而喻的事实，只是不同的学科领域更加密切地依重数学的某一些分支而已。计算机科学则是以“离散数学”作为主要的研究工具。一是因为目前使用最广泛的各种架构的机器都是所谓“数字模式”的，即这种机器的内部有且仅有两种不同的信息元，在硬件内用高、低电平或者介质的不同磁化方向或晶相等加以记录，数学上用“离散量”0和1对这两种信息元加以描述（抽象的对应物）。二是因为当今通过计算机运算的绝大多数课题，都是基于若干离散对象之间的种种联系，即使是诸如求某一连续函数的积分这样的问题，由计算机来处理时，仍然要将连续函数做离散化处理，即所谓数值分析方法。三是因为计算机系统本身就是一个有限结构或有限离散结构。

本书是为计算机科学等专业的学生写的一本离散数学基础教材。理论部分取材于数学的几个与计算机学科联系紧密的理论分支，并且在不致与其他课程内容重复的宗旨下，尽可能地给出了一些运用数学理论解决专业问题的实例。

我们认为，同一门课程，专科学生用的教材在介绍其基本概念、术语和基本理论方面，同样需要和本科教材一样做到严缜性和系统性。因为这些概念、术语和基本理论构成离散数学的理论体系，是准确理解和掌握离散数学的基石。本教材正是基于这样的理解来安排教学内容的。虽然教材的各章内容取材于若干数学分支，通过仔细的考虑安排了一个合理的次序，使之前后呼应，并以数理逻辑为论证工具贯穿全书，希望借以培养学生的逻辑思维能力。尽管如此，我们还是不打算使本书包含离散数学的所有内容。本书省略了数值分析、组合学、概率等理论的内容，这主要是考虑到学生在他们不同阶段的学习中会涉猎这些知识。

学习离散数学并非必须以数学分析等其他高等数学的知识作为准备。只要有一个勤于思考、善于分析问题的好习惯就行。本教材的很多专题都是从日常生活问题引出的，并有大量的例题和练习，行文也力求通俗。本书也可供希望了解离散数学内容的读者自学之用。本书配有电子教案和习题解答，可到电子工业出版社教育资源网（http://edu.phei.com.cn）免费下载。

本次修订对上一版中存在的一些问题和易引起混淆的符号进行了修正，对其中的难点重新给出了更为清晰、通俗的阐述，使之方便自学的读者使用。

本教材是根据中国计算机学会高职高专教育学组关于编写“十五”高职高专计算机专业主干课程教材的精神编写的系列教材之一，适合计算机专业和其他电子、通信专业的教学之用。本教材包含了供读者进一步研修离散数学或其中部分专题的较全面的基础知识。

本教材由马叔良老师主编，顾豫、田立炎和周良英老师先后参加了编写。

我要特别感谢北京大学力学系陈耀松教授和马瑜教授，他们耐心地审阅了本书并提供了许多极有价值的意见。

在此，我还要感谢我的女儿马谨，对她说一声“谢谢”，因为是她花去了大量的业余时间完成并完善了本书的所有图稿。

书稿一旦付梓，几乎总会留下几许遗憾。对本书可能存在的不足或疏漏之处，竭诚希望读者和专家斧正。作者当竭力从速改正，自不敢有误读者。

马叔良

2004 年 4 月于苏州

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　离散数学的研究对象

“离散数学”是一门相对于“连续数学”而命名的数学分支。大家都知道，数学分析和复变函数是以函数为主要研究对象的。在那里，函数这一概念是指一个（或多个）连续变量和另一个连续变量之间的对应关系，连续变量在一个确定的范围内变化（取值）。离散数学中也研究函数（和关系），可是一般而言，这里主要讨论的是“离散量”的结构及其对应关系。

所谓“离散量”（或离散对象）是一个很普遍的概念，一般来说一个离散变量可取到有限个或无限可列*个值。这正是与计算机本身结构和用计算机可处理（解决）的问题的有限性及对象的离散性相一致的。

下面是现实世界中一个可以用计算机处理（运算）的问题被求解的线索，为我们提供了离散数学处理这类问题的数学方法的最初印象。例如，一个旅行社拟新辟一条旅游线路：从旅行社所在城市出发，巡回其余 n-1 个城市（或景点），最后返回出发地。当然，旅行社必须考虑它的经济效益和游客一般不愿在一次旅行中两次光顾同一景点的愿望。那么，它应该如何设计它的这条旅游线路呢？诚然，如果在这条线路上存在不太多的景点时，人们并不一定要依赖计算机来解决这个问题。他们可以在纸上画出 n 个小圆圈（或点）表示上述这 n 个城市或景点，再用连接两个小圆圈的线段（直线段或曲线段都无所谓）表示该两端点间的一条交通线。现在，剩下的问题就是看你能否用一枝铅笔，从代表起点的小圆圈开始，沿着图上已有的线段，将其余 n-1 个小圆圈每个划过一次且仅划过一次并最后回到起点了。也许，旅行社的工作人员这样试了不多的几次就找到了一条符合要求的线路。但是，也许他们用掉了很多很多纸，甚至于磨掉了一枝铅笔也没能设计出这样的线路来！因为，很可能这样的线路根本就不存在。而离散数学的理论对这个问题很可能只需一个很简单的计算就知道这条路线是不存在的了（这是一个所谓的哈密尔顿问题，将在第 5 章图论中讨论）。

回过去再看一看这个旅游线路的问题，它的解决（求得解或是证实无解）过程经过了以下几个阶段：首先是将 n 个城市和连接它们的交通线绘制成一幅由点和线组成的图。这是人们解决问题的第一步抽象，或者说是建立待解问题的“数学模型”。它将现实世界中的对象即城市和交通线抽象成了小圆圈和线段这样一些离散对象。这是解决问题的本质的一步（至少对旅行线路这一特殊问题是本质的）：从每一个城市直接可抵达的有哪些城市。完全不必关心诸如某一城市的人口、气候等其他与本问题无关的属性。有了对现实世界正确的完整的（对需要解决的问题是充分的）抽象，第二步就是将现实问题转化为一个数学问题。最后的步骤就是用数学方法（和理论）求解问题的答案或证明问题无解。

通过以上这个简单例子，我们试图向读者说明两件事：一是数学（当然也包含离散数学）的抽象为什么常常可以用来解决不同类型的实际问题；二是某些离散对象的问题，必须被正确地抽象为一个离散数据结构及其关系的模型。解决这类问题的有力工具无疑非离散数学莫属了。

---

* 集合{0,1,2,⋯}就是我们最熟悉的无限可列个元素的集。

1.2　离散数学的主要内容

离散数学作为一门大学课程，在国外最早大约是 20 世纪 70 年代的事了。当时，一些主攻计算机科学的学生感到自己的数学基础不足以很好地学习和解决本专业的许多问题，于是就有一些计算机科学家根据自身对计算机科学的理解，与一些数学家一起圈定了一些他们认为对计算机科学是必需的数学专题，结合计算机科学中的一些实例编著了一些主要是命名为“离散数学结构和方法”或“离散数学基础”之类的书籍，开设相应的课程供大学里学习计算机专业和其他一些相关工程专业的学生选修。由于反映很好，渐渐在各计算机专业中，将“离散数学”作为必修课来开设。我国大约是在 20 世纪 80 年代初期，从翻译国外离散数学专著开始，逐渐由各著名工科院校的教师编写了一些适合我国教学情况的离散数学教材，并在计算机科学系中开设了相应的课程。

如上所述，由于各专家主攻计算机的方向和他们对计算机教学的理解不尽相同，因此，在“离散数学”名下的内容也不完全一样。不过，经过这些年的实践，对于计算机专业所需的离散数学内容渐渐有了比较统一的认识，即包括四大部分：数理逻辑、集合论和关系、图论初步及代数系统。本书也以这些内容为主要架构，同时添加了诸如离散数函数和递推关系等很有用的内容，基本上已涵盖了适合计算机专业所需的数学内容。

1.3　学习离散数学的方法

离散数学是计算机科学系所有专业的基础数学课程。一方面有其实用性（应用数学的特征），另一方面有其本身作为数学基础课的严谨的理论性。所以，学习任何一个专题时，首先要精确严格地掌握好每一个概念和术语，正确理解它们的内涵和外延。因为公理、定理或定律的基石都是概念。只有正确地理解了概念，才能把握定理的实质，才能熟练地将公理、定理应用于解决问题。完全地、精确地掌握一个概念的好办法是首先要深刻理解概念的内涵，然后举一些属于和不属于该概念外延的正、反两方面的实例。如果对一些似是而非的例子也能辨别的话，应该说这个概念是真正被理解了。对一些重要的概念，能记住一两个实例也很管用。这对牢固掌握一个概念是很有好处的。

必须提醒读者的是，千万不要在完全理解某些概念、基本定理之前就匆忙地去做相应的习题。几乎可以肯定地说，这样做是不能学懂离散数学的，更无法去应用它。

总的说来，我们建议读者养成一种自觉的学习习惯，就是首先要掌握好基本概念和术语，在此基础上理解每一基本定理的本质，最后通过学习和借鉴书中提供的例题，独立地完成每一次作业。并且，每次作业完成之后，能自觉地归纳出其中用到的基本解题方法。

虽说离散数学是一门很抽象的课程，但是只要读者肯动脑筋思考，掌握正确的学习方法，那么一定会在以后的学习中体会到越学越轻松的感觉。一般而言，毕竟学习离散数学只需要有一定的中学数学基础就够了。

第 2 章　数 理 逻 辑

推理是人类特有的思维活动。人们在社会实践中自觉或不自觉地通过感官接受外界的消息形成所谓**表象**，同类表象的反复出现在人脑中建立起一个**概念**。概念已不再囿于个别的表象而具有一类表象的本质**属性**，这就是概念的**内涵**。反过来说，所有衍生出该概念的具有特定表象的事物（对象）组成了概念的**外延**。例如，人们在品尝了苹果、梨、香蕉等之后，将具有各种特定香味而富含营养和水分的植物果实概括为“水果”这一概念。客观世界里实际并不存在具体的一个水果，但水果这一概念却包涵了每一个苹果、梨、香蕉等。因此，我们说概念是存在于人脑里的对现实世界对象的一种抽象，它只存在于人的思维过程。而水果这一概念的外延却是由客观世界中存在的所有有水果属性的个体组成。我们可以向别人展示一只梨，并对他说：这是一只梨，它是一种水果（严格地说，他应当说这是水果中的一个）。但任何人都无法展示水果是什么。这就是说，概念存在于思维之中，而概念的外延存在于客观世界。当然，以上的叙述只是为了使大家明白概念是怎样产生而举的一个特殊例子。现实生活中还有很多“抽象的概念”，如时间、空间、数学上的点等。事实上，我们根本不可能找到一个只有位置而无大小的几何点。但是，我们照样可以完美地将所有的实数和几何上的一根有方向的直线，即所谓数轴对应起来。于是我们要对前面提到的“外延存在于客观世界”一语做一些补充说明。通常，在科学技术领域里，人们在研究某些现象时发现，必须对某些客观实体做出更为抽象的概括，摒弃客体的某些属性，张扬它的局部属性，形成一种全新的概念。这样做了，往往可将被研究事物的本质属性突现出来。例如，几何上的点就是从具有一定大小的普通的点，通过忽略其大小而强调其几何位置所得。这样做了，就使得实数理论建立在一个有形的对应物——数轴上了。不要低估了这样做的影响。从此，几何学与代数学建立起密切的联系，使得解析几何、画法几何、微积分几何得以借助分析手段长足地发展起来。所以说，“概念的外延存在于客观世界”一语的正确理解应当是：人们不可能杜撰一个根本不反映任何客观事物本质属性的概念。如果有这样的概念，那只能存在于迷信或神话中。

概念还不是人类思维的全部，**判断**是人们更具创造力的思维活动。所谓判断，就是对某些概念之间的必然联系做出的断言。判断的真实性最终只能为客观实践所证实或否定。这就是我们通常说的“实践是检验真理的惟一标准”。数理逻辑主要研究的就是如何从一组已知判断，通过所谓**有效推理**而最终获得一个全新判断的逻辑学分支。

说到有效推理，这是一组明确规定的**法则**，允许从一个或一组已知判断，得到一个新的判断。特别要强调的是：有效推理是经过反复实践认证符合客观规律的一种人类的正确思维法则。但它只保证推理本身是正确的，并不能保证推理的结果——最终得出的判断也正确。因为如果作为推理前提的判断是虚假的或局部是虚假的话，即使推理过程是有效的，我们也不能保证结论一定是正确的。我们惟一可以保证的是在正确的前提下，经过有效推理必定产生正确的结果。

逻辑学是一门研究人类思维规律的科学。由于它的普遍适用性，所以推理规则应当被表述为与任一具体的论证或学科的内容无关。这使逻辑学必须使用一种所谓**形式语言**，它是由完全定义了的概念或术语以及如何使用这些概念的语法组成。再则，为不让形式语言有二义

性，我们使用有明确定义的符号来表示形式语言中的那些概念，使得形式语言被描述成类似于数学公式的样子。因此，有时我们也称之为**符号逻辑**。

最后，提醒读者事先警惕这样一个明显的困惑，即在定义和描述无二义性的形式语言之前，我们有的只是日常生活中使用的语言（如汉语、英语等），这种语言常称之为**元语言**。元语言不乏二义性（大家都知道双关语）。用一种并非严格的自然语言来定义或描述一种精确而无二义性的语言，这种困难一开始就应充分留意。

2.1 命题

2.1.1 命题的概念

命题逻辑中的基本**语素**是**命题**。在形式语言中，如下定义的**陈述语句**是命题：

定义 2.1　命题就是在特别指定的范围、时间和空间内，具有惟一确定的真假性的陈述语句。

由于在命题逻辑中只讨论有确定真假性的陈述语句，并不关心语句本身的语义是什么，所以“语句”一词与“命题”被等价地使用。

定义 2.2　在特定的范围、时间和空间内，真实的命题具有“真”的**真假值**。反之，虚假的命题具有“假”的真假值。

命题的真假值通常简称为**真值**。真值“真”也可以用符号 T（TRUE）或 1 来表示；“假”可以用 F（FALSE）或 0 来表示。为书写方便，在不致引起混淆的情况下，T,F,1,0 也可以不表示成黑体，并以此作为本书的约定。

值得指出的是，一个命题的真值总是确定存在的（非真即假，反之也然，别无其他）。它与我们的主观感受和是否知道这个真值完全无关。

例如，有如下命题：

（1）宇宙中必然存在除人类以外的智慧生物。

人类还无法判断这个命题是真是假。但是其确实具有确定的真假性，这是肯定的。

另一值得一提的是，真值通常与论述一个命题的范围、时间和空间有关。例如：

（2）101+1=110。

这个命题在二进制计数制下是真的，在其他计数制下则为假。然而在论述命题的上下文中，通常总可以确定它是在二进制范围内给出的。

定义 2.3　除却其本身之外，它的任何局部都不是命题，这样的命题叫**原子命题**。

定义 2.4　由两个或两个以上命题通过联结词和圆括号组成的命题是**复合命题**。

“联结词”在下一节讨论。

2.1.2 命题的表示

原子命题与复合命题的共同特点是它们均有惟一的真值。在不必要研究一个命题的结构时，它们都被笼统地称为“命题”，都可以用大写的字母，如 $A, B, C, \cdots, P, Q, R$ 等表示。也可用字母加下标的方式表示不同的命题，如 $P_1, P_2, \cdots, P_i$ 就表示 i 个不同的命题。

（3）*P*：天下雪了。

这里，把符号“*P*”看成了命题“天下雪了”的等价物。这种表示命题的符号被称做**标识符**。

应该特别指出，标识符在上面都是被用来表示某一特定的命题。标识符还有一个用法，就是一个标识符并不具体代表一个命题，而是表示在它所在的位置上可以用某一确定的命题去代替它。这种替代，通常叫**指派**。如前所述，由于在命题逻辑里，一般并不关心命题的语义，只关心其真假值。所以明白地说，对一个标识符的指派，实际上就是给它一个 T 或 F 这样的真假值。

归纳一下，在上面提到的标识符第一种用法中，它称为一个**命题常量**；而第二种用法的标识符叫做**命题变量**（元）。命题变元在对其指派前不是命题，没有真值。

一个符号究竟是命题常量或者变量是不会引起混淆的，因为在它们出现的环境中均会得到说明。

在很多文献中，一个命题之前冠以一个用圆括号封闭起来的数字，并用它代表这个命题。如上文中（2）就可以用来代表命题“101+1=110”。

下面是另一些命题：

（4）上海是一个国际大都市。

（5）2010 年人类将踏上火星。

（6）哥伦布发现了美洲大陆。

（7）罗马是法国的首都。

（8）费城是一个古老的城市。

这些命题中，（4）、（6）的真值是 T，（7）的真值是 F，（5）的真值目前尚无法确定，（8）在美国这个只有 200 多年历史的国家里是真的，而对于一些有数千年文明史国家的人来说是假的（我们说过，命题的真值是在指定的范围、时间和空间中确定的）。

而下来的两个语句不是命题：

你就别去了吧。

DNA 为什么被称为生命的密码？

因为前一个语句是祈使句，后一个是疑问句。对它们讨论真假性是无意义的。

最后我们给出一个语句：

托马斯为本镇所有自己不刮脸的男人刮脸。

这是一个**悖论**。他不可能有真假值。因为托马斯这个（男）理发师，无论他是否为他自己刮脸，都与上述陈述句发生矛盾。关于悖论的规避，我们在第 3 章里给出了一个习题，在那里会对此做一些说明。

2.2 命题联结词

联结词是用来将（原子）命题联结成复合命题的一种基本语素。自然语言中也有联结词（或、和、……），通常由词或短语组成。可是它们经常产生二义性。如“他有钢笔或铅笔”，究竟是说某人只有钢笔或铅笔二者之一呢？抑或兼有二者呢？通常我们是不能肯定的。本节我们就来为逻辑联结词定义，并给予符号化。

有必要再次强调的是，以下的标识符作为命题变元使用。因此，在对一个符号表达式中

的每一个标识符指派之前，它不可能有真值，因此这种表达式不是一个命题，我们称之为**命题公式**。对一个命题公式中每一标识符均指派一个命题之后，原来的命题公式成为复合命题。这时，它有一个确定的真值。

通常，我们把对一个命题公式中的每一个变元均指派一个真值的做法，称做对命题公式的一次**指派**。因此我们说，仅当对命题公式做了指派之后，命题公式才是一个复合命题。

2.2.1 联结词的定义

定义 2.5 设 P 是一个命题，则 P 的**否定**也是命题，记为“$\neg P$”，读做“非 P”。

$\neg P$ 为真，当且仅当 P 为假。

“否定”的定义也可以用表 2.1 给出。

表 2.1 否定的真值表

P	$\neg P$
F	T
T	F

【例 2.1】 设 P：伦敦是一个多雾的城市。

那么，$\neg P$ 表示的命题是：

$\neg P$：并非伦敦是一个多雾的城市。

或者

$\neg P$：伦敦不是一个多雾的城市。

虽然以上两个自然语言的语句形式上有所不同，但它们的真值完全相同。读者从此也可看出符号化的语言是如何消除语言的二义性的。

“否定”只是对一个语句的修饰，习惯上仍称做联结词。有时也说它是**一元联结词**或**一元运算**。因为一个语句在用“否定”修饰后生成一个意义和真值完全不同的新语句。

定义 2.6 设 P, Q 是两命题，则 P, Q 的**合取**是一个新的命题，记为“$P \wedge Q$”，读做“P 与 Q”或者“P 且 Q”。$P \wedge Q$ 为真，当且仅当 P 为真且 Q 也真。

合取的定义也可以用表 2.2 给出。

表 2.2 合取的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

【例 2.2】 构造以下两个语句的合取。

P：这房子很大。

Q：2+2=4。

解 $P \wedge Q$：这房子很大且 2+2=4。

以上结果看起来很可笑，但从逻辑的语法规则来评判，它一点也没有错。事实上，它因袭了两个原子语句的真值并且有自己完全确定的真值。这反映了这样一个事实：形式语言被

表达成与所论述的内容（语义）和学科无关。在命题逻辑中，我们主要关心的只是命题的真假性。

【例 2.3】 分析以下命题中的联结词。

G：小张与小王都是三好学生。

R：小张与小王是表弟兄。

解 对于命题 G，我们可以引入两个原子命题：

A：小张是三好学生。

B：小王是三好学生。

于是，G 就可表成 $A \wedge B$。

可是对语句 R 而言，其中的“与”是两个名词“小张”、“小王”的联结词，而命题逻辑中的“与”仅仅是一种语句间的联结词，因此它不能用于名词的联结。实际上，语句 R 在命题逻辑中是原子命题，其中不含逻辑联结词“与”。

再强调一下，原子命题在命题逻辑演算中是一个最小单位，不可再细分。

定义 2.7 设 P, Q 是两个命题，则 P 和 Q 的**析取**也是命题，记为“$P \vee Q$”，读做“P 或 Q”。$P \vee Q$ 为假，当且仅当 P 和 Q 均为假。

析取的定义也可以用表 2.3 给出。

表 2.3 析取的真值表

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

【例 2.4】 分析以下语句中的联结词。

（1）小张或小王是三好学生。

（2）电影院中有 400 或 500 名观众。

（3）今天下午 3:00，我在教室或阅览室。

解 语句（1）可表达成“小张是三好学生”和“小王是三好学生”两个原子命题的析取，所以语句中的“或”是命题联结词“$\vee$”。

语句（2）中的“或”不是析取联结词。该语句真正表达的意思是说，电影院里的观众数 n 在 400～500 人之间：$400 \leqslant n \leqslant 500$。实际人数可能是 400, 401, 402, …, 499, 500 人中的某一个值。

如果表达成如下复合命题：

（4）电影院中有 400 人或电影院里有 500 人。

这显然与原来的意义就不一样了。因此，自然语言中的“或”除作为语句联结词之外，另一种用法是表示对象的一个大致的范围。

语句（3）的“或”虽然是一个命题联结词，但是与我们先前定义的析取并不一样。因为在下午 3:00 这一时刻，“我”不可能既在教室里又在阅览室里。如果我们将原先定义的“$\vee$”称做“**可兼或**”，那么，语句（3）中的“或”称为“**不可兼或**”用“$\overline{\vee}$”表示。表 2.4 定义了不可兼或。

表 2.4　不可兼或的真值表

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

定义 2.8　设 P, Q 是命题，则 $P \rightarrow Q$ 称为**条件命题**，读做“如果 P，则 Q”。$P \rightarrow Q$ 为假，当且仅当 P 为真，Q 为假。

条件的定义也可以用表 2.5 给出。

表 2.5　条件的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

在复合语句 $P \rightarrow Q$ 中，P 称做前件，Q 称做后件。

自然语言里，有多种措辞与 $P \rightarrow Q$ 对应：

（1）P 是 Q 的充分条件。

（2）Q 是 P 的必要条件。

（3）Q，当（如果）P。

（4）P，仅当 Q。

在表 2.5 中，后两组指派的结果与我们的预期相吻合。但前两组的指派所得结果常常令人困惑。来看语句“如果工具齐全，我们今天完成工程”。当工具齐全，我们今天完成了工程，那么该语句是真自没有问题，即我们兑现了保证。当工具齐全而今天我们没有完成工程，则语句为假也不会引起异议，因为我们违约了。可是，当工具不齐全的情况下（前件为假），我们在今天完成了工程（后件为真）或没有完成工程（后件为假）这两种情况，我们是守约的（上面语句为真），还是违约了（语句为假）呢？为消除二义性，我们是这样定义的：

当一个条件命题 $P \rightarrow Q$ 的前件 P 为假时，不论后件 Q 为真或为假，$P \rightarrow Q$ 总是真的。我们管这叫做**善意推定**。

【例 2.5】　若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有导数，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续。

这是一个真命题。

【例 2.6】　你将一事无成，除非你努力学习。

解

设　P：你努力学习。

　　Q：你将一事无成。

于是原语句可符号化成：

$$\neg P \rightarrow Q$$

【例 2.7】　下面是一些有微妙差异的语句。

（1）我承认它，除非太阳从西方升起。

（2）我不承认它，除非太阳从西方升起。

（3）如果太阳从西方升起，我承认它。

解　设 P：太阳从西方升起。

Q：我承认它。

于是以上三个语句符号化后成为

（1）$\neg P \to Q$

（2）$\neg P \to \neg Q$

（3）$P \to Q$

因为 P 是假的，所以 $\neg P$ 是真的。这样就清楚了，语句（1）表示了“我”对某事物的坚决肯定，语句（2）表示对某事物的坚决否定。两种情况下，观点都是明确的。可语句（3）就不同了，因为它的前件 P 是假的，所以，无论“我”是否承认某事物，该语句总是真的。看来，一个观点模棱两可，或者蓄意诡辩的人，用一个假的前件来表明自身的看法时，我们要特别注意。

定义 2.9　设 P, Q 是命题，则 $P \rightleftarrows Q$ 称为**双条件命题**，读做“P 当且仅当 Q”。$P \rightleftarrows Q$ 为真，当且仅当 P, Q 同时有相同的真值（同时为真，或同时为假）。

双条件的定义也可以用表 2.6 给出。

表 2.6　双条件的真值表

P	Q	$P \rightleftarrows Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

自然语言中有多种措辞与 $P \rightleftarrows Q$ 对应。

（1）P 即 Q。

（2）P 与 Q 是等价的。

（3）$P(Q)$ 是 $Q(P)$ 的充分且必要条件。

【例 2.8】　符号化以下语句。

（1）我上街，当且仅当你上街去。

（2）函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处连续的充分必要条件是：$f(x)$ 在 $x = a$ 的邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，其中 $\delta > 0$。

（3）1+1=2，当且仅当雪是黑的。

解答留给读者完成。

2.2.2　命题逻辑中联结词的最小集

上面定义了六种命题逻辑演算中常使用的联结词。但除了“否定”之外，其余四种并非都是必不可少的。事实上，稍后我们学习了命题公式的等价性之后就会明白这一点。通常，只用两种联结词 $\{\neg, \wedge\}$ 或者 $\{\neg, \vee\}$ 就可以等价地表示那些使用所有我们定义过的联结词组成的任何命题公式。这个最小集也称为联结词的**完全集**。