第一章　向量代数

§1　向量概念

在自然现象中，有些量在取定单位以后，可以用数值来表示，例如时间、长度、质量、温度等等便是这样，而数学中的实数，便是这些量的概念的抽象。

然而在自然现象中，还有一些量，例如位移、速度、力、（一点的）电场强度等等，不仅与大小有关，而且还与方向有关。例如位移，当我们说物体 A 位移距离 S 时，那么它沿东北方向位移，还是沿西北方向位移，效果是不一样的，也就是说在这一类量里，包含着大小与方向两个要素，而现在要讲的向量，便是这种有大小、有方向量的抽象。当然，我们所说的向量概念并不是仅能表示上述那些物理量　由于在向量概念中，包含有方向的要素，所以它在几何学中也是一个基本的工具。在本课程中，我们将用向量及其运算，处理空间中的直线与平面问题以及坐标变换问题等。

定义 1　在空间中一个有大小、有方向的量称为向量。

向量在有的书中也称为矢量，向量通常用有向线段来表示；有向线段的长度表示向量的大小（也称为向量的长度），有向线段的方向表示向量的方向。

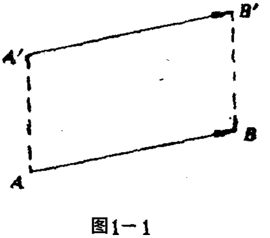


图1－1

设 AB 是一个有向线段，它代表某一个向量，将 AB 平行移动，得到有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度相等，方向相同，因此由定义它们代表同一个向量（图1-1）。所以说：代

表向量的有向线段可以任意平移；平移以后仍代表同一个向量．容许任意平移的有向线段称为自由有向线段．为了表述方便，今后我们把自由有向线段与向量视为等同，而向量有时也称为自由向量．

在记法上，为有别于数量，我们用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 或 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}\cdots$ 来记向量。向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$．长度也称为绝对值或模。

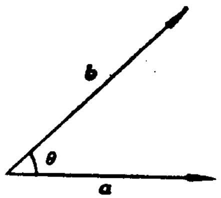


图 1-2

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为二个向量，将它们的起点放在一起，便有夹角 θ（见图 1-2)。对于所有空间向量而言，它们的夹角无正负之分，一律规定为不超过 π 的非负值，即规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

一组空间向量，若它们平行于同一直线，则称为共线向量，或者简称共线。显然，共线向量经平移可以位于同一直线上．同理，一组空间向量，若它们平行于同一平面，则称为共面向量，或者简称共面．显然，共面向量经平移可以位于同一平面上。

在向量中，除了根据定义 1 ，有一切我们可以想象的向量以外，为了计算与运用的方便，还引进一个零向量 $\mathbf{0}$。零向量的长度为零，方向任意，因此它可以平行于任意一个向量．也可以垂直于任意一个向量。零向量在图上表示为一个点．

此外，因为向量是由长度与方向两个要素决定的，所以不能比较大小。例如图 1-3 所画的两个向量，就不能说谁大谁小，当然更不能说它们相等，因为它们的方向不同。

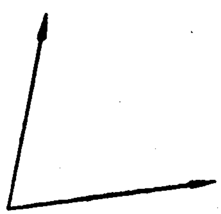


图 1-3

§2　向量的加法与数乘向量

在§1中，我们引进了向量的概念，但是要真正发挥它在数学中的作用，还需要定义向量的运算。向量的运算基本有四种：向量的加法、数乘向量、向量的内积以及向量的外积.本节讨论向量的加法与数乘向量，下两节讨论向量的内积与外积。

一、向量的加法

定义2　设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个向量，把$\boldsymbol{b}$的起点放在$\boldsymbol{a}$的终点，然后联结$\boldsymbol{a}$的起点与$\boldsymbol{b}$的终点。则得向量$\boldsymbol{c}$(图1-4)，称它为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之和，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

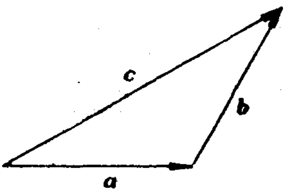


图1-4

对于这个定义，要说明的是向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的相加与有向线段的具体选择无关，这利用立体几何的知识即可证明，读者可自行验证之。对于下面要讲的向量的其它各种运算，也与有向线段的选取无关，以后不再另行说明。

其次，由定义2，作为特殊情形，显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$$

即零向量在向量的加法中是一个零元素。

关于向量的加法，有下列两条基本性质：

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

证明　先证1°。由图1-5可见$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$。

下面证明2°.由图1-6可见$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

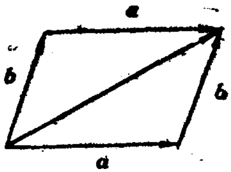


图1—5

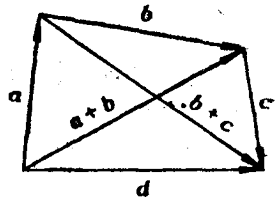


图1—6

由向量加法的性质2°容易推证多个向量的相加也可以任意结合，所以以后对于多个向量的相加不必再打上一些括弧（指出结合方式），可以直接写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. n 个向量的相加在图上看起来，就是把（不见得在同一个平面上的）n 个向量首尾依次相联，然后联结第一个向量的起点与最后一个向量的终点．图 1-7 便是 4 个向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 相加的图示。

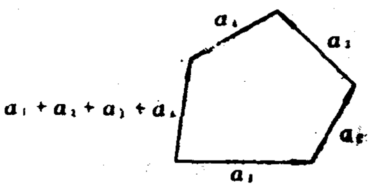


图1—7

有了向量的相加，便可定义向量的相减．设$\boldsymbol{a}$是一个向量，若向量 $\boldsymbol{a}'$ 与 $\boldsymbol{a}$长度相等方向相反，则称$\boldsymbol{a}'$为$\boldsymbol{a}$ 的逆向量，记作$\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$（见图1-8），当然，逆向量是相互的，也就是说，若 $\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$,则$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}'$。

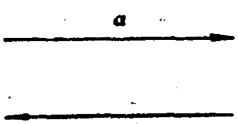


图1—8

定义3 设$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，规定$\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{b}$ 之差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

如图1-9所示：

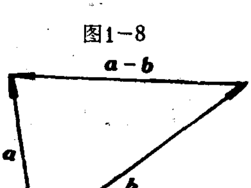


图1—9

号，则$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$皆与$\boldsymbol{a}$同向；若$\lambda$，$\mu$反号，则$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$皆与$\boldsymbol{a}$反向.又按定义4，

$$|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|\mu||\lambda\boldsymbol{a}|=|\mu||\lambda||\boldsymbol{a}|=|\mu\lambda|\boldsymbol{a}=|(\mu\lambda)\boldsymbol{a}|$$

所以$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$.

再证2°.当λ，μ有一个为0时，显然成立，当$\lambda\mu>0$时，通过对于长度与方向的判定，也有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

最后当$\lambda\mu<0$，这时若$\lambda+\mu=0$，则显然.若$\lambda+\mu\neq0$，则在$\lambda+\mu$，$-\lambda$，$-\mu$三个数中，必有两个同号，不妨设$\lambda+\mu$与$-\mu$同号，于是由上述已证的等式有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$$

因此

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+(-1)((-\mu)\boldsymbol{a})$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+((-1)(-\mu))\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

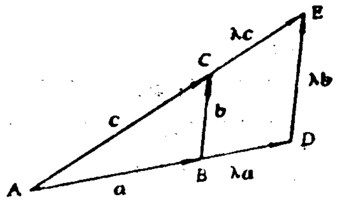


图1—10

最后证3°。当$\lambda=0$，显然成立.当$\lambda>0$，作一个图，使得$AB=\boldsymbol{a}$，$AD=\lambda\boldsymbol{a}$，$DE=\lambda\boldsymbol{b}$，$BC\parallel DE$(图1-10)．于是由相似三角形的性质，有$\lambda=\overline{AD}:\overline{AB}:=\overline{DE}:\overline{BC}$
$=\overline{AE}:\overline{AC}$

所以

$$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}=\lambda\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

当$\lambda<0$，利用已证的等式有

$$(-\lambda)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-\lambda)\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{b}$$

经移项得$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

三、向量 的线性表示

在引入向量的加法与数乘向量以后，全体空间向量便形成

一个运算系统——向量空间。为了便于掌握，可考虑用几个向量表示全体空间向量的问题。为此分为共线向量、共面向量与一般空间向量三种情形。

定理 1 若向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 共线，则其中之一可以表示为另一个向量的倍数。

证明 设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 共线，若 $\boldsymbol{a}_1=0$，则 $\boldsymbol{a}_1=0\boldsymbol{a}_2$. 若 $\boldsymbol{a}_1\neq 0$，则当 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 同向时，$\boldsymbol{a}_2=\dfrac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1$；当 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 反向时，

$$-\frac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1$$，所以结论成立.

由定理 1 的证明可知，在直线上取定一个非零向向量以后，此直线上的任意一个向量都可以唯一地用这个向量来表示。

定理 2 若向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 共面，则其中之一可表为另两个向量的数乘之和

证 明 设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 共面，若 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 共线，其中之一可以用另一个来表示，比如说 $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$，于是 $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1+0\,\boldsymbol{a}_3$，所以结论成立. 若 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 不共线. 则由图 1-11 可知，总可以作一个以 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 所在的直线为边的平行四边形，使得 $\boldsymbol{a}_3$ 为这个平行四边形的对角线，于是

$$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$$

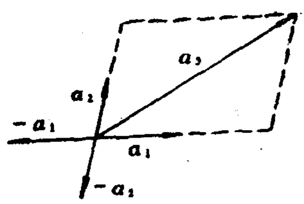


图 1－11

由定理 2 的证明可见，在平面上取定两个不共线的向量以后，此平面上的任意一个向量可唯一的表示为这两个向量的数乘之和，这样的表示称为线性组合。

定理 3 对于任意 4 个空间向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，必有一个是其余三个的线性组合。

证 明 若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$共面，由定理2，其中之一可用其余2个来表示，如$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$，于是$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4$，故结论成立．若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$不共面，则如图 1-12所示，总可以作一个以$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$所在的直线为棱的平行六面体，使$\boldsymbol{a}_4$为该平行六面体的对角线，于是

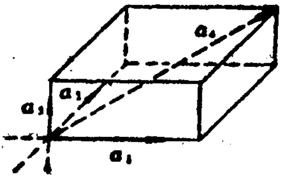


图1－12

$$\boldsymbol{a}_4=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$$

由定理 3的证明可见，在空间取定三个不共面的向量以后，任一空间向量都可唯一地表为这三个向量的线性组合，

例 2 证明三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是有不全为0的实数λ，μ，ν，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$$

证 明 若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面，由定理 2，其中之一，比如说$\boldsymbol{a}$可用另二个来表示：$\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$，于是

$$(-1)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0 \quad ，而 -1\neq 0$$

若$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$而 λ,μ，ν不全为0，不妨设 $\lambda\neq 0$，则$\boldsymbol{a}=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\boldsymbol{b}+\left(-\frac{\nu}{\lambda}\right)\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面．

例 3 设 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是二个不共线的向量，

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$

求点C在直线AB上与线段$\overline{AB}$上的条件．

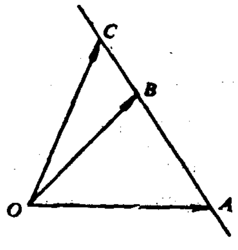


图 1－13

解 若C在直线AB上，则由图 1-13，

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-\mu\overrightarrow{OA}=(1-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$

所以C在AB上的条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad \lambda+\mu=1$$

其次，若C在线段$\overline{AB}$上，则在上面的推导中有$0\leqslant\mu\leqslant 1$，从而C在线段AB上的条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad \lambda+\mu=1,\ \lambda,\mu\geqslant 0$$

例 4　设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是三个不共面的向量，

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$$

求点D在平面ABC上的条件与D在三角形ABC上的条件（见图1-14）.

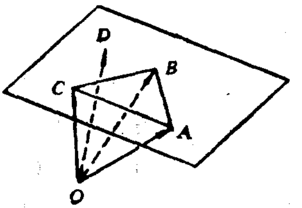


图1－14

解　$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，而$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CB}$，因此

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CB}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{CB}+(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OC}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$$

而$\lambda+\mu+\nu=1$. 同理可以证明D在三角形ABC内的条件是$\lambda+\mu+\nu=1$，λ，μ，$\nu\geqslant 0$

习　　题

1．求向量满足什么条件时，下列等式才能成立？

1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　2）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

3）$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$　　4）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

5）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　6）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

7）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　8）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

2．用平行六面体棱上的向量来表示代表该六面体对角线的向量。

3．已给向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，试在图上作出以下向量： 1） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$； 2） $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$； 3） $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$； 4） $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

4．证明在三角不等式中，等式成立的充要条件是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同。

5．证明以正n边形的中心为起点，顶点为终点的n个向量之和等于$\boldsymbol{0}$。

6．已给向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的角平分线上的一个向量。

7．设ABC为一个三角形，O为空间任意的一点，证明等式

$$OA+OB+OC=\boldsymbol{0}$$

成立的充要条件是O为三角形ABC的中线的交点（称为中点）。

8．四面体$OABC$每个三角形面上的中点与第四个顶点的联线称为中线，证明四面体的四条中线交于一点。

9．证明四面体的三组相对棱中点的联线交于一点。

§3 向量的内积

定义 5 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的内积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是一个数量，它的值

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

其中$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$表示向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

内积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$在物理上表示力$\boldsymbol{a}$使物体位移$\boldsymbol{b}$时所作的功。向量的内积在有的书上也叫做向量的数积或数量积。

由定义可知，当$0\leqslant(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})<\pi/2$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant 0$，当$\pi/2<(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant\pi$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 0$，特别当$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi/2$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，当$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，所以内积有下列两个重要的事实：

1° $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故用内积表示方向的垂直很方便；

2° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，或者说 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，即向量的长度可以用内积来表示。

关于向量的内积有下列三条基本性质：

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

2° $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

3° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

证明　1°由内积的定义显然成立，以下证明性质2°与3°。

2°的证明：若 $\lambda=0$，则不证自明．若 $\lambda>0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，因此由定义 5

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

若 $\lambda<0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，因此

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&=(-\lambda)|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))\\&=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

所以性质2°成立．

3°的证明：我们知道在取定单位长度的空间中，对于每一条有向直线，只要取定原点，便在该直线上建立了坐标,使

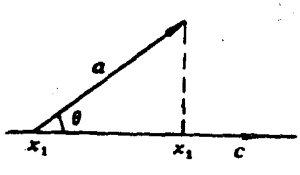


图1－15

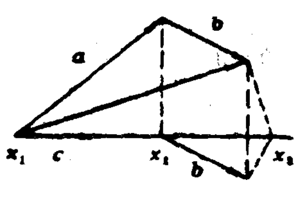


图1－16

得其上的点与实数之间有一个一一对应关系．于是由图1-15可见，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta$$
$$=|\boldsymbol{c}|(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)=|\boldsymbol{c}|(x_2-x_1)$$

因此对于3°，由图1-16可见，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(x_2-x_1)+|\boldsymbol{c}|(x_3-x_2)$$
$$=|\boldsymbol{c}|(x_3-x_1)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

即性质3°成立。

由于内积满足交换律（向量内积的性质1°），故由向量内积的性质2°与3°还有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

因此内积基本上可以象数的乘积那样进行运算，但是有一点应该注意，就是内积不满足结合律，即

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

这是因为$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$（即$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$）与$\boldsymbol{a}$共线，而$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{c}$共线，因此一般来说它们不相等。

例 5　若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$不共面，$\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

证明　由于$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_2$不共面，故有λ_1，λ_2，λ_3，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$$

于是

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2=\lambda_1\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}+\lambda_2\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}=0$$

所以$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

同理，对于平面上的向量，读者试列出相应的命题并证明之。

习　　题

1．假设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{2}{3}\pi$，计算：1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；2)$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$；3)$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

2．指出下列推导哪些是正确的，哪些是错误的：

1）因为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

2）因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\neq 0$，所以$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

3）设$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\neq 0$，两边乘以$\boldsymbol{a}$，得$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}$，消去$\boldsymbol{a}^2$，得$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

3．证明向量$\boldsymbol{a}$垂直于向量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

4．设向量$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$两两互相垂直，$\boldsymbol{s}=\lambda\boldsymbol{p}+\mu\boldsymbol{q}+\nu\boldsymbol{r}$，求向量$\boldsymbol{s}$的长度以及$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$的夹角的余弦.

5．设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为任意两个向量，证明

$$\lambda^2\boldsymbol{a}^2+2\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu^2\boldsymbol{b}^2\geqslant 0$$

并且只有当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线时，等号才有可能成立.

6．设A_1，A_2，…，A_n是正n边形的顶点．这时$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_nA_1}=0$．试由此推出：

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=0$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)}{n}\pi=0$$

7．设$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$共面，证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3 \end{vmatrix}=0$$

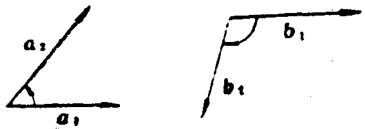
8．证明：对于任意四个向量有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{r}_4 \end{vmatrix}=0$$

§ 4　向量的外积与混合积

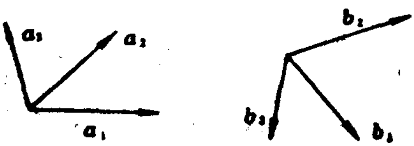
一、空间的定向

在定义向量的外积之前，先介绍一下空间的定向. 对于直线，它有两个方向，每个方向均可用直线上的一个非零向量来代表；对于平面，它有逆时针方向与顺时针方向两个方向，每个方向都可以用从第一个向量（小于 π 的）转到第二个向量是逆时针方向还是顺时针方向来区别，也就是可以用两个有次序的不共线向量来代表（图 1-17）；而对于空间的情形，可用右手的姆指、食指与中指分别代表不共面的向量 a_1，a_2，a_3. 同理亦可用左手的姆指、食指与中指，分别代表不共面的向量 b_1，b_2，b_3，则不共面的 3 个有次序的向量 a_1，a_2，a_3 与 b_1，b_2，b_3，分别代表了空间的两个不同的方向. 它们分别称为右手系与左手系（图 1-18）.



逆时针　　　　顺时针

图 1-17



右手系　　　　左手系

图 1-18

特别对于空间的情形（直线与平面的情形也如此），由于空间有两个方向，因此当我们在它上面取三个有次序的不共面向量时，它们就有构成右手系还是左手系的问题. 当然，右手系与左手系在地位上是平等的，但是由于人们习惯于使用右手，所以常采用右手系。

二、向量的外积

定义 6　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它的长度

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

它的方向 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成一个右手系（图1-19）.

当然，称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系，是指它们不共面的情形，也就是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线的情形. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，由长度的定义已有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，所以不必指出方向，向量的外积也称为向量积。

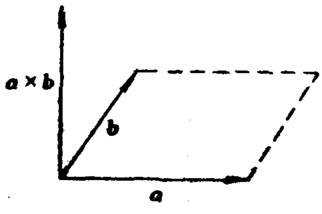


图 1－19

关于向量的外积有下列三条基本性质：

1°　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

2°　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

3°　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times$

一般情况下，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 时称为这个乘积具有反交换性. 所以性质1°表明外积具有反交换性.

证明　先证1°. 由定义显然有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|$，又因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的方向相反，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（图1-20）.

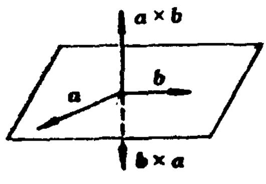


图 1－20

现在证2°. 当 $\lambda=0$ 时，显然成立. 当 $\lambda>0$ 时，$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}| = |\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$，且 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相同. $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相同. 因此 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 的方向相同，所以 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$. 当 $\lambda<0$ 时，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相反，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向也相反，所以 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 的方向相同，又 $|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b})| = |\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$，所以 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

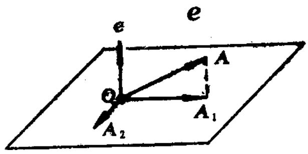


图 1-21

由性质1°与2°，还有$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

最后证3°．先看任意向量 $\boldsymbol{a}$与一个单位向量$\boldsymbol{e}$的外积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}$．作平面垂直于$\boldsymbol{e}$，如图 1-21 所示，设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OA}$在该平面上的投射是$\overrightarrow{OA_1}$（即于$OA$上每点向平面引垂线，然后取垂足的轨迹），将$\overrightarrow{OA_1}$在平面上沿顺时针方向旋转 90°，得$\overrightarrow{OA_2}$，则$\overrightarrow{OA_2}\perp\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}$，$OA_2$，构成右手系．又因为

$$|\overrightarrow{OA_2}|=|\overrightarrow{AB_1}|=|\boldsymbol{a}|\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e})\right]=|\boldsymbol{a}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e})$$

$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{e}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}|$，所以$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}=OA_2$．

其次，证明对于单位向量 $\boldsymbol{e}$ 有$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e}$．如图1-22所示，在垂直于$\boldsymbol{e}$的平面上，设$\boldsymbol{a}$加$\boldsymbol{b}$的向量三角形在平面上的投射为$OA_1B_1$，设它在平面上沿顺时针方向旋转 90°以后为 OA_2B_2，则由上所述，

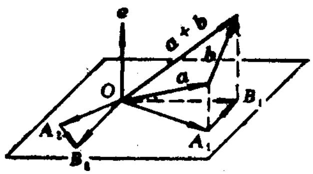


图1-22

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}=\overrightarrow{OA_2},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e}=\overrightarrow{A_2B_2},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{e}=\overrightarrow{OB_2}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{e}$$

最后对于任意$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由已证等式，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{c}|((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{e})\\&=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

所以性质3°成立。

三、向量 的混合积

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为任意三个空间向量，则称数量

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

为混合积。混合积是外积与内积的混合，并不是一种新的运算，但是它有一些重要性质，是以后经常要用的。

首先作以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体（如图1-23所示），它的体积V等于底面积s乘高h，即$V=sh$。但是

$$s=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

$$h=|\boldsymbol{c}||\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$$

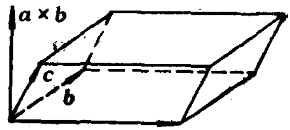


图1-23

所以

$$\begin{aligned}V&=sh\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|\\&=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\end{aligned}$$

即混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的绝对值等于以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积。

其次，讲一下混合积的符号。由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

因此，它的符号决定于$\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$。当$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所张平面的同侧，即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$构成右手系时，$\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$，故混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$。反之，当$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所张平面的异侧，即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$构成左手系时，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}<0$。

根据以上讨论，可得混合积的以下性质：

1° 若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$构成右手系，则$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$，若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$构成左手系，则$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$；

2° 因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$表示体积，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$；

3° 因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$，以及$\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$构成相同的系统，所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

4° 因为向量的外积具有反交换性，所以根据3°，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$$