

第一章

从神秘走向历史

假如我们想发现通往任何时期知识宝库的神秘途径，我们最好从那些涵义不明的词汇入手，它们没有仔细斟酌便通过口头或者笔头辗转流传下来，并由于长期重复使用而失去了原来的意思，使人们在不知不觉中以为它们代表的就是客观存在。

卡尔·贝科尔

混沌中的神秘

如果让哲学家回答“什么是哲学？”或者让历史学家回答“什么是历史？”，他们会轻而易举地作出回答。他们不可能在不知道研究对象的情况下盲目地进行探寻。然而，如果我们问数学家“什么是数学？”，他们可能会振振有词地说不知道，因为这并不妨碍他们从事数学研究。

弗朗哥斯·拉瑟尔

在科学的华美外观之下隐藏着神秘的内核，这是一个科学家不敢谈及而仅在学术界才加以讨论的话题。究其本质，20 世纪的科学是在一个深刻的“宗教”信仰的基础上发展起来的，这一信仰认为存在一个不可感知的、完美无缺的先验世界，它以一种不可理喻的方式控制着我们的生活，而人类却无法对它施加任何

影响。什么是世界的本来面目、它存在于何处、它的存在对我们具有什么意义等，这些就是本书要探讨的问题。

对于那些关心科学并为它的所有进步而欢欣鼓舞的人们来说，提出这些问题无异于一次强有力的冲击。科学的神奇与神秘历来就存在，然而我们受到的教育一直在告诉我们，人类的每一个进步都是对自然世界新的科学认识，都是对我们称之为“未知”的自然现象的揭示。科学具有明确性，它来自于科学语言的使用，这种符号语言排除了含混和疑虑，其内在逻辑使人类与自然最隐秘的运行机制建立了亲密的联系。自然能够通过思维与行动得以确定：这种语言就是数学。

在科学的发展过程中，科学的表达方式越来越数学化，科学的结构也更趋一致。科学家们认为，只有一个宇宙，只有一种宇宙规律，科学的所有分支最终都要聆听宇宙规律的指令。近年来，对万象理论的探索已经成为基础科学新的研究热点。如果最终成功，其内容将是一个逻辑连贯的数学命题。然而，什么是数学，为什么我们要把它作为探索宇宙奥秘的最重要的武器？我们为什么要从数学中寻求有关客观世界性质的最终答案？如果我们回答不了这些问题，那么我们对宇宙的科学解释就会最终建立在我们并不理解的事物之上，而那些虚无缥缈、无法捉摸的神秘现象便会成为我们理解世界的基础。

确定性的幻觉

体态娇小，娇媚可人，知书达理的西南部女子，芳龄 30，喜好音乐、戏剧、书籍和旅游，寻求一名热心体贴、有生活情趣的男子共享生活之乐趣，长相厮守。有意者请寄相片，生物化学家免谈。

摘自《纽约书评》个人广告栏

历史上有许多十分自信的人物，他们坚信自己绝对正确，从不怀疑自己。人们日复一日地生活着，很少有人意识到身边消逝的岁月就是历史，这是很自然的。在这种幻觉的束缚之下，人们很容易把目光和笑容投向过去，投向远古年代在各种神秘和幻想的作用下所产生的各种朴素的感情。然而，人们一旦将这些想法作为认识世界的基本模式，而不仅仅是文化的装饰时，他们的笑容便会变成绝望：因为人们最终发现它们不过是人类对于主宰世界进程的神鬼的奇怪幻想而已。于是我们重新不屈不挠地探索人类发展的每一个进程，由此产生了新现实主义，它使我们以成熟地观点看待世界及其运行机制，揭示了宇宙的玄奥和神秘。这种新现实主义也许可以被称为一种“科学的态度”，即便我们尚且不理解它，也能感觉到它的存在。

科学为我们发明了各种各样的装置和机器，没有它们，我们的生活将停滞不前，令人无法忍受。我们对技术的一贯进步已经十分习惯，哪怕出现明显失误也被认为偶然疏忽的结果，并把原因归诸于“人类自身的错误”。这个观念说明人们没有注意到一种偏见，即我们根本不需要人为干涉科学的发展。实际上，未来却要求人类不断提高，更深刻地理解我们所生活的这个世界，这有赖于科学以观察和实验为基础，去伪存真，建立起严谨的认识体系。只有这样，人类对世界的认识才能像朝阳那样从神秘的迷雾中喷薄而出，透过未知的乌云，照亮未来。

这种看待事物的宏观理论，即使不是放之四海而皆准，也足以在进行各种活动方面指导人类的思维。从技术最发达的社会中我们发现，那里的人们最渴望了解科学发展的最新消息，而在最落后的社会里，迷信不但占据了统治地位，而且人们的思维也拘泥于以往的僵化模式。如果更仔细观察一下技术成功的社会，我们将发现它们都是建立在数学语言之上的。数学语言是科学进步

的核心，是计算机革命的基础。可以说，没有数学语言的持续存在，社会就不可能有实质性的进步。

我们周围的世界以及我们的内心世界都是自然界的组成部分，对它们的理解是一个漫长而艰苦的过程。起初，大自然的各种异常和奇异现象给人类留下了深刻的印象。各种自然灾害，其毁灭性如此巨大、如此令人震惊，在人类的历史、传奇以及人们的记忆中都占据着一席之地。人类由此逐渐认识到，有“异常”必有“正常”。正常现象的特征是它具有可靠性、可预见性以及可利用性。自然界的正常现象允许我们依据历史来推断未来。这一认识方法影响巨大，产生了丰硕的成果，因而成为区分古代简单社会和现代复杂社会的一分水岭。对自然界中可预见部分的系统化认识最后形成了既有价值又有益处的活动，这就是我们今天所谓的“科学”。它精练地概括了我们对自然界的观察，保留了自然中的部分或全部的信息。

回顾人类对自然界的认识过程，我们发现它与数字有着密不可分的联系，比如丈量、计算、勘定、划分以及制作模型等。从今天的科学活动中我们发现，它们几乎都离不开数学。这是有其原因的。数学的作用是对世界以及发生在这个世界中的各种事物进行描述。我们在图纸上画出的曲线说明了事物最本质的结构，说明了有关恒星、行星以及我们人类心理活动的轨迹。这无疑是人类利用数学作为武器的原因，但却不是一种解释。为什么数学会发挥作用？为什么世界会按照数学的规律运动？为什么一切会按照公式中的数值所揭示的顺序发生？它们之间是否存在一种神秘的联系？它是偶然发生的吗？或者，事物难道不能以其他方式存在吗？我们在这个星球上所做的大部分研究工作充其量只能说是获得了部分成功，我们制定并准备遵循的各种思想和实践体系很少能够按照计划实施。现实总是和人类想象力开玩笑，它总是背离人类为它设定的路径。然而数学却是一个极大的例外，它能

够证明自己的运行规律。然而，这个规律究竟包括什么东西？

从数学的普遍性和数学的功能这些简单的问题开始，我们还有大量的问题需要解决。什么是数学？什么是数字？数字是怎样发现的？我们真的发现了数字吗？或者说，我们只是发明了数字？大部分人认为数学很难学，那么数学是人类思维的一种自然活动，还是只有少数人才能掌握的奇特技巧？如果从另外的角度看待这些简单的问题，也许还有许多涉及数学神秘性质的疑问需要解决。人类的祖先是怎样在没有具体物体集合的情况下，从简单的计数活动升华到获得“数字”这样一个抽象的概念的？这一演化过程真的将我们推进到只有靠着少数奇才的引导才能进入的那个数学真理的非物质世界吗？如果答案是肯定的话，那么这是否意味着数学实际上是一种宗教，而且还是一种严谨而苛刻的宗教？假如我们在宇宙中遇见某些智商极高的外星人，他们是否会拥有与我们一样的数学知识？他们是不是也有兴趣写一本探索“为什么世界会有数学性”这样的书籍？

这些问题和其他一些相关问题构成了此书写作的动机。它们为我们思考世界的形成提供了线索。可以看出，我们身边的现实世界和我们头脑对现实世界的认识是相互交织的。我们同时还发现，在人类从其生长环境中加以抽象的事物和人类对该事物的认识可能产生的人为因素这两者之间也常常存在着冲突。我们发现自己正面临一些过去只有神学家才会研究的玄奥问题。几个世纪以来，有些人一直把数学作为通往绝对真理的捷径，因为这是人类主观上所能达到的极致。数学的结构成为其他科学追寻绝对真理的模板。

既然数字与其他问题有着意想不到的联系，那么我们也可以因此认为数字绝不仅仅具有我们所看到的表面意义。在文化形成的过程中，数字在过去的年代里具有比本身需要更深刻和更奇怪的意义。谁没有想到过自己拥有过一个幸运的数字？或者至少，

谁会忘记一个倒霉的数字呢？许多宗教都拥有有关数字的奇怪观念，它们与宗教和宗教发展的文化背景融合在一起。这个数字是666或者是7并没有多大关系。对一些人来说，数字具有一种内在的意义。假如他们能够诠释这些意义，那么宇宙间的一些小小秘密的昭示便指日可待。

数字以多样和明显的方式左右着我们大部分的日常生活。家长们急切地希望他们的孩子在数学方面取得好成绩，认为这是通往成功和稳定生活的保障。政府硬性规定数学是学生们基本的必修课。智力测验必然包括测定参与者数学推理能力的内容。那些号称前途无量、薪水优厚的招聘广告诱使我们去进一步了解情况，然而只有那些看穿其中奥秘的人才成功。学生如果难于克服本专业中的数学障碍便会萌发改换专业的念头。年龄小的儿童尽管在其他课目上并不出色，但在数学方面却十分擅长，能力超过年龄比他们大一倍的其他儿童。除此之外，他们只有在艺术和音乐领域里才具有同样早熟的天赋。放眼世界我们发现，西方世界是在数学理解力的推动下得以发展的。逻辑严谨的计算机程序控制着我们的经济和货币市场，控制着飞机和火车的运行。人类的思维是智力的一种自然形式，容易发生错误，而以计算机为代表的“人工”智能却可以做得十分精确。实际上这些人工智能只是利用了一些复杂的数学演算规则而已，它在电子技术的支持下比人类的思维更迅速，更可靠。在大学里有一种不公开的观点，即任何学科离开数学越远，其中的数学成分越少，那么这门学科就越不严密，越难得到学术界的尊重。

上面这些例子并不都是能预测的。对大部分人来说，数学存在于教室中，存在于费解难懂的书籍以及所得税报表和大学的课堂里。数学家绝不是你在鸡尾酒会上愿意见到的那些谈笑风生的人。但这并不是事情的全部。数学时常惊奇地从封闭的状态冲脱出来，对人类其他各种活动领域产生不容质疑的影响。

秘密社团

算术的各个分支包括：野心、发狂、丑化和嘲弄。

刘易斯·卡罗尔

历史上总有些人把宇宙看做是一个巨大的密码，他们认为，如果找到正确的组合便可破译。人类一旦掌握了这种秘密便拥有了分析和控制未知世界的能力。这种炼金术式的思维传统在西方思想中一直发挥着影响，如今仍为一些偏执的人所坚信不疑。我经常收到一些公众的善意来信，声称他们通过奇妙的数字组合揭开了宇宙基本结构的秘密。有时候这些数字与具体物体的尺寸有关，如大金字塔的构造就与神秘的数字有关，这种现象在数学领域里屡见不鲜。有时候，它们又赋予其他符号如字母或名字以神秘的数字色彩。这些都是过去留下来的奇怪问题。

毕达哥拉斯是萨摩斯人，萨摩斯是地中海中的一个岛屿，离以佛索不远，现属土耳其。公元前 6 世纪，那里的经济繁荣昌盛，可与米利都、以佛索和其他的沿岸城镇媲美。当时，萨摩斯由暴君波利克里托斯统治，他的大部分财富都是靠海上打劫积聚起来的。由于更强大的邻国扬言要发起进攻，为了保住手中的财富，他试图寻找合适的机会出卖盟友。他背信弃义，最后招致灾难，陷入了波斯人设下的圈套，并于公元前 522 年被钉死在十字架上。毕达哥拉斯的早期生活具有浓重的神秘色彩。一般的说法是，他离开萨摩斯前往米利都拜泰勒斯为师，随后继续旅行，先到腓尼基，后在埃及学习了 22 年。公元前 525 年冈比西斯占领埃及，于是他随着本国军队重返巴比伦，在那里埋头研究算术、音乐和其他学问。以后他又在地中海地区不断地旅行，最终在克罗顿定居。克罗顿现在位于意大利南海岸，而在毕达哥拉斯的年

代，这个地区从公元前 710 年开始一直属于希腊。毕达哥拉斯是否一直过着浪迹天涯的生活我们已经无从判断。后世为了树立他的形象和权威，给他的早期生活增添了种种浪漫传说。因为对于任何伟大的哲学家来说，在埃及的长时间学习以及在巴比伦先进文化中的浸染都是一段值得夸耀的学徒经历。

所幸的是，我们对克罗顿所发生的事情还是很清楚的。在公元前 6 世纪那个地区正经历着一次宗教的复兴，通过传播一套特定的对来世的看法，并在人们的一致赞同下对各种禁忌和仪式的注册登记，过多的准宗教社区得以统一。由于在宗教意识上得到了统一，他们便从他们原先所归属的较大的异教徒文化中脱离了出来，并创建了“支持小组”以作为激励教徒的中心。独特的服饰，独特的饮食，神秘的生活方式强化了他们与世隔绝的状态。在这样一个微小的社会里，毕达哥拉斯对数字产生了崇拜，它使崇高和滑稽奇异地结合在一起。

毕达哥拉斯和他的信徒认为，数字是事物的真正本质。他们把数字看做是宇宙真正意义的象征性图画。我们通常认为，数字是对事物集合以及事物间关系的表达形式，而毕达哥拉斯学派则在数字本身意义方面发掘其更古老的神秘信念。他们认为，一个特定的数字，比如 4，既是象征的表达形式又具有象征性的内在意义。毕达哥拉斯和他的信徒把数学变成了一种神秘的宗教。按照他们的说法，数字本身是神秘知识的符号和象征，它们隐藏在感性世界之后，只有通过特殊的鉴别和解释才能发现。后来，一种新奇的理论动摇了这一学派的根基。人们认为，所有的数字都可以分成两类。一类是整数，如 1、2、3 等等，另一类数字是分数，如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{2}{4}$ 等等，分数可以通过整数除以另一整数而获得。这两类数字称做有理数。然而，那个以毕达哥拉斯名字命名的著名的三角定律表明，如果以 1 为单位，其对角线的长度与 2 的平方根相等。他们经过多次努力，运用了各种正确的计算步骤

仍然无法将其换算成两个整数之比，即无法换算成小数。最终的结果表明，2 的平方根无法用两个整数之比来表达。这是一种新的特殊数字类型，毕达哥拉斯学派第一次把它称做 ARRHETON，意思是无法表述为两个整数之比的数字。以后这类令人困惑的数字被称之为“无理数”，这个术语也表明这类数字的不可表述性。这些与 2 的平方根类似的数字无法通过测量仪器准确地获得。这一结果使毕达哥拉斯学派感到震惊。他们一向认为，数字是统治宇宙的根本力量，现在他们遇到了挑战。如果他们无法征服诸如正方形的对角线这样的小问题，那么他们全部的宗教基础就会受到威胁。这种结果使他们遭受了灭顶之灾，因为从 2 的平方根开始，人们可以列出无数个无理数，比如 3、5、6、7 的平方根。无理数的出现还导致了学科之间的相互矛盾，比如算术能够创造出“奇怪的”无理数，而几何学却无法对其进行丈量。据说，人们第一次发现无理数时候，兄弟会把它当做一个秘密而密而不宣，因为这个消息一旦传开会使他们的教义发生动摇。当希巴索斯承认自己违背了诺言，将发现无理数的消息泄露出去时，他立即被溺死。后世的一位评论家谈起这件事时说道：“不可言说和无影无形的无理数被深藏起来秘不示人，所有发现和接触过这一场景的人都被立遭毁灭，成为永不止息的生活长河里的一朵朵不起眼的浪花。”不过，有人怀疑，毕达哥拉斯学派是否和其他秘密团体一样，他们对待自己的看法远不如外界对他们的看法那样严肃。埃底卡摩斯是公元前 15 世纪的一位著名的喜剧作家，他用下面的一段对话描写了把人作为统计对象后出现的特殊效果：

“如果你有偶数的石子或者奇数的石子，这并不重要。重要的是，别人如果为你添加了一颗或拿走了一颗石子，原来的数字还一样吗？”

“愿神让你闭嘴！”

“那好，如果有人将一条线段延长或者剪短，这时候线段的长度和以前还一样吗？”

“怎么会呢，当然不一样。”

“让我们来看看人的情况吧。有个人会长高，有个人体重会减轻……那么按照你的理论，你，我，还有其他的人都不是昨天的我们了，到了将来我们也都会变成与现在不同的人了。”

世界并不是静止的，而毕达哥拉斯学派的数字却是静止的。在以后的各章里，我们将会看到我们如何才能避免这样的责难。

非欧几里得学说

在 17 世纪和 18 世纪整整两个世纪里，几何学在与经验主义的斗争中一直是理想主义者坚不可摧的堡垒。有些人的看法与欧洲大陆的普遍看法一样，他们认为某种独立于经验的知识也许可以反映现实世界，这实际上指的是几何学。他们说，只有疯子才会怀疑它的合理性，只有傻子才会否定它的现实意义。

伯特兰·罗素

毕达哥拉斯学派的流行毕竟只是一段已经流逝过去的历史，如果看一看那些深刻地影响着近代价值体系的距今更近的学说，是很有效益的。

从古希腊到 19 世纪，人类思维活动所遵循的基础之一是欧几里得几何学所创造出来的确定性。这个学科结构严谨，概念明确。关于直线、三角形、圆和正方形的所有理论，都是从那些被称为“公理”的清晰陈述出发，通过严谨的逻辑推导出来的。几何学的完整体系成为确立逻辑关系和进行逻辑推理的典范。 100

多年来，欧洲各类学校的几何学教学方法从来都没有改变过。几代学生所用的欧几里得著作，其语言风格十分离奇，这种独特的语言风格堪与他们每天清晨聆听的官方《圣经》的语言风格相比。斯蒂芬·利科克 1910 年在《几何学的小客栈》里惟妙惟肖地模仿了欧几里得学派的语言风格：

定义和公理

所有的客栈都是相同的。

同一客栈的单元楼层里的房客彼此都是相等的。

单人房间不分部分也没有数值。

客栈的女房东是一个平行四边形，

那是一个长方形而且有棱有角的形状，它是无法描述的，可又和所有的事物都相等。

不在一条直线的两个房客碰了面，

争吵是谁都不愿意干的事。

其他房间都住了人，据说单人房间就是双人房间。

公设和命题

一个馅饼可以被任意地制作无数次

一连串的命题可以把女房东

抽象成一个精炼的词。

在一个客栈与另一个客栈之间

可以拉出一条笔直的线。

客栈里的床单，虽然都是

用经线和纬线织成的，但是却永远不会联结，
客栈里的两顿饭加起来肯定
少于两顿饭的平方。
假如在客栈的两端拉起
一条穿过所有房间的线，那么
给房客供暖的暖气管就可以
放在这条线里。
同一张账单以及同一张账单的同一页
不应该对同一件东西两次计价。
假如有两个住在同一单元房客，其中一个房客
的账单与另一个房客的账单的数额是一样的，
那么，这个房客和女房东的争吵与另一个房客
和女房东的争吵就是相等的，由此推理，两个房客
每周的账单也是一样的。
如果不是这样，那就让一张账单的数额多一些，
另外一张账单的数额就少一些 ——
这样的做法真是荒谬。

19 世纪初期，欧几里得几何学并不是学生利用铅笔、尺子和圆规就能在练习本上玩耍的游戏，相反，它描述了现实世界的真实情况。欧几里得常常在沙土上画出各种几何形状，研究长度、角度和形状之间的关系，直觉地感受到几何学原理的存在。他在平面上发现了不证自明的“真理”，并且把它们归纳为几何学原理，这有助于他对沙土上各种各样的几何图形的逻辑推理。欧几里得几何学体系的特点是它提出的一条最基本的原理，即两条平行线永远不会相交。这个真理似乎是不证自明的。在随后的几个世纪里，有人试图证明这个真理是从欧几里得所承认的其他原理中推导出来，但是这些努力最终均宣告失败。

欧几里得古朴的几何学对其他领域的人类思维活动产生了潜移默化影响，它为建筑、艺术创作、航海和天文学的发展奠定了基础。在科学领域里，这构成了牛顿关于运动及万有引力的所有论述的基础。300年前出版了牛顿著名的《原理》一书，在不经意的读者看来，它很像一部篇幅浩瀚的几何学论文，这是因为牛顿原本就是一位利用几何学原理来描述宇宙的大师。17世纪的数学家这方面的本领达到了炉火纯青的地步。几何学在逻辑上具有绝对的明确性。这也是世界的运行方式。牛顿学派认为世界的运行就像钟表般的精确，这种决定论的观点正是从几何学原理中推导出来的。在17世纪和18世纪里，这种逻辑的明确性被应用于许多其他的领域里。牛顿学派运用数学的明确性建立了政府及人类行为的模式。牛顿认为上帝是存在的，其论据就是自然中的几何学原理所具有的数学明确性。几何学向学生传授了一套绝对正确的思想体系，它以被观测到的世界为前提，运用完美无缺的逻辑方法推导出结论。它经得起任何貌似正确的诘难。它论证了人类能够获得终极真理，并且能把万能的上帝比做伟大的几何学家及自然界的设计师。几何学以其明确性在纷乱的人类思维活动中犹如岩石般地矗立着。

18世纪康德的哲学体系认为几何学具有十分特殊的地位。这个体系糅进了欧几里得几何学的逻辑必然性。康德认为欧几里得几何学是一种先决性的知识，即逻辑上必然正确的知识。在康德看来，这种必然性是人类思维方式的性质所决定的。人类大脑的思维方式决定了我们必须从几何学中发现数学真理。

康德的不可知论对18世纪及19世纪的英国影响不大，最能代表独特的“英国”思维方式的是欧几里得几何学。英国人普遍认为，空间是一种独立于人脑的结构；经过演绎欧几里得几何学的各项定理，我们已经十分明确地发现了空间的本质。在其他的实践领域里，我们还无法如此深入地走进上帝的思维里，我们的

知识还不够全面，还不能像几何学那样深刻地反映客观现实。

欧几里得几何学并不是反映客观世界的惟一的、必然的和绝对的真理，这个发现令人瞠目结舌。它的意义深远，对科学的进程产生了不可逆转的影响，并且推翻了对人类各种思维活动的绝对论观点。尽管长期以来数学家们一直努力维护欧几里得几何学的地位，但是那些对传统的精确性持否定态度的科学家却从中看出相对主义才是世界存在的规律。“非欧几里得主义”这个片语的涵义已经超越了空间的领域。

罗巴切夫斯基、高斯以及鲍耶经过复杂的运算和讨论，意识到有许多种方法可以解释世界，欧几里得几何学只是其中的一种。针对一个弯曲的表面，比如一个球体表面，我们可以建立与欧几里得几何学相类似的定理和推理规则，由此可以推导出一个逻辑上无懈可击的体系，但其结论却与欧几里得几何学的结论大相径庭。平面上两点之间的最近距离是连接这两点的直线，这个定律当然是正确的，而在球体上画出一个三角形，它的三个内角之和就不等于 180° 。欧几里得著名的第五条定理（即两条平行的线永远不会相交的“平行原理”）如果应用在弯曲表面就会推导出错误的结果，人们并不能利用这条定理推导出弯曲表面上的两条平行线的互不相交的结论。在今天看来，人类居然用了这么长的时间才形成这个思想，似乎令人费解。大家都知道，地球的表面并不是一个平面，我们眼皮底下有着数不胜数的弯曲表面。艺术家和航海家早已习惯于在弯曲的表面上划出连接各点的最短路径。更具有说服力的是，假如我们透过一个失真的透镜或者一个反射镜去看世界，我们将会看到一些与欧几里得几何学不同的、变形的几何形状。有别于欧几里得几何学的几何形状具有独特而确定的性质，这表明肯定存在着一些支配变形的几何学的定理，而这样的定理仅仅是欧几里得几何定律的变形的结果。本哈德·黎曼修正了毕达哥拉斯有关直角三角形各边长度的关系的著

名理论，对各种可能成立的几何学作出了系统的总结（欧几里得几何学是其中最简单的一种）。

新的几何学体系的传播遇到了极大的阻力，其中的一部分阻力来自于数学家。在很长一段时间里，非欧几里得几何学被认为是某种逻辑奇观，很可能在某个环节上存在着漏洞。虽然弯曲表面是明显存在的，但几乎所有的人都认为我们赖以活动和存在的现实空间就是欧几里得几何学所描述的那个空间。这个空间是宇宙万物运行的固定舞台。

当时的数学家并不认为只要保持逻辑的一致性就可以任意创造公理体系，如欧几里得几何学的规则和定理。公理系统揭示了客观世界中事物的运行规律，它绝不是纸上谈兵。算术和几何学就是我们比较熟悉的两个公理体系。

欧几里得几何学并不代表上帝赋予客观世界的惟一属性，这个发现使 19 世纪后期的人们对所有类似的偏见和信仰产生了疑问。文化相对论正好与查理·达尔文的进化论以及西蒙·拉普拉斯的星云说汇合在一起（星云说将太阳系的起源解释为原始气体流动的结果），并产生了巨大的能量。这些领域里的研究成果只是推测可能存在的真实情况，而推测也许会产生各种各样的结论。这些研究成果不同于其他的“科学革命”，它们认为，与欧几里得几何学并存的非欧几里得几何学只是一种描述世界的特定方法。在描述我们的居住空间这方面，欧几里得几何学依然是正确的，所不同的只是它已不再拥有绝对真理的至尊地位。几何学其他学派是可能存在的，它们的逻辑性与欧几里得几何学相比并不逊色。我们可以说欧几里得几何学确实体现在宇宙的运行之中，但这并不能证明它是描述宇宙的惟一正确的方法，而不能是其他方法。这个观点对数学本身的影响十分重大。公理的概念第一次从现实世界中分离出来，数学由此而构筑出无穷无尽的合乎逻辑的“纸上世界”，并且细分为理论数学和应用数学两大部分。数

学既可以看做是一种描述事物如何运动的工具，也可以看做是一门展示各种逻辑联系的学科。我们在以后的各章里会看到，这使人们对数学性质产生了全新的看法。爱因斯坦在 1915 年发现，在我们生活的空间里有一种非欧几里得几何学的现象，它由宇宙中的质量和能量所创造，他在这个基础上提出了新的万有引力理论，使情况出现了戏剧性的变化^①。

非欧几里得几何学不再是建立在纸上的逻辑体系，它与欧几里得几何学的区别也不只是因为上帝在构筑宇宙时选择了后者。对宇宙的观察验证了爱因斯坦的非欧几里得空间理论的正确性。真实世界终究不全是欧几里得学派所描述的那样。欧几里得几何学的偏差是非常小的，在整个太阳系的范围内只占有几十万分之一概率，但是科学家对自然的观察无可辩驳地证明了这些偏差的存在，也恰好验证了爱因斯坦的预测。

古代欧几里得学派已经丧失了原来的至尊地位，与此相似的是新一代数学在其发展过程中否定了一种根深蒂固的观念，即在 A 之后出现 B，其结果与在 B 之后出现 A 是一样的，加法和乘法就有类似的交换率，如 $1 + 2$ 和 $2 + 1$ 的结果都是一样的。到了 1843 年，爱尔兰物理学家及数学家威廉·汉弥尔顿利用非交换率创建了逻辑完整严密的代数学（他称之为四元数）。非交换率的行为在实际生活中并不罕见。先穿鞋还是先穿袜子这个例子很好地说明了不同的顺序会带来截然不同的结果。汉弥尔顿的贡献标志着一个时代的开始，在这个时代里，数学家可以运用预先确定的、逻辑连贯一致的组合规则，自由地创造符号系统，则无需考

^① 在 1900 年代的最初几年，德国的一位天文学家卡尔·史瓦西撰写了一部鲜为人知的报告，在这篇报告里，他利用非欧几里得空间几何学创建了一个受牛顿引力学说支配的宇宙模型；此外，早在 1850 年，本哈德·黎曼认为，宇宙的几何形状是受自然力支配的，一位英国数学家威廉·克利福德在将黎曼的部分著作翻译成英语的过程中进一步地发展了这个思想。

虑这样的系统是否描述了现实世界的某一部分。

19 世纪初期，一些绝对论者认为自由与民主是组织政府的最佳形式，人们普遍认为这是人类历史的最高形式。《美国独立宣言》完美地表述了这一时代精神。在 19 世纪行将结束的时候，一种新的相对论成为普遍的潮流，而欧几里得学派所追求的明确性受到了怀疑，这构成了一幅此消彼长的历史画面。人们再也不相信世界上还存在着伦理、法律和人类行为的最佳体系。非欧几里得几何学的兴起表明，人类活动的许多方面都一定的公理，人们依据它们可以推导出一整套与现存权威相对立的价值。这样的例子在政治、伦理、法律和社会学中不胜枚举。“非欧几里得学派”这个词已经超越了数学的领域，开始成为非传统的激进思维的代名词，它所传递的信息是，逻辑的连贯性是一个必要的条件，但它并不足以证明某种既定的思维方式的逻辑一致性。比如有一篇文章的题目是《非欧几里得经济学的发现》说明了这个问题。此外，一些研究将传统的基督教伦理比做欧几里得学派，又将激进的伦理比做非欧几里得学派。人类学家们重新评价人们对非西方文化的看法。过去，人类学家以与西方文化的绝对“理想”的接近程度作为评定非西方文化的尺度，而现在他们更明确地认识到这些具有等级性的价值尺度其实存在着许多含混不清之处。在所谓的新世界中，一些反政府的评论家把美国的政治和法律制度看做是欧几里得理论的体现，因为这些制度是建立在一些“不言自明”的真理基础上的。

在非欧几里得几何学问世之前，人类对世界的看法是统一、自信而明确的。人类随后认识到，上帝并不仅仅是一位几何学家。那种认为客观世界只存在一种不容质疑的真理的观点已经消亡，在几个世纪里，人们相信有许多不容质疑的真理都可以解释宇宙，而且它们都是可知的。万能的上帝走下了神坛。