空间解析几何

何伯和

吉林大学出版社

第一章　向量空间

本章的陈述遵循从具体到抽象的原则，即在§1首先讲述我们在物理与力学中曾经遇到过的向量及其线性运算，然后在§2引入向量空间的公理化定义，于是§1与§2的关系是§1为§2提供直观背景．而§2及其以后一系列由公理导出的结论，对于§1那些具体的向量同样适用．

§1　几何向量及其线性运算

在自然现象中，有些量在取定单位以后，可以用数值来表示，例如时间、长度、质量、温度等等，而数学中的实数，便是这些量的概念的抽象．

然而在自然现象中，还有一些量，例如位移、速度、力等等，它们的性质，不仅与大小有关，而且还与方向有关，即在这一类的量里，包含有大小与方向两个要素，这样的量我们称之为向量，即我们有

定义1　在空间中一个有大小、有方向的量称为**向量**，用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等来表示．向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$，它是一个非负实数．

向量在有些书中也称为矢量或矢，向量在图形表示中常用有向量线段来表示．设用来表示向量的有向线段有起点 A，终点 B，则该向量也用记号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，如图1-1.

两个向量如果长度相等，方向相同（即平行于同一直线且方

向相同），则认为它们是相等的，如图 1-2. 因此现在讨论的是容许任意平移的有向线段，这样表示的向量也称为**自由向量**.

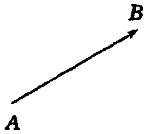

图 1-1 向量 $\overrightarrow{AB}$

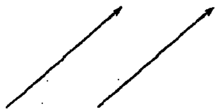

图 1-2 相等的向量

定义 2 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个向量，把 $\boldsymbol{b}$ 的起点（由于自由向量）放在 $\boldsymbol{a}$ 的终点，得到的三角形第三边所代表的向量 $\boldsymbol{c}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

如图 1-3 所示，也就是说它是一个从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量.

这个加法规则通常称为向量相加的"**三角形法则**"，与此相应的，若使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，则以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形中与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同起点的对角线，也代表 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{c}$，它称为"**平行四边形法则**"，如图 1-4.

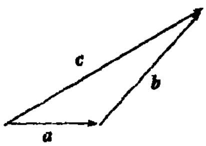

图 1-3 向量加法

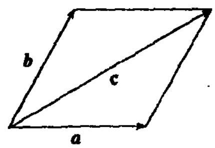

图 1-4 向量加法

关于向量的加法，有下列两条基本性质：

1° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

2° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

证明 关于 1°，根据三角形法则，由图 1-5 可见，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+$

目　　录

前 言

在新世纪来临的今天，教改又成了人们关注的话题．几十年过去了，现在虽没有必须学习前苏联的号召，但是以几何、拓扑方面教材而言，其不断变革，力图反映现代科技成就的精神，仍然值得我们参考与借鉴．

本书是在吉林大学数学系现行教材基础上，参照苏联著名拓扑学家 M. M. Постиков 在莫斯科大学数学系的教本《解析几何》的中译本（周友成译，高教出版社出版）编写的，与现行教材相比，有以下几点区别．

1．线性部分（第一章至第三章）参照扑氏的教本，把向量空间、仿射空间与欧氏空间各立一章，以示区别．用公理化方法进行定义，而把普通的几何向量及其运算的证明．作为对于公理化定义的一个验证与证明，这样做虽然似乎头绪多了一些，但是有利于以后与《泛函分析》、《线性代数》、《微分流形》等课程的衔接，而且让学生一开始即分清比如欧氏空间与欧氏向量空间之间的区别等等，是有利的．

2．二次部分（第四章至第七章），除了通常的二次曲线与二次曲面方程的化简与分类以外，还增加了极坐标系之下的圆锥曲线方程．因为在天文学中，用极坐标给出这些曲线的方程是方便的．

3．射影部分（第八章）除介绍射影平面与射影空间的有关论题以外，还引进了复几何，即复射影直线 CP^1 上的射影变换，即黎曼球面上的线性分式变换，这主要因为代数几何（如在解决 Fermert 定理）与双曲几何（如在低维拓扑）目前

都是活跃的分支，而本科生除了在解析几何课程之外，很少有机会接触到这方面的内容.

本教材在每一节的最后均附有习题，并把矩阵与行列式初步作为附录列于最后，以备不时之需. 等同学们学完《线性代数》以后，便会有更加系统与完整的了解，以收相得益彰之利.

实现本教材目的的关键是学时，本教材所需的讲授时间约在64～72学时之间. 此外讲课教师的努力与主导作用，也是实现教学目的的关键因素，原永久、谢敬然同志长期从事吉大数学系的《空间解析几何》教学工作，为此付出了辛勤的劳动. 在本教材的形成过程中，作者曾经与他们进行了有益的讨论，在此谨致谢意.

由于本人才疏学浅，教材中不妥与疏漏之处在所难免，敬望国内同仁不吝赐教.

何伯和

2001年6月

$c=d, a+(b+c)=d$，所以$(a+b)+c=a+(b+c)$.

关于2°，由图1-6可见，由四边形法则 $a+b=e$，由三角形法则 $b+a=e$，因此有 $a+b=b+a$.

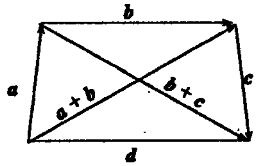

图1-5　向量加法的结合律

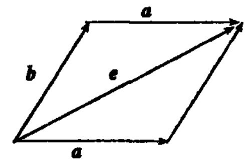

图1-6　向量加法的交换律

此外为了计算与运用的方便，我们还引进一个零向量$\mathbf{0}$．规定它的长度为零，方向任意．因此由定义2有：

3°　$a+0=a$.

有了向量的相加，便可定义向量的相减．设 a 是一个向量，若向量 a' 与 a 长度相等方向相反，则称 a' 为 a 的逆向量，记作 $a'=-a$，于是由定义，有：

4°　$a+(-a)=0$.

当然，逆向量是相互的，若 $a'=-a$，则 $a=-a'$.

定义3　设 a, b 是两个向量，则规定 a 与 b 之差为

$$a-b=a+(-b)$$

其次讨论向量与数的相乘.

定义4　一个向量 a 与一个(实)数 λ 的乘积 λa 是一个向量，它的长度等于 a 的长度乘以 $|\lambda|$，其方向当 $\lambda>0$ 时与 a 相同；当 $\lambda<0$ 时与 a 相反；当 $\lambda=0$(或 $a=0$ 时)，有 $\lambda a=0$. 因此任意.

关于数乘向量有下列三条基本性质：

5°　$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$;

6°　$(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$;

7°　$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

证明 关于 5°,若 λ 与 μ 之一为 0,结论显然成立;当 $\lambda\mu>0$,通过对于长度与方向的判定,也有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

最后若 $\lambda\mu<0$,这时若 $\lambda+\mu=0$,结论显然.反之若 $\lambda+\mu\neq0$,则在 $\lambda+\mu$, $-\lambda$, $-\mu$ 三个数中,必有两个同号,不妨设 $\lambda+\mu$ 与 $-\mu$同号,于是由上面已证的等式,有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$$

因此有$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

关于 6°,当 λ,μ 中有一个为 0 时,$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=0$, $(\mu\lambda)\boldsymbol{a}=0$,所以 $\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$.当 $\lambda\mu\neq0$,若 λ,μ 同符号,则 $\mu(\lambda\boldsymbol{a})$, $(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$ 皆与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;若 λ,μ 反号,则 $\mu(\lambda\boldsymbol{a})$, $(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$ 皆与 $\boldsymbol{a}$ 反方向,从而由数乘向量的定义可知结论成立.

关于 7°,当 $\lambda=0$,显然成立.当 $\lambda>0$,按向量相加的三角形法则,作一个 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 的图,则由相似三角形定理,有 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.反之当 $\lambda<0$,有 $-\lambda>0$,于是利用已证的等式,有

$$(-\lambda)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-\lambda)\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{b}$$

经移项有

$$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

如图 1-7.

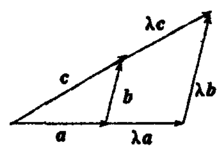

图 1-7

习　　题

1. 令$|\boldsymbol{x}|$为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度,求向量满足什么条件时,下列等式才能成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(3) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;　　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (6) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

(7) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (8) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 用平行六面体棱上的向量表示代表该六面体对角线的向量.

3. 已给向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,试在图上作出下列向量:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; (2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; (4) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

4. 证明在三角不等式中,等式成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同.

5. 证明以正 n 边形的中心为起点,顶点为终点的 n 个向量之和等于$\boldsymbol{0}$.

6. 已给任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 角平分线上的一个向量.

7. 设 ABC 为一个三角形,O 为空间的任意一点,证明等式

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$$

成立的充要条件为 O 是$\triangle ABC$ 的中线的交点(称为中点).

8. 四面体 $OABC$ 每个三角形面上的中点与第四个顶的联线称为中线.证明四面体的四条中线交于一点.

9. 证明四面体的三组相对棱中点的联线交于一点.

§2 向量空间

在建立了§1这些直观的、几何的事实以后,我们现在要把这种讨论引向更加一般的情形.即用公理化的方法来定义向量及其运算.在这个定义中,我们不问向量究竟是什么,而所要求的只是那些被称为向量的对象满足定义中的运算规则(公理)即可.以下,其成员称为向量的集合记作 $\mathscr{V}$,一切实数的集合记作 K.

定义 1 设 $\mathscr{V}$ 是其成员称为向量的某个集合. 若对于任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathscr{V}$, 有 $\boldsymbol{c}\in\mathscr{V}$ 与之相应, 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$; 对于任意 $\lambda\in K$ 与 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$, 有 $\lambda\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$, 称为 λ 乘以 $\boldsymbol{a}$ 之积, 而且对于任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathscr{V}$ 与 $\lambda,\mu\in K$, 有:

1° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

2° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

3° 存在 $\boldsymbol{0}\in\mathscr{V}$, 使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4° 存在 $-\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$, 使得 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

5° $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

6° $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$;

7° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

8° $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

则 $\mathscr{V}$ 称为 K 上的**向量空间**或**线性空间**.

由 §1 的讨论可知, 通常空间中的一切几何向量(有向线段), 在 §1 定义 2 与定义 4 之下, 满足此处定义 1 中的公理 1°~8°, 因此构成一个具体的向量空间, 以后称之为**几何向量空间**. 它给出一般向量空间理论一个具体的模型. 也是我们一切讨论的出发点与归宿.

除了以后经常要给以特别注意的几何向量空间以外, 能够成为向量空间的, 还有以下一些例子:

1. 由一个零向量 $\boldsymbol{0}$ 显然构成一个向量空间 $\{\boldsymbol{0}\}$. 为简单有时也记作 $\boldsymbol{0}$.

2. 设 X 为任意集合, $\mathscr{F}(X)$ 为定义在 X 上的一切实值函数, 于 $f,g\in\mathscr{F}(X)$, $\lambda\in K$. 令

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda(f(x))$$

其中 $x\in X$. 则容易验证 $\mathscr{F}(X)$ 中的和 $f+g$ 与数乘 λf 满足公理 1°~8°. 因此 $\mathscr{F}(X)$ 构成一个向量空间.

3. 令 $X=R$ 或数轴 R 中的一个区间，$\mathscr{L}(X)$ 为 X 上一切连续函数的集合. 则在例 2 中函数的加法与数乘定义之下，$f+g$ 与 λf 仍为连续函数，因此 $\mathscr{L}(X)$ 也是 K 上的一个向量空间.

4. 含一个未知量的一切实系数多项式，在多项式相加与数乘多项式的定义之下，是一个向量空间.

此外，一切次数不超过指定数 n 的一切多项式又构成另一个向量空间.

5. 设 n 为一任意自然数，考虑 n 个实数的序列 $(a_1,\cdots,a_n)$ 之集合 R^n. 在 R^n 中，令

$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)$$

$$\lambda(a_1,\cdots,a_n)=(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)$$

则 R^n 是一个向量空间.

在列举了以上种种具体向量空间的例子以后，我们再来看一看，由公理 $1^\circ\sim 8^\circ$，可以推出哪一些普遍成立的关于向量空间的性质. 于是有：

命题 1　设 $\mathscr{V}$ 是一个向量空间，则它有下列性质：

1. 零向量是唯一的；

2. 任意 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$ 的逆向量 $-\boldsymbol{a}$ 是唯一的；

3. 对于任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathscr{V}$，方程

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

在 $\mathscr{V}$ 中有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$；

4. 对于任意 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

5. 对于任意 $\lambda\in K$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；

6. $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

7. $\mathscr{V}$ 中任意多个向量之和与向量相加的次序无关.

证明　1) 若 $\mathscr{V}$ 中有二个向量 O_1 与 O_2，使得对于任意 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$，有

$$a + O_1 = a$$
$$a + O_2 = a$$

则对于第一式，令 $a = O_2$，有 $O_2 + O_1 = O_2$；对于第二式，令 $a = O_1$，有 $O_1 + O_2 = O_1$. 由于 $O_2 + O_1 = O_1 + O_2$（定义 1 之 2°），因此 $O_1 = O_2$.

2)若对于某个 $a \in \mathscr{V}$，有二个逆向量 $b, c \in \mathscr{V}$，即

$$a + b = 0$$
$$a + c = 0$$

则

$$b = 0 + b = (a + c) + b = (a + b) + c = 0 + c = c$$

故得证.

3)对于 $x = b + (-a)$，有

$$a + x = a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

所以 $b + (-a)$是方程之解. 反之若有另外一个 x_1，使得 $a + x_1 = b$，则

$$x_1 = (a + x_1) + (-a) = b + (-a) = x$$

因此 $x = b + (-a)$是方程的唯一解.

4)由于 $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$，两边减以 $-0a$，便有

$$0a = 0a - 0a = 0$$

5)由于 $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$，两边减以 $\lambda 0$，便有

$$\lambda 0 = \lambda 0 - \lambda 0 = 0$$

6)由于 $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = 0$，故由 a 的负向量的唯一性，有 $-a = (-1)a$.

7)考虑 $\mathscr{V}$中 n 个向量$a_1, \cdots, a_n$ 的相加，并且对于 n 用归纳法，当 $n = 3$，由于 $a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3$，结论成立. 假定空间向量的数目$\leqslant n - 1$ 时，结论成立. 今考虑 n 个向量的情形. 由于对于较少向量的相加，有归纳假定. 不必考虑相加的

次序，所得均为同一个向量.因此这 n 个向量的相加，共有下列这些类型：$a_1+(\cdots)_{n+1}$，$(a_1+a_2)+(\cdots)_{n-2}$，$\cdots$，$(\cdots)_{n-1}+a_n$，其中$(\cdots)_i$ 表示相应$i(\leqslant n-1)$个向量的相加.因此只须证明其中每一式均可变为最后一式即可.于是，由于$(\cdots)_k+(\cdots)_{n-k}=(\cdots)_k+((\cdots)_{n-k-1}+a_n)=((\cdots)_k+(\cdots)_{n-k-1})+a_n=(\cdots)_{n-1}+a_n$，故得证.

命题 1 中向量运算的这些性质.因为由公理推出，所以对于几何向量(因为它满足公理 1°～8°)也成立.因此由于性质 7，n 个几何向量的相加在图上看起来，可以把(可能不在同一平面上的) n 个向量依次首尾相重，然后作连接 a_1 的起点到 a_n 的终点的向量，即为所求.如图 1-8 所示，即为 4 个向量相加的情形.

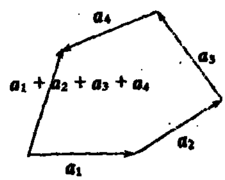

图 1-8

此外，由于几何向量利用有向线段来定义，它们除了满足公理 1°～8°以外，还有一些公理所没有涉及的性质.如向量的长度与向量之间的角度，因此分清那些性质来自公理，那些不是，是很重的.

习　　题

1. 证明全体复数构成实数域 $K=R$ 上的向量空间.

2. 证明 n 个复数的序列$(z_1,\cdots,z_n)$之集 C^n，在其中令

$$(z_{11},\cdots,z_{1n})+(z_{21},\cdots,z_{2n})=(z_{11}+z_{21},\cdots,z_{1n+2n})$$
$$\lambda(z_1,\cdots,z_n)=(\lambda z_1,\cdots,\lambda z_n),\quad \lambda\in K=R$$

则 C^n 是向量空间.

3. 证明一切 n 次多项式($n\geqslant1$)，在多项式加法与数乘多

项式之下，不构成向量空间.

§3 一般向量族中的线性关系

本节的讨论仍然在一般向量空间中进行，即以公理为依据，来讨论向量空间的进一步性质.

设$\mathscr{V}$是向量空间，$a_1, \cdots, a_n$ 是其中的一族向量，则对于任意 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$,

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m \qquad ①$$

称为 $a_1, \cdots, a_m$ 的**线性组合**，其所得向量称为可用向量 $a_1, \cdots, a_m$ **线性表出**.

显然，$\mathscr{V}$中的零向量 0 可用任何一族向量线性表出，因为只要令线性组合中的一切系数 λ_i 为 0 即可. 此外线性组合①称为是非平凡的. 若系数 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 中至少有一个不为 0，否则它称为是平凡的. 因此平凡的表示只能得到零向量，但零向量也可能出现在非平凡的表示中. 故有下列

定义 1 向量族 $a_1, \cdots, a_m$ 称为是**线性相关的**，若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$，使得

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0 \qquad ②$$

否则族 $a_1, \cdots, a_m$ 称为是**线性无关的**.

因此若 $a_1, \cdots, a_m$ 线性无关，则②式蕴含 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$，若线性相关，则至少有一组 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant m$，不全为 0，使②成立. 此外为了说话的方便，当 $m = 0$，即一个空的向量族称为是线性无关的.

作为例子，我们能够知道：

1. 一组向量 $a_1, \cdots, a_m$ 中若有二个相同，则它是线性相关的.

事实上，不妨设 $a_1 = a_2$，则我们有

$$1a_1+(-1)a_2+0a_3+\cdots+0a_m=0$$

2. 若 $a_1,\cdots,a_m$ 中有一个向量为0，则它是线性相关的. 因为若 $a_1=0$，则

$$1a_1+0a_2+\cdots+0a_m=0$$

3. 若 $m=1$, 则 a_1 所构成的向量族线性无关, 当且仅当 $a_1\neq0$.

4. 设 $a_{i1},\cdots,a_{im}$是向量族 $a_1,\cdots,a_m$ 的任意一个排列. 则前者线性无关当且仅当后者线性无关. 因此 $a_1,\cdots,a_m$ 是否线性相关(无关)与族中向量的次序无关.

以下为向量族线性关系中一些常用的基本性质.

命题1　在向量空间$\mathscr{V}$中:

1. 若 a 可用$a_1,\cdots,a_m$ 线性表出, 而每个 a_i 可用$b_1,\cdots,b_n$ 线性表出, 则 a 可用$b_1,\cdots,b_n$ 线性表出;

2. 若 $a_1,\cdots,a_m$ 的一个子集线性相关, 则 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关;

3. $a_1,\cdots,a_m(m>1)$线性相关, 当且仅当其中某个向量可用其余向量线性表出;

4. 若 $a_1,\cdots,a_m$ 中每个向量可用$b_1,\cdots,b_n$ 中向量线性表出, 且 $m>n$, 则 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关.

证明, 性质1与性质2是显然的, 以下往证3与4.

关于3. 若其中某个向量比如 a_1 可用 $a_2,\cdots,a_m$ 表出, 即 $a_n=\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m$, 则

$$(-1)a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m=0$$

而 $\lambda_1=-1\neq0$, 因此 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关. 反之, 若 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关, 即 $\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m=0$, 而 λ_i, $1\leqslant i\leqslant m$, 不全为0, 则不妨假定 $\lambda_1\neq0$, 于是有

$$a_1=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)a_2+\cdots+\left(-\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)a_m$$

故结论成立.

关于 4.考虑 $a_1,\cdots,a_m$ 中的前 n 个向量 $a_1,\cdots,a_n$，则有二种可能.1)它线性相关，则由 2.便有 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性相关；2)它线性无关.则它的任意一个子集也线性无关.今考虑向量族

$$a_1,b_1,\cdots,b_n \tag{③}$$

于是有 $a_1=\lambda_{11}b_1+\cdots+\lambda_{1n}b_{1n}$.而且其中的系数 λ_{1i}，$1\leqslant i\leqslant n$，至少有一个不为 0(否则 $a_1=0$，与 $a_1,\cdots,a_n$ 的线性无关假定相矛盾).不妨设 $\lambda_{11}\neq 0$.于是 b_1 可用 $a_1,b_2,\cdots,b_n$ 线性表示.从而 b_i，$1\leqslant i\leqslant n$，可用 $a_1,b_2,\cdots,b_n$ 线性表示.其次考虑向量族

$$a_1,a_2,b_2,\cdots,b_n \tag{④}$$

因为 a_2 可用 $b_1,\cdots,b_n$ 表示，所以 a_2 可用 $a_1,b_2,\cdots,b_n$ 表示，即 $a_2=\lambda_{21}a_1+\lambda_{22}b_2+\cdots+\lambda_{2n}b_n$.同理由于族 a_1,a_2 线性无关.可知 λ_{2i}，$i\geqslant 2$，不全为 0，不妨设 $\lambda_{22}\neq 0$，于是 b_2 可用 $a_1,a_2,b_3,\cdots,b_n$ 线性表示.从而 b_i，$1\leqslant i\leqslant n$，可用 $a_1,a_2,b_3,\cdots,b_n$ 线性表出，于是由③，④一直替换下去，可知在 $a_1,\cdots,a_n,b_n$ 中，b_n 可用 $a_1,\cdots,a_n$ 线性表示.从而 b_i，$1\leqslant i\leqslant n$，可用 $a_1,\cdots,a_n$ 线性表示.因此 a_{n+1} 可用 $a_1,\cdots,a_n$ 线性表示.由 3.$a_1,\cdots,a_{n+1}$ 线性相关，进而由 2.$a_1,\cdots,a_m$ 线性相关.证毕.

定义 2 向量空间 $\mathscr{V}$ 中的一族向量 $a_1,\cdots,a_m$ 称为是**完全**的，如果 $\mathscr{V}$ 中的任何一个向量可用它线性表出.

存在(有限)完全向量族的 $\mathscr{V}$ 称为**有限维**的；否则称为**无限维**的.

今设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 $\mathscr{V}$ 中的一个完全族，若它是线性相关的，则(由命题 1 之 3)其中必有一个向量可由其余向量线性表示，不妨设它是 a_m，于是 $a_1,\cdots,a_{m-1}$ 仍然是 $\mathscr{V}$ 中的一个完全族.同理若它线性相关，则可去掉其中一个向量，不妨设为 a_{m-1}，使得