

电子图书



信息技术的结晶

人类文明的载体

网络的基本资源

阿基米德的报复

“科学与人译丛”出版说明

英国著名科学专栏作家布赖恩·阿普尔亚德在其《理解现在——科学与现代人的灵魂》一书中有这样一段话：

“1609年，加利莱奥·伽利略使用一架望远镜观看月亮。这一时刻，对世界的意义如此重大，以至人们将它与耶稣的诞生相提并论。因为，就像在伯利恒，自这一时刻，人类生活中的不可能成为可能。”

阿普尔亚德据此将科学划分为伽利略之前的科学，或称“智慧”，以及从1609年开始的现代科学。前一科学建立在推理基础上，后一科学建立在观察与实验基础上。经过如此划分，我们习以为常的科学，竟然只有400年的历史。

但人类就在这400年内经历了飞速发展。

我们有了蒸汽机，有了轮船，有了电话、电报，有了飞机、火箭，有了电视、电脑、互联网络，我们还有重力场理论、元素周期表、量子力学、相对论乃至被称为“自然中最基本物体”的超弦。工业革命、农业革命、信息革命使人类的社会生活发生了前人难以想象的变化。

人类改造了自然，也改造了人类自己。回顾这一切，人类完全有理由感到自豪。因为，人类就像上帝，也有自己的“创世纪”。人说，要有科学，就有了科学。科学是好的，它行之有效。

然而，“创世纪”中写道“到第七日，上帝造物的工已经完毕，就在第七日歇了他一切的工，安息了”。而人类的工却没有完毕，400年后的今天仍然不能安息。

就像有光必有影，人在发现、发明、创造、拥有上述一切的同时，还得到了原子弹、氢弹、核泄漏、酸雨、温室效应、臭氧层空洞乃至伴随科学技术而来的种种风险。

人类曾以为已找到了通往自由王国的必由之路，他将乘着科学的飞船，摆脱一切束缚，重新确立自己在宇宙中的位置。但在科学爆炸的二十世纪，人类终于开始反思：

科学行之有效，但它是否就是真理？

为此，我们编辑了这套《科学与人译丛》，陆续分辑推出。其中，有对信息崇拜的批判，有对生命起源的求索，有对技术所导致风险的分析，有对世界最新科学动态和研究方向的展望。数学家用对策论证明，完全的民主实际上并无可能；物理学家提出全新的超弦理论，试图统一描述所有的力、物质的所有基本粒子和时空，继量子力学和相对论之后，成为“第三次物理学革命的重要标志”……《译丛》汇集了物理学家、数学家、生物学家、天文学家、哲学家、人类学家、伦理学家……自本世纪后半期、尤其是在本世纪末打通自然科学与社会科学之间的隔膜，对科学这一决定人类命运的工具的深刻思索。通过这套丛书，我们期望读者可以对科学的现状、科学的未来、科学的正面与负面效应，有一个较为全面的了解，更好地认识科学、掌握科学、利用科学。

中国对外翻译出版公司

1997年2月

前言

阿基米德的头脑较之荷马有更丰富的想象力。

——伏尔泰

伊萨克·牛顿有句著名而又谦逊的格言：“我所以比别人看得更远，是因为我站在巨人的肩膀上。”当时，他心中确实铭记着古代最伟大的一位数学家，希腊叙拉古城的阿基米德。然而，阿基米德还是一位力学天才，在他众多的机械发明中，有水车，又称作阿基米德螺旋泵，是一种用于抽水进行灌溉的螺旋状泵。虽然人们对于阿基米德的生平以及他对自己的功绩的评价知之甚少，但多数评论家猜测，他对于自己在理论数学上的发现比实用发明更重视。例如，一个叫普卢塔克的写道：“而阿基米德具有这样一种崇高的精神，这样一种深奥的魂灵和这样一种科学理论的财富，虽然他的许许多多的发明为他赢得了声誉，并使他以‘超人的精明’而闻名，但他并不愿为这些课题著书立说，流传后世，而把一个工程师的工作和有助于生活需求的每一件艺术品都视为卑贱和庸俗。他只潜心于研究那些不受生活品需求影响的精妙而有魅力的学科。”其他评论家则进一步认为，甚至当他从事杠杆、滑轮或其他机械研究时，他也是为了探索力学的普遍原理，而不是为了实际应用。

实际上，阿基米德对于理论的偏重胜于实际到什么程度可能永远不得而知。但有一点是清楚的：在他的作品中，理论和应用之间的关系是紧张的，而这种紧张的关系一直持续渗透到以后 22 个世纪的数学之中。

本书主要概述了数学所涉及的领域和范畴。我并不认为这本书包罗万象，然而它选择的主题很离奇，但它也只能如此。数学是世间每所大学都从事研究的一门学科，它至少像生物学一样有广泛的领域，在生物界中，某个研究人员正努力研究艾滋病毒，而另一个研究人员则在研究袋熊的社会化问题。

我对数学的探讨犹如我在研究中国菜谱，到处品尝，识别常见的配料和特殊的风味。在仅仅用过一次中餐之后，你很难成为一名中餐美食家，但比起从未吃过中餐的人却又知之较多。数学亦如此。研究几个数学课题，是不可能掌握数学中一切重要的内容的，但比起那些一窍不通的人来，你对这些课题的感受却又深得多。

目前已出版了许多论及数学方面的哲学基础的书籍，从某种程度上讲这是必然性的科学，因为它的结论在逻辑上是无懈可击的。还有许多作品却狂热地详述数学无穷大的性质和高维度的美。这种带有哲学式的、富有诗意的离题的论述却有它的市场，但却远没有涉及大多数数学家们所关切的问题。我在本书中主要描述的是那些数学工作者在实际中所遇到的地地道道的实用的问题。

我还想批驳一个错误观点：仅仅肯花力气进行足够的运算，就可得到数学的任何结果，换句话说，如果你想解一道数学题，只需做足够量的运算就行了。即使你我缺乏解数学难题的能力，但我们也怀疑内行人士——这些理解数学符号的人——是否都能够对他们选择的任何问题经过潜心研究后找到答案。毕竟，我们的知识使我们相信数学是属于演绎推理，推断一个数学结果要像推论“所有人都必定要死的”和“苏格拉底是人”，

因此“苏格拉底必定要死的”一样简单就好了！

我写作本书的目的之一是要说明一种数学知识的局限性。在我们所考查的每个数学领域中，我要指出什么是已知的和什么是未知的。有时我们的知识是有局限的，因为某些领域刚刚开发，还没有多少数学家投身于对它的研究。知之甚少是这一问题的主要困难。此外，数学家的知识的局限性也是比较重要的因素。它表明，这些问题要从数学方面获得快速解简直是不可能的。

数字中充满了新奇。数字和形状是人文科学中最早关心的课题，但有关的许多问题仍然令人费解。比一个素数的概念更简单的能是什么——一个大于1的整数，像3, 5, 17, 或31等不能被1和本身之外的其他整数整除的数？早在古希腊人的时代就知道素数是无穷尽的，但是没有一个人知道孪生素数——成对的素数，如3和5，相差2，它们是否也是无穷尽的。没有人知道是否存在无限多的完全数，像6一样等于它所有因子（当然除去它本身外，即3, 2和1）之和的整数。而且没有人知道一个完全数是否是奇数。匈牙利伟大的数论家保罗·厄尔多斯是一个证明素数基本定理的大师——他在18岁的时候，就提出了著名的论证：在每个大于1的整数和它的倍数之间一定有一个素数——他认为，数学家们还远远没有理解整数，更何况其他类型的数。他说：“至少还得再过100万年，我们才可能理解素数。”

在数学上，对形状的理解也远远不够。在二维方面，关于什么形状可以在一定条件下用砖瓦贴盖表面的问题还有许多疑难未解之处。在三维的砖瓦贴面模拟中，形状的填充要尽可能使给定的空间密集，这对于许多基本形状来说仍悬而未决。但是，缺乏理论知识未必总是实用主义者的拦路虎，设计师罗纳德·雷施制造出三层半的复活节彩蛋就是明证。

由于有关数字和形状的基本问题仍未解决，因此对计算机——一种复杂的数字工具——能做什么和不能做什么常常众说纷纭，并出现一些混乱状态，这不足为怪。我尽量避开那些关于人和机器的本质的含糊不清的形而上学问题，便于向人们展示人们所不了解的关于计算的理论局限性方面的问题。我要讲述图灵通用计算机的惊人之处——分成若干单元的一条纸。我要考查一种可能出现的局限性：计算机科学家认为，他们将能够证明某些仅仅在探索阶段的计算问题——包括旅行推销员在一连串的城市之间要选择的最短路线的问题——从来没有被计算机（或数学家）有效地解决。从理论转移到实践，我特意检验了汉斯·伯林纳和丹尼·希尔设计的对弈机和通用计算机，使“三个臭皮匠，顶过诸葛亮”的构想走向极端。要知道这些努力的整个结局如何还为时过早，但这两种机器的性能在某些领域，已经超过了传统计算机。

从根本上说，旅行推销员问题无疑是数学问题，可是实际上已证明，用传统的数学方法解答它是无效的。在这本书里，我将介绍一种出现在设计选举系统或分配代表的问题中的类似的解决办法。从绝对意义上说，数学对这些问题是毫无帮助的。的确，数学证明了，它对开创一个完善的民主选举制在理论上无益，尽管缺乏完善的民主体制，但数学为公正的选举制和国会的公正分配方法指出了道路。

传说阿基米德是在一时的愤怒之中设计出一个关于牧牛的极其困难的数字问题。他的报复一直持续了22个世纪，直到1981年，使用刚诞生的

一台巨型计算机才彻底解决了这一问题。牧牛的问题多少有些编造的味道。但是，面对阿基米德的报复，一代代数学家所感受到的挫折常常类似于那些比较自然地出现的较简单的数学问题所造成的报复。这种数学本身造成的报复看来还没有迹象会消退。

一个令人惊奇的宗教学生，
解出了无穷大的平方根，
这使他对计数烦躁不宁，
他终于放弃了数学又继续学神。

——无名氏

第一篇 数 字

在古希腊，没有社会保险号码，没有电话号码，没有人口调查统计数字。没有选举后的投票数字，没有统计数据，也没有 1099 个表格要填。当时，世界还没有数字化，但数字在希腊知识分子的头脑中至关重要。确实，在公元前 6 世纪，萨摩斯的毕达哥拉斯通过研究数字创立了一种宗教，因为，他不仅把数字看成记数的工具，而且看成神圣、完善、友好、幸运及邪恶的符号。数学的一个分支称作数论，研究的是整数的性质，就是由古希腊人开创而且至今不衰的。

以下 3 章专谈数论。在这几章里，我强调指出，某些最古老并且听起来是最为基础的问题仍然悬而未决。虽说其原因尚不清楚，但至今悬而未决这一事实本身却赫然耸立，从而排除了认为数字不过是某种刻板活动的看法。数论曾被视为数学最纯的分支；似乎对现实世界毫无实用价值。然而近年来，数论已变成密码学的一个强有力的工具。不过，正如我在第四章“比尔密码之谜”中所探讨的，至今还存在着数学分析无法破译的传奇密码。

第一章 邪恶的数和友好的数

现为麻省理工学院大学生的迈克尔·弗里德曼，1985年在布鲁克林高中毕业班就读时春风得意，获得了当年的威斯汀豪斯科学天才奖的第三名。为了他这一获奖项目，他不想用海虾、果蝇或扁虫来弄脏自己的手，也不想处理随便任何一个多年遗留下的理论上的问题。不，他只是挑选了堪称数学上最古老而未决的问题来对付。那是困扰着古希腊人和自那以后的每个人的一个问题：即存在奇数完全数吗？

毕达哥拉斯及其好友认为，整数的完满性，即完全数是任何其所有除数之和（该除数本身外）等于该数本身的整数。第一个完全数是6。它可被1、2和3整除并且是1、2和3之和。第二个完全数是28。它的除数是1、2、4、7和14，这些数加起来为28。希腊人所知道的就是这些，尽管他们做过尝试，但没有发现奇数完全数。

圣经评论家注意到，完全数6和28反映在宇宙的结构中：上帝在6天内创造了世界，月亮每28天绕地球一周。然而，使这些数字成为完全数的是其本身，而不是凭经验所了解的世界的任何联系。圣·奥古斯丁是这样表述的：“6本身是一个完全数，并不是因为上帝在6天内创造了万物才如此；倒不如反过来说才对：因为6是完全数，所以上帝在6天内创造了万物。即使不存在6天工作一说，6依然会是个完全数。”

“数学的整个领域都极其散漫，”坦普尔大学数学教授小彼得·哈及斯说，“我研究完全数是出于闲散的好奇心，因为它可能是最古老的未决问题。研究它也许意义不大，然而这一问题如此古老，没有人认为对之进行研究完全是浪费时间。如果这一问题是5年前第一次提出来的，那它是决不会令人感兴趣的。”

无论在哪一领域，达到完善总是很难的，偶数完全数也不例外。但是，人们至少知道它们是存在的。我们已发现了30个偶数完全数，最大的是一个由13万位阿拉伯数字组成的庞然大物： $2^{216,090} (2^{216,090} - 1)$ 。也许第三十一个完全数不会出现了，因为早在2300多年前数学家就已知道有无穷多的素数（即只能被1和它本身整除的数），但在同一时期，他们却不能决定完全数是不是无限的。

要是在俄国茶室或“四季”咖啡馆里喝着可乐会见迈克尔·弗里德曼我会很高兴的，但他宁可让我们在斯替韦桑特中学他的校长办公室中见面，而该校是曼哈顿数学家和科学家的中心。传说，爱因斯坦不能做加减运算，但可在睡梦中研究高深的数学。迈克尔的情况也可以这么说。在选择我们会见时间这种简单的事情中就体现了出来，因为这位杰出的小伙子不适于将中学时间——“第三节”和“第五节”——转换成我们常人所遵照的小时和分钟。然而一旦我们真聚到了一起，这位腼腆的天才就口若悬河地谈论起来，一下成了使人兴趣盎然的人了。

迈克尔告诉我：“去年我为一位数学老师写一篇论文，我知道关于奇数完全数的问题。这问题使我感兴趣，因为它很简单，可还没人找到答案。”接着，迈克尔首先回顾了完全数的历史。

古人只知道4个完全数，它们是：6，28，496和8，128。欧几里得认识到——大概只有古希腊的神祇才晓得他是如何知道的

完全数	位数
1 . 21 (22-1) =6	1
2 . 22 (23-1) =28	2
3 . 24 (25-1) =496	3
4 . 26 (27-1) =8 , 128	4
5 . 212 (213-1) =33 , 550 , 336	8
6 . 216 (217-1) =8 , 589 , 869 , 056	10
7 . 218 (219-1) =137 , 438 , 691 , 328	12
8 . 230 (231-1) =	19
9 . 260 (261-1) =	37
10 . 288 (289-1) =	54
11.2106 (2107-1) =	65
12. 2126 (2127-1) =	77
13.2520 (2521-1) =	314
14. 2606 (2607-1) =	366
15.21 , 278 (21 , 279-1) =	770
16.22 , 202 (22 , 203-1) =	1 , 327
17.22 , 280 (22 . 281-1) =	1 , 373
18. 23 , 216 (22.317-1) =	1 , 937
19. 24 , 252 (24 , 253-1) =	2 , 561
20.24 , 422 (24 , 423-1) =	2 , 663
21.29 , 688 (29 , 689-1) =	5 , 834
22. 29 , 940 (29 , 941-1) =	5 , 985
23.211 , 212 (211 , 213-1) =	6 , 751
24.219 , 936 (219 , 937-1) =	12 , 003
25.221 , 700 (221 , 701-1) =	13 , 066
26. 223 , 208 (223 , 209-1) =	13 , 973
27.244 , 496 (244 , 497-1) =	26 , 790
28. 286 , 242 (286 , 243-1) =	51 , 924
29.2132.048 (2132 , 049-1) =	79 , 502
30. 2216 , 090 (2216 , 091-1) =	130 , 100

30 个完全数

这 4 个数是由公式 $2^{n-1} (2^n - 1)$ 当 $n=2, 3, 5$ 和 7 时推出来的。算式如下：

$$n=2, 2^1 (2^2 - 1) = 2 (3) = 6$$

$$n=3, 2^2 (2^3 - 1) = 4 (7) = 28$$

$$n=5, 2^4 (2^5 - 1) = 16 (31) = 496$$

$$n=7, 2^6 (2^7 - 1) = 64 (127) = 8, 128$$

欧几里得看出，在全部的 4 个算式中， $2^n - 1$ 是素数(3, 7, 31 和 127)。这种发现促使他证明一个重要的定理：当 $2^n - 1$ 为素数时，那么公式 $2^{n-1} (2^n - 1)$ 则得出偶数完全数。

欧几里得的证明使得完全数理论有了一个兴旺的开端。但由于其他数

学家的短视，这一理论进展缓慢。许多思想精微的人自以为他们看出了数字模式，其实这些数字并不存在。如果他们看得更远一点，他们就会发现这种模式是虚幻的。

古人观察到，前 4 个完全数都是以 6 和 8 结尾的。进一步说，最后一个阿拉伯数字似乎是 6, 8, 6, 8 地交替出现。所以有人推测，完全数最后一个阿拉伯数总会是 6 或 8，并且它们会继续交替出现。第五个完全数——古代人并不知道——的确是以 6 结尾的。但第六个完全数也是以 6 结尾的，这就打破了交替出现的模式。然而，关于最后一个阿拉伯数字总是 6 或 8 这一点，古人还是正确的。今天，数学家可以研究 30 个完全数——比古人多出 7 倍以上——但他们还必须找出尾数为 6 和 8 的模式。

古人还观察到，第一个完全数有一位数字，第二位完全数有 2 位数字，第三个有 3 位数，第四个有 4 位数。所以他们推测，第五个完全数会有 5 位数。在欧几里得死去 17 个世纪后发现了第五个完全数，它赫然具有 8 位数：33, 550, 336。并且位数继续迅速增多，以下 3 个完全数分别为 8, 589, 869, 056；137, 438, 691, 328；和 2, 305, 843, 008, 139, 952, 128。

欧几里得证明了一旦 2^{n-1} 是素数，那么 $2^{n-1}(2^n-1)$ 就会得出一个完全数，但他并没有说 n 的哪一个整数值会使 2^n-1 成为素数。由于使 2^n-1 为素数的前 4 个 n 值为前 4 个素数 (2, 3, 5, 7)，可能有人推测：如 n 为素数， 2^n-1 也会是素数。那么，让我们来试试看第五个素数：11。如 $n=11$ ， 2^n-1 则为 2, 047，而 2, 047 并非素数（它是 23 和 89 的积）。真实情况是：要使 2^n-1 为素数， n 必须是素数，而 n 为素数并不意味着 2^n-1 是素数。事实上，对于 n 的大多数素数值来说， 2^n-1 并不是素数。

由 2^n-1 一式得出的数列现在称作默塞纳数列，马林·默塞纳是 17 世纪的巴黎僧侣，他在尽僧职之余抽空进行数论的研究。根据欧几里得的公式，每发现一个新的默塞纳素数，就会自动出现一个完全数。1644 年，默塞纳自己说， $2^{13}-1$ ， $2^{17}-1$ 和 $2^{19}-1$ 这 3 个默塞纳数是素数 (8, 191; 131, 071 和 524, 287)。这位僧侣还声称 $2^{67}-1$ 这个巨大的默塞纳数会是位素数。在 250 多年的时间里，没有人对这一大胆的声音提出疑问。

1903 年，在美国数学协会的一次会议上，哥伦比亚大学教授弗兰克·纳尔逊·科尔提交了一篇慎重的论文，题为：论大数的分解因子。数学史家埃里克·坦普·贝尔记下这一时刻所发生的事：“一向沉默寡言的科尔走上台去，不言不语地开始在黑板上计算 2^{67} 。然后小心地减去 1，得出 21 位的庞大数字：

147, 573, 952, 589, 676, 412, 927。

他仍一语不发地移到黑板上的空白处，一步步做起了乘法运算：

193, 707, 721 × 761, 838, 257, 287

两次计算结果相同。默塞纳的猜想——假如确曾如此的话——就此消失在数学神话的废物堆里了。据记载，这是第一次也是惟一的一次，美国数学协会的一位听众在宣读论文之前向其作者热烈欢呼。科尔一声不吱在他座位上坐下。没人向他提任何问题。”

在欧几里得证明他的公式总是得出偶数完全数的大约 2, 000 年之后，18 世纪的瑞士数学家伦纳德·尤勒证明，该公式将得出全部的偶数完全

数。这样，我们就可以用另一种方式提出奇数完全数问题：是否存在不是由欧几里得公式得出的完全数呢？

为弄清最近取得的进展，年轻的米歇尔·弗里德曼埋头翻阅过期杂志：《计算数学》、《数论杂志》、《数学学报》及一堆决不会在咖啡桌上看到的其他期刊。他甚至参阅理查德·盖伊的艰深的经典著作《数论中的未决问题》，该书不仅讨论完全数，而且还探讨十几个其他神秘专题：“近超完全数”、“友谊图表”、“优雅图”、“贪婪规则系统”、“纽环游戏”、“达文波特-施尼茨尔系列”、“半友善数”、“友善数”和“不可接触数”。

米歇尔知道，困于这一棘手问题的数论学家们验明：如果真有奇数完全数存在的话，所必须具备的各类特征有：它必须被至少 8 个不同的素数整除，其中最大的一定要大于 300,000，次大的也要大于 1,000。如果奇数完全数不能被 3 除，它至少应被 11 个不同的素数整除。此外，当一个奇数完全数除以 12 时，它应有余数 1；当它除以 36 时，它的余数应该是 9。

我们从这些验证中能得出什么结论呢？对奇数完全数的限制越多，奇数完全数存在的可能性就越小。1973 年，彼得·哈吉斯运用这样的限制条件并借助于计算机肯定地证明了 10^{50} 以下没有奇数完全数。米歇尔从盖伊的书中看到，自 1973 年以来，其他数论家“渐渐地把奇数完全数不可能存在的上限推到 10^{100} ，尽管有人对后面这一证明表示怀疑”。

既然与盖伊一样有权威的人对这些证明提出质疑，米歇尔决定重新研究更低限问题。他运用 IBM PC 机及一组限制因素，包括一些文献中极少提到的来自印度的限制因素，证明在 10^{79} 之下不存在奇数完全数， 10^{79} 有 8 个素数因数——这是一个奇数完全数所能有的最少的素数因数的数目。

米歇尔说：“我在论文中只是引用了盖伊的话：以前（关于奇数完全数低限很高）的证明是可疑的。当我参加威斯汀豪斯决赛时，我决定检查其他一些证明，但没有发现它们可疑的原因。因此，我给盖伊打了电话，他告诉我，数学家不喜欢由计算机做出的证明，因为你没法知道：编程序的人出继漏了吗？计算机出故障了吗？”

即使该计算机的计算错误（比如说在别的计算机上）被检查出来，但由于那些证明本身常常很长并且很复杂，因而除了原作者没人对它们一步步地仔细加以审查。只有哈吉斯的证明（整整长达 83 页！）曾由其他数学家全面地审查过，并宣布为有充分根据。

米歇尔哧哧地笑了，他不无骄傲地说：“我的证明也是可疑的。威斯汀豪斯的人们不是没有理解就是满不在乎。就我所知，没人真正审阅过我的论文。”

根据他的论文及其他辅助材料，米歇尔成了从多达 1,100 名参赛者中选出的 40 名威斯汀豪斯决赛选手之一。他们 40 人被召到华盛顿，在那儿决出 10 位优胜者。米歇尔解释说：“一旦你来到华盛顿，那几乎就不是根据你的论文来看了。一组科学家对你进行面试，他们会问：‘你如何测出太阳与地球间的距离？你如何测出华盛顿纪念碑的高度？’有一女孩说：‘用卷尺测量。’有位科学家领带上面附有半张元素周期表，他就元素周期表问题向每个人提问。有些人注意到了领带并径直读出答案。我不这样，因此我不得不记住氧的质子数及电子层数。”

米歇尔补充说：“向我们提问的还有一位精神病医生。”我吃了一惊。

“当我谈到精神病医生时，人们都感到吃惊。他向人们询问他们的家庭生活。威斯汀豪斯想发现未来的诺贝尔奖获得者。那才是他们的大事。他们希望在前 10 名中有未来的诺贝尔奖获得者。”米歇尔解释说，过去有 5 名威斯汀豪斯决赛选手（一年有 40 个，并且这种竞赛一直进行了 44 年）获得诺贝尔奖，但这 5 人之中，只有 1 人是前 10 名的。米歇尔耐心地向我解释，威斯汀豪斯这种做法还不如随意选择呢。（每年从 40 名中随意选择 10 名会在前 10 名中产生出 1 25 名诺贝尔奖金获得者。至于怎么会有 0 25 个科学家到斯德哥尔摩去领奖就只能留给数学家去想象了。）那些精神病专家显然是被请来从参赛者中发现获诺贝尔奖人物的苗子，以便提高他们的比例的。

米歇尔接着说：“我的指导人在我的申请中写道，我不会放过一个问题，我是非常固执的。因此，精神病专家就固执一事整整问了我 15 分钟，‘你怎么个固执法？你考虑过固执会给你今后的生活造成损害吗？你是否会就是因为你曾经反对过某些建议而根本拒绝接受呢？’”

既然米歇尔成功地进入了前 10 名，那也许可以说固执是荣获诺贝尔奖桂冠者的部分品性。对威斯汀豪斯（以及米歇尔）来说，不幸的是：没有数学或计算机科学方面的诺贝尔奖。如果他一心要获得这方面的诺贝尔奖，恐怕最终只好去摆弄海虾了。

其实，米歇尔如果放弃完全数会更有利于他的健康。其他研究完全数时间太长的人结果都不可避免地陷入到古人的数字神秘主义中去。文艺复兴时的数学家米歇尔·施蒂费尔和彼得·邦格斯没能解开完全数之谜；施蒂费尔错误地宣称，除 6 以外的所有完全数可被 4 整除，邦格斯也就尾数做出错误的判断。他们在摆弄过数字的完满性之后转向了相反的性质——罪恶，他们是在那个臭名昭著的凶数——666——上发现罪恶的。

华莱士·约翰·斯坦霍普——保罗·内森的科幻小说《牛顿的天赋》中的物理学家——为这一想法所困扰，即牛顿和往日其他科学巨子一定在乏味的数学计算上费了很多的时间。试想一下可怜的牛顿由于算术上的简单错误而无休止地拖延了重力的发现的情形吧！当斯坦霍普发明了一种背囊大小的时间机器时，他决定到 1666 年的英格兰去——当时牛顿正处在他的黄金年华，恰巧，那年还是那场世纪性瘟疫的最后一年——送给牛顿一个袖珍计算器。斯坦霍普的动机无疑是要把牛顿的非凡的大脑从乏味的计算中解脱出来。

可是，牛顿害怕这个计算器，尤其是它通红的数字显示：“上帝是我的救主，它是魔王的发明吗？它的眼睛闪耀着魔鬼王国的颜色呢。”

“你不能不相信你自己的眼睛，”斯坦霍普回答说，“让我演示给你看它是如何工作的。我只要按几个钮就可以给你除两个数。”斯坦霍普随便地按了几个数：81,918 除以 123。当得数亮出来时，牛顿立刻双膝跪倒在地并开始祈祷。然后，他站起来，猛地从火炉中抓起一把烫手的拨火铁棍向斯坦霍普掷去，斯坦霍普这才慌忙逃回到今日的时空坐标中来。

牛顿粗暴的反应可由斯坦霍普不幸选择的数来解释：81,918 除以 123 正巧是 666：凶数。信仰宗教的牛顿在可怕的红灯中惊恐地看到倒下的大天使在他面前悸动的指纹。据说，正是这次与魔鬼的遭遇才促使牛顿写神学著作。

虽然这个精妙的故事是虚构的，但它在精神上与牛顿迷恋于玄奥和超

自然是一致的。牛顿就宗教和神学问题写下了 130 多万字的著作。他写了很多方面的文字来解释先知的语言，他无疑对《圣经》关于凶数 666 的预测很熟悉。由于其他研究科学和数学的人都陷于 666 的神秘性中，因此有必要探求一下该数是如何得此恶名的。

在中世纪，一群以希伯来神秘主义哲学家闻名的犹太学者就异教徒指出《圣经》中明显的矛盾、琐屑和谬误做出了睿智的回答。这些哲学家声称，《旧约》中的许多内容是用密码写成的。这是《圣经》显得紊乱的原因。然而，一旦破译出密码，一切都会豁然开朗，神的真谛也就被揭示出来了。破译的主要方法是隐语解法：通过对所有字母进行处理，将一个词或短语转换成数，以预定数值代替每个字母，并算出这些数字之和。他们认为该字母或短语与其他具有相等的和的词或短语有关。

例如，《创世纪》第十八章第二节：亚伯拉罕举目观看，“瞧！有 3 个人在对面站着”，但没有指明这 3 个人是谁。神秘主义哲学家们运用隐语解法发现这 3 个人是大天使米歇尔、加百列和拉斐尔。如果把希伯来原文的字母“瞧！3 个人”代之以相应的数，它们的和为 701，与“这些是米歇尔、加百列和拉斐尔”字母相应数之和相等。神秘主义哲学家们通过类似的数学破译密码法回答了《申命记》第三十章第十二节中提出的问题：“谁替我们上天去？”这些词的希伯来文所有字母合在一起得出的和与“割礼和耶和華”和希伯来语所有字母之和相等，这意味着上帝认为割礼是去向天国的通行证。这种以数学解《圣经》的方法激发了犹太学者对数学的兴趣。

基督教神学家们很快采用了神秘主义哲学家们的神秘分析方法。《新约》本身实际上推动了在姓名与数字之间寻求对应关系的应用，正是在那儿第一次出现了 666 这个数。《启示录》第十三章第十一节警告邪恶力量：“我又看见另有一个兽从地中上来。有两个角如同羊羔，说话好像龙。”7 行后，我们知道了这只兽是与 666 这个数相关的一个人：“在这里有智慧，凡有理解力的人可以计算兽的数字：因为这是人的数字，他的数字是六百六十六。”但这人是谁呢？上文所述诱使我们人名使用隐语解法来确认这头兽。

这头兽是敌基督或假基督。在《圣经》里所记的时代，假基督被认为是罗马皇帝。他通过创立一种异教而对上帝的统治进行挑战，这种异教崇拜皇帝并有自己的教士。《圣经》评论家怀疑这头兽是罗马皇帝尼禄，但要从他的名字中得出 666 来需要经过多次处理。如果把尼禄的名字用希腊语写成尼罗恩，再加上独裁者的称号，然后将独裁者尼禄合译为希伯来文，再将字母转为相应的数字，总数相加之和就是 666。

不管怎样，神奇地把该兽描绘成名数为 666 的人使得一代又一代的占数家绞尽脑汁。在 16 世纪，数学家们也参与其中。德国修道士米歇尔·施蒂费尔研究过代数和数论。他是首先使用加号+和减号-的人之一。他偷偷地把对该兽之数的奇特解释写入一本论代数的经典著作中去。施蒂费尔决心指摘教皇利奥十世的品性，他要对宗座之名进行曲解。

他把十拼成 DECIMUS（拉丁语“第十”），然后按罗马人的习惯把 U 改为 V 而得 DECIMVS。他从 LEO DECIMVS 中挑选出为罗马数字的字母——L，D，C，I，M 和 V，作为额外增添而从 LEOX 中加进 X。这样，施蒂费尔通过以数代替这些罗马数字而计算出该名字的数值： $L(50) + D(500) + C(100)$

$+I(1) + M(1,000) + V(S) + X(10) = 1,666$ 。

啊！多了1,000。施蒂费尔想，数值为1,000的M一定是代表mysterium（神秘）。他从这组字母中除去神秘正好得出了666。他做出这一发现后背弃了出家人的誓言而成为马丁·路德的追随者。

如果施蒂费尔把注意力集中到该教皇拉丁语尊号之一的罗马数字上，他就会更为令人信服地获得同样的结果，该尊号为Vicar - ius Filii Dei，其计算结果为： $V(5) + I(1) + C(100) + I(1) + U(5) + I(1) + L(50) + I(1) + I(1) + D(500) + I(1) = 666$ 。

尽管如此，施蒂费尔还是努力获得了他想要的东西。罗马天主教徒为这种叛逆的发现所激怒，威胁要杀死他。1522年，他避难到路德自己的家中。路德很高兴有一个新的皈依者，但要他忘记占数那玩意儿。施蒂费尔没有理会这一劝告而开始从《圣经》中搜寻世界末日到来的线索。他深信世界末日是1553年10月18日，并到处传播这一消息，结果被捕。随着这一天的临近，他教区的教民倾其积蓄大肆吃喝。而当他们10月19日一早醒来看到世界依旧平静时，他们想杀死这个骗子，由于路德的干预，施蒂费尔才免于一死。对施蒂费尔来说，一生中面临两次死亡威胁已经够受的了，因此他放弃了预言而全身心地投入到数学中去。结果他成了16世纪德国一位杰出的代数学家。

我要补充的是，施蒂费尔对那头野兽的数字的解释并非没有引起争议。他的同时代人、长达700页《数的奥秘》一书的作者彼得·邦格斯试图悄悄把该数应用于路德本人。选取马丁·路德的名字Martin Luther，姓用拉丁语则成MARTINLUTERA。然后，让A至I的字母代表1—9的数字（I和J按当时的习惯可以互换），K到S的字母代表10—90（均乘以10），T到Z代表100至700的数（均乘以100）。邦格斯根据字母和数之间的这种联系看出： $M(30) + A(1) + R(80) + T(100) + I(9) + N(40) + L(20) + U(200) + T(100) + E(5) + R(80) + A(1) = 666$ 。想想看嘛！

除666外，《圣经》为趣味数学提供了许多启示。如果《圣经》中运用的某个数不是像100或1,000这样的大整数，古人就认为该数有神秘的意义。一般来说，如果一个数被发现具有某些别致而简单的算术特征——往往与一连串整数的和或积有关，那么这个特别的数则具有了神秘的意义。例如，在约翰福音的第二十一章第十一节中，耶稣和他的门徒在太巴列海成功地进行了一次捕鱼行动。当他们把那网鱼拖上来时发现共有153条鱼：“西门·彼得就去把网拉到岸上，那网盛满了大鱼，共153条，鱼虽然很多，网却没有破。”153在数学上有何特殊之处呢？想一想，然后我再透露实情。

首先， $153 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17$ 。换句话说，它等于1至17间所有整数之和。

但153的魔力还不止这些。它可用另一种重要方式来表示： $153 = 1 + (1 \times 2) + (1 \times 2 \times 3) + (1 \times 2 \times 3 \times 4) + (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$ 。现代数学家会更简练地写出这一等式： $153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ ！如果一个数后面跟着一个感叹号，你就可以得到从1到该数本身所有整数的乘积。这种运算被称作求阶乘。

一位学者大致按照这种方法发现如果把153中各位数的3次方相加也可得出153。可简单地表示为， $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ 。据数学作家马丁·加德纳

说，1961年，菲尔·科恩（以色列约纳姆人）告诉英国反传统周刊《新科学家》说，153 潜藏在每个含有因数 3 的数中。我要留给读者自己去推算科恩在《新科学家》中谈及的内容。不过这里有一个提示：选取 3 的任何倍数，计算出其各位数字 3 次方之和。再计算出得数的各位数字 3 次方之和。就这样不断地算下去。

我们再来看看《圣经》中的另一个数：220。《创世纪》第三十二章第十四节记载，雅各布给以扫 220 只山羊（母山羊 200，公山羊 20）以示友好。但为何是 220 呢？毕达哥拉斯的信徒们探求出作为“友好”的特别数字，而 220 则是这些数字中的第一个。友好数的概念是基于人的朋友是一种变相自我这一看法而来。毕达哥拉斯曾说：“一个朋友是另一个我，如同 220 与 284 一样。”这两个数在数学上有何特别突出之处呢？

原来，220 和 284 相互等于对方真除数之和（真除数是能被一个数整除的所有除数[包括 1，但不包括该数本身]。）220 的真除数为 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 和 110。果然， $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ 。而 284 的真除数为 1, 2, 4, 71 和 142，它们之和为 220。

虽然古人对友好数很感兴趣，但第二对友好数（17, 196 和 18, 416）直到 1636 年才由皮埃尔·弗马特发现。到 19 世纪中期，许多有才能的数学家为发现一对对的友好数做了长期而艰苦的努力，结果发现了 60 对友好数。而直到 1866 年，才发现次最小的一对友好数：1, 184 和 1, 210，它是由一位 16 岁的男孩发现的。

现代数学家将友好数的概念从一组 2 个扩展到一组 3 个。在一组友好的 3 个数中，任何一个数的真除数之和都等于其他两个数之和。103, 340, 640；123, 228, 768 和 124, 015, 008 就是如此。另一组友好的三个数为 1, 945, 330, 728, 960；2, 324, 196, 638, 720 和 2, 615, 631, 953, 920。但对我来说，这种数看起来不像友好数。诚然，如伟大的创造性数学家约瑟夫·马达奇所说，3 个一组的友好数并不易发现，在上面这一组数字中 3 个数分别有 959, 959 和 479 个除数。

数学家们虽然注意到了“保障来自反复”这一古老谚语，他们可不是见好就收的人。有人想看看如果选一个数，算出其真除数之和，然后再算出该和的真除数之和，如此往复无穷，会出现什么样的情形。在大部分时间里，计算总是索然无味，但如果你一直这么做下去，就会难得地在某处回到了原来数上。以 12, 496 为例，其真除数为 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 71, 88, 142, 176, 284, 568, 781, 1, 136, 1, 562, 3, 124 和 6, 248。这些数相加，得 14, 288。再把 14, 288 的真除数相加，得数为 15, 472（如果你不相信可以自己试一试！）。再做两次这样的运算，会先后得出 14, 536 和 14, 264。现在看 14, 264 的真除数，它们分别为 1, 2, 4, 8, 1, 783, 3, 566 和 7, 132。将这 7 个除数相加，噢，你看，是 12, 496。如果你不怕浪费时间的话，就从 14, 316 这个数开始做同样的运算。你会在 28 轮后重新得出这个数！

第二章 阿基米德的报复

当那位伟大的印度数学家斯里尼瓦萨罗摩奴阁得了结核病住在伦敦医院时，他的同事 G. H. 哈迪去看望他。这位哈迪从来就不善于激起谈兴，他对罗摩奴阁说：“我是乘坐出租车来的，车的牌号为 1729。对我来说，这个数字似乎很枯燥，我希望它不是个凶兆。”

“胡说，”罗摩奴阁回答说，“这个数字一点也不枯燥，相反它非常有趣。它是可以用两种不同方式表示的作为两个 3 次方之和的最小数。”（罗摩奴阁不知怎么立即就辨别出 $1729 = 1^3 + 12^3$ 和 $9^3 + 10^3$ 。）

罗摩奴阁死于 1920 年，年仅 32 岁。他是一位数论学家，是研究整数属性的数学奇才。数论是数学中最古老的领域之一，在一定程度上说也是最简单的领域。数当然是数学最普遍的基础材料，然而，关于它们仍然还有许多根本问题没有解答。

公元前 3 世纪，当波加的阿波罗尼奥斯天真地继续研究阿基米德的大数时，可能不知晓等待他以及数代数学家的将是什么。“我要让你们看一看谁懂得大数，”阿基米德想。据说，他出于报复之心而虚构出关于牧牛的计算问题，解决这一问题所需的数字是如此庞大，以致直到最近才得以解决。而且，解决这一问题的并不是人而是机器：世界上最快的电脑。

提出类似牧牛这类极其困难的问题只不过是阿基米德许多令人难以置信的功绩之一，这些功绩使他在他那个时代就成了一个传奇式人物。公元前 212 年，罗马将军马塞卢斯围困了西西里的叙拉古港，该城之王希伦请求王亲阿基米德驱逐 60 艘敌舰。阿基米德不久前发明了杠杆（他因此说了这句名言：“给我一个支点，我会搬动整个地球。”），他将杠杆和滑轮结合在一起制成巨大的吊车，这些吊车将那些入侵的战船吊出了港口。在战斗中，吊车还得到弩石弹射器和凸面镜的协助，凸面镜把阳光聚焦到船上使船着火。结果，罗马舰队遭到了毁灭。马塞卢斯说：“我们不要和这个几何怪物进行战斗了，他拿我们的船当杯子，从海中舀水。”

阿基米德使敌人 3 年不敢接近。后来，有一个晚上，当叙拉古人忙于宗教庆典时，罗马士兵攀上城墙并打开城门。当马塞卢斯的军队蜂拥而入时，他告诉部下说：“任何人都不得斗胆对阿基米德妄动一个手指头，这人是我们的座上宾。”

马塞卢斯的一个士兵在庭院中找到阿基米德，其时，阿基米德正在沙地上画几何图形，这位士兵违抗指令而拔出了剑。阿基米德请求说：“我的朋友，在你杀死我之前，请让我把我的圆画好。”这位士兵没有等待就把剑刺向阿基米德，阿基米德躺倒在地，喃喃地说：“他们夺走了我的躯体，但我将取走我的灵魂。”说完安然死去。

按照阿基米德的愿望，人们在他的墓碑上刻了一个圆柱体，柱体里面是一个球体——象征着他的骄傲的发现：球的体积是装下该球的最小的圆柱体体积的三分之二。

这个传说有多少是真的呢？阿基米德无疑是位机械天才。有充分证据表明他设计出能将 50 磅弩石抛出 300 英尺远的弩石弹射器。但近来对技术史的研究排除了他建造了能从海中吊起敌船的吊车的可能性。这种神话的根据可能是他发明过一种将他自己（不动的）的船吊到岸上来的吊车式的装置。

许多科学巨匠包括加利莱奥·伽利略和法国博物学家布丰伯爵，乔治-路易斯·莱克勒都对阿基米德用镜子焚烧敌船感兴趣，它与儿童用放大镜点燃纸片非常相似。理论上说这种镜子是可以制造的，但它要有一个保持太阳光线聚焦于移动目标上的可变焦距，普通镜子是做不到这一点的。（1747年，布丰声称用一个复杂的镜子使150英尺远的木头着了火，并熔化了140英尺远的铅。）不管怎样，阿基米德不会费力去制造一个特别镜子的，因为那时已经出现了一种简单而高效的燃烧武器：将石脑油与一种同水接触即自动燃烧的化学物质相混合装入罐中，人们把这种罐子掷向敌船。

对阿基米德之死的生动描述可能相当真实，尽管人们会对他所说的话表示怀疑。公元前75年，伟大的罗马演说家西塞罗来到阿基米德的墓旁，发现墓碑上刻有外切一个球的圆柱体。

牛群的问题是怎么回事呢？它真是首先由阿基米德提出来的吗？别管阿基米德是否真是出于一时赌气而凭空想出这个问题的，人们知道他确曾推算过这个问题，因此至少有2,200年的历史了。

这个问题开始是这样的：“啊！朋友，如果你智慧过人，那就专心致志算出那天那群公牛的数目吧。它们曾在西西里岛的大平原上吃草，按毛色它们被分成4组：乳白牛、黑牛、黄牛和花斑牛。每组中的公牛数占大多数，它们之间的关系为：

$$1. \text{白公牛} = \text{黄公牛} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \text{黑公牛}。$$

$$2. \text{黑公牛} = \text{黄公牛} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \text{花斑公牛}。$$

$$3. \text{花斑公牛} = \text{黄公牛} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \text{白公牛}。$$

$$4. \text{白奶牛} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \text{黑牛}。$$

$$5. \text{黑奶牛} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \text{花斑牛}。$$

$$6. \text{花斑奶牛} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \text{黄牛}。$$

$$7. \text{黄奶牛} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \text{白牛}。 ”$$

该问题继续说：“啊！朋友，如果你能算出每群中公牛和母牛的数目，你还是称不上无所不知或精通数字，也不能被列入智者之列。”于是该问题涉及到其数学的本质部分：解7个带有8个未知数的等式（4组不同颜色的公牛和4组相应颜色的奶牛）。原来，这些等式并不难解。事实上，它们有无限多的答案，而牛群总头数的最小数值为50,389,082，这些牛可以在西西里6,358,400公顷的大平原上自由自在地吃草。

然而，阿基米德并未就此停止。他对公牛数目另外又提出了两项限制条件，从而使这问题变得难多了：

$$8. \text{白公牛} + \text{黑公牛} = \text{一个平方数}。$$

$$9. \text{花斑公牛} + \text{黄公牛} = \text{一个三角数}。$$

问题最后说：“如果你已算出这群牛的总数，噢！朋友，你俨然就是