

楔子

我在一所社区大学教数学，每当开学上第一堂课的时候，我总是提出这样一个问题作为开场白：我问班上学生为什么要选修数学课，然后我把他们的回答写在黑板上。他们的理由听来都不错，也极为充分且合理那些理由当中包括：我需要这门课的学分才能毕业；数学对我将来的工作会有帮助；数学能协助我管理私人财务；数学训练有助于我教育子女，诸如此类。可是，这些理由统统没有命中标的。

接着，我告诉学生上数学课的真正理由，我在黑板上写上两个大字：“兴趣”。他们一看就笑了，我知道他们笑些什么，脑中作何想法：“这怪物是从哪个星球蹦出来的呀？”可是如果我不是数学教师，如果我教的是音乐或者美术，就不会有人笑了。

其实，数学和音乐、美术一样，都能够为我们的人生添加意义，增加深度，使生活更多姿多彩，一直延伸到迟暮之年。事实上，这个世界若没有数学，它会是一个很无聊的地方。然而我们的年轻学子大都厌恶数学，他们选修数学的最主要原因

是非修不可；按照学校规定，学生必须具备一定的数学能力才能毕业。如果数学不是列为必修课程，恐怕我老早就失业了！数学的名声为什么会如此难堪呢？

我们的孩子在成长时期都不喜欢数学，这全是因为大人教得不对。数学自小学开始就是必定要教的学科，每一位教师都要让学生学习到某种程度的数学。可是对许多教师来讲，数学本来就不是他们喜欢的学科，甚至也不是他们在大学里爱读的题材，一旦当起教师，很可能也不会热心教，只是依照规定授课罢了。

学生都是观察老师身体语言的能手，立刻看出数学不是老师中意的玩意儿，那么他们又何必认真学呢！老师是教室中唯一的大人，如果大人不喜欢数学，那么数学一定有什么地方不对劲。这样的现象在音乐课和美术课里不会发生，因为音乐或美术教师都用最大的热情来教导学生。

其实，数学、音乐和美术有类似的艺术形式，所以数学应该像音乐、美术一样，由喜爱它的教师来传授。很不幸，目前的情况还没有改善的趋势，我们依然该让孩子跟随那些自己就厌烦数学、对数学毫无热情的教师学习数学。有些运气较好的学生，上高中时会遇到好的数学老师，运气不那么好的，要等到大学里才有机会，可是有一部分学生，可能终生都没能受教于献身数学的老师。

四大迷思

20世纪以来，美国一些成年人散布对数学的畏惧，硬制造出许多会永久伤害数学教育的错误观念。大多数的成年美国人

无法与数学产生共鸣，他们不但大放厥词，还将谬论极力散布到公众之中。我们周围充斥那些虚构的道理，不仅是危害数学，甚至妨碍我们发挥现代人的应有潜能。

简言之，那些错误观念包括：

一、数学枯燥无味。

二、数学家尽是些刻板的大胡子老头儿，隐居于大学校园里，与现实脱节。

三、世界上共有两类人：一类是懂得数学的人，一类是像你我这些不懂数学的人。

四、女孩子（女人）缺乏数学头脑，不过反正她们也不需要。

我有一个好消息要告诉你：这些错误观念都不正确！但是很不幸，大多数成人却都信以为真。让我们看一看第一种说词：“数学枯燥无味。”没有任何谬论比这句话更远离事实了；数学不仅十分有趣，甚至令人震惊、激动，可说是甜酸苦辣，五味俱全。

现在你大概窃窃暗笑，认为我在大做广告，向你推销冒牌货。可是你不妨悄悄溜到一群数学家中间，聆听他们的谈话，你会发觉他们讨论数学时都带着一股爱，那不是淡淡的爱，而是全心全意、热情洋溢的爱。怎么可能呢？大多数人厌烦的东西，数学家怎会如此欣赏呢？这其中的奥妙很多，有一部分正是本书准备介绍的。

人人都可以是数学家

我们现在继续掂量第二种错误观念：“数学家尽是一些刻板的大胡子老头儿，隐居于大学校园里，与现实脱节。”在你内心深处是否也藏着同样的想法呢？然而，大学校园里的数学家只占世界上全部数学家中一个很小的百分比而已，因为分散于世界各地的数学家，有许多在工商业界安身立命。如果定义得更广泛些，每一位数学教师也都算是数学家。

我有时候会接到读者来信，通常那些读者都自认为不属于职业数学家。麻省塞勒姆市（Salem）的雷纳德·西密尔先生，是55岁的退休商人，只有高中毕业程度，来信提供我两个数学构思。第一个是关于主恒星的复杂计算，老实说我始终搞不懂是怎么回事，这儿就不多言了。第二个构思则是检验素数的方法。

最近20多年来，数学家相当注意检验大数的方法，以判定哪个是素数，哪个不是素数。素数是只能被1和它自己整除的正整数，其他的数（除了1）就叫做合数；例如7与11是素数，而6是合数。现在工商业界使用电脑传递编码信息时，多半利用大的合数（两个大素数的乘积）来编码，因此编码员有兴趣知道一个大数是不是素数，也有兴趣学习把大数做素因数分解的新方法。

因此当我看到雷纳德检验素数的方法，自然觉得有趣，就顺手检验了几个数，居然每次的结果无误！他是不是发现了新的检验方法呢？我决定使用代数符号语言，重写雷纳德的程序，经过几次运算之后，我终于得到一个和雷纳德算法⁽¹⁾有相同概

念的方程式。

这个方程式看来眼熟，于是我查阅了一本数论的书籍，发现雷纳德的算法正是费马^[2]一个著名定理的特例之一。费马是现代数论之父，他于大约 350 年前得到这个重要的定理，后人称之为“费马小定理”，我和数学打交道多年，从未留意过它，据我所知我的同事也没有碰过，然而雷纳德却遇到了。如果他在 350 年前就提出这个构思的话，那么现在这个算法就应该叫做“雷纳德小定理”了。

再举一个例子，是我大学时的同学蓝迪^[3]，他可称得上是象牙塔传统之外的数学家。

蓝迪在内华达州长大，成人之后大部分时间是个牛仔。他从未念完中学，一向不怎么醉心于书本和学习。有一天他为了一个女子与人发生冲突，失手将对方打死，被判杀人罪，在犹他州立监狱服刑，服刑期间为打发无聊，就开始读书。

有一天他拿起一本数学书来看，从此着迷于数字以及各种数学关系式。在监狱里他自修基础数学，假释之后参加犹他州立大学的入学考试，结果成绩优异，校方不在乎他缺少高中文凭，予以录取。我是在大学里认识蓝迪的，和他一起修过几门课，他那时在言行与穿着上仍然十分牛仔，不过他也是数学家。我们毕业之后，他在一家加拿大公司谋到数学分析师的工作。

从上述两个例子，我们应该可以得到很有价值的启示，那就是：数学不是名校教授们的私人领域，而是无数普通人可在每个地方享受的题材；任何人都可以做数学，只要他对某个题材有兴趣，愿意来体验数字本身以及数与数之间的关系。费马本来也只是业余的数学家，然而他成为解析几何的创建者之一、

微积分领域的开路先锋，同时也建立了数论的近代论题。所以，我们有必要采用更广泛的定义，来看究竟什么样的人数学家。

我觉得，只要收入的大部分是得自他或她从事做数学或教数学的工作，或者只是喜欢数学、为了绝对的兴趣而演算数学，这些人统统都可以称为数学家。替《科学美国人》撰写“数学游戏”专栏长达 25 年的葛登能，是 20 世纪最多产的数学书籍作家⁽⁴⁾，但他并没有受过正规的数学训练。然而无论如何，我敢大声说他比目前仍然在世的任何人，更懂得基础数学。

不要拿“没有数学头脑”当借口

我们已准备好去粉碎第三种错误观念：“世界上共有两类人：懂得数学的人，和其他像你我这些不懂数学的人。”这种说词我已记不得听过多少遍了。我的母亲就反复说这样的话：“我就是没有数学脑袋。如果有人问‘火车在几时几分离站……，’我就知道我完了，我头都昏了，站在那儿动都不能动。”

很多人相信，婴儿生下来就各不相同，有些有数学头脑，有些没有。那些不具数学脑筋的婴儿，无论一辈子怎样学习，都不可能搞懂数学，所以就任由他们去吧。这真是无稽之谈。

有些人似乎很快就能捕捉到抽象的概念，这点倒是真的。这些人学习数学就比较快，著名数学家的传记通常能让我们看到，他们早年就具备数学天分。然而别有用心的人把这种特例普遍化，创造两类头脑的谬论，作为他们不愿学数学的借口。于是，既然你没有数学头脑，有什么道理叫你去与数学辛苦搏斗，就可言之成理了。

我们应该了解，每个人的一生中，有很多不同的才能会在

不同时间，以不等的程度，出现在我们身上。不能因为有些人天生有音乐感，毫不费力就学会演奏音乐，于是其他人就不必学习音乐了；或者说“老虎伍兹”是天生的高尔夫球选手，所以我们这些爱打高尔夫球的凡人，都应该收起球杆！

事实上，一般人（包括你和我）的知识才能，是居于钟形曲线（正态分布）的中间地带，只要我们愿意，就能学到我们所要学的数学。当你看到一个人，轻易演算一堆看似复杂的数学——很容易设想他或她必定有“数学头脑”但是你所看到的能力，其实是人家经过多年努力学习而得到的。一般人并没想到，数学其实与运动和音乐很相似，如果勤加练习，就能做得很好。我希望所谓数学头脑的谬论就此打住。

错误观念四：“女孩子/女人缺乏数学头脑，不过反正她们也不需要。”今天的两性平等意识，让我们认清这种说法是错误的，然而在许多情况下我们还是信以为真。以美国为例，六年级的女生在标准数学测验里，平均成绩优于同班男生，可是到了高中三年级时，情况颠倒过来了，男生的成绩超越女生。

那么从六年级到高中三年级的那段期间，发生了什么事呢？老师、家长和社会大众都一致告诉女学生她们学数学不行，甚至一再告诫说：“无论如何你最好不要考得比男朋友好，叫他觉得难为情。”这样的态度不仅对成千上万的女孩子不公平，剥夺了她们享受数学乐趣的权利，更使她们无法在数学领域做出贡献，甚至令社会整体蒙受损失。

我们需要更多数学家担任教师，或在企业中担任创新的数学工作，可是我们用偏见使半数青年失去机会，让她们不能在数学领域中规划生涯，光是这样，我们就失去了多少年轻的数

学高手？

数学观念，就是我们学习的目标

只是驳斥这四个错误观念是不够的，还必须更深入批判，必须改变社会对何谓良好教育所下的定义。在过去的某些社会里，完善的教育中数学占有一席之地；在古希腊社会，教育不但包含音乐、修辞学和科学，也特别包含数学。在柏拉图学院的大门上就刻有这么一句名言：“不懂几何学的人不许进入此门！”柏拉图学院是我们所知的世界上最古老、最伟大的学校之一。

我们的大学制造大批文艺及科学领域的毕业生，其中有许多人从未领悟过数学究竟是什么，充其量只不过学到了有限的计算过程，足以拼凑出某类问题的答案而已。当有人鼓励他们拓宽视野，多选修各种数学时，他们就反问：“我学了要干什么用？”

数学是科学使用的语言，是工业和商业上的伟大工具，同时，数学不但使学生有高超的能力，解决困难的现实问题，还能协助学生了解宇宙如何运行。我们的教育必须涵盖数学，不但是因为数学赋予我们解决问题的能力，它还能协助我们认识我们居住的宇宙，对于宇宙发生的各种基本过程，有更深一层的了解。

数学是直接而即时的喜悦之源，所以数学观念的本身就是我们学习的目标。我打算用本书的篇幅提出几个数学观念，让作为读者的你也能享受到数学家的喜悦。

只要你能够做基础算术运算，对代数具备基本认识，就可

以优游穿梭于本书介绍的数学中。有时我会暂停前进，提示你在学校里学过的代数知识。有了这些知识，你将可以明白现代数学的伟大思路，包括解析几何、微积分、矩阵代数，等等。

推动数学的三股力量

在我们正式开始之前，容我再介绍一个论点。当我们看着数学从古代苏美尔人的简单算术，一直发展到 21 世纪奇妙复杂的数学世界，我们还会一再思考这个论点。这论点指出，许多数学的进展是由三种知识力的合力所推动的，它们是：一、推广；二、延伸至无穷；三、改良的符号体系。

所谓推广（或称一般化），是要把一个定义扩张，以涵盖更多、更广的物件对象或思想领域。有时候我们也可以把多个不相连的研究领域，合并为单一的观念领域。

第二种力量，数的延伸，发生于我们想把数系扩张至无穷的时候。过去，数学界有两组人马在对抗，其中一组想让思维局限于有限集合，另一组人则对无穷的概念跃跃欲试。这场争论到今天都尚未停止。

第三股力量，是我们想扩张数学的符号系统，让我们的系统涵盖某些情况下使用的简单形式，以及其他情况下所使用的较复杂形式。因此，数学的成长究竟是停滞还是快速前进取决于数学家创建符号代数的速度有多快。正如书写文字采用了元音及辅音，而得到改良的记法，数学也因为发明新符号，而增强了计算能力。

所以我们要留意观察这三股驱动力：推广、数的延伸以及符号体系，看它们如何推动数学的发展。

启用知识的器官，欣赏数学

最后，我们要以一个非常哲学的问题来作为这段旅程的结束：数学到底会使这个广阔的宇宙有何不同？数学是否只是人类发明的一种复杂游戏，当我们不存在时它也消失无踪？或者，数学本来就在创造宇宙及万物的蓝图之中，是其中的一部分？

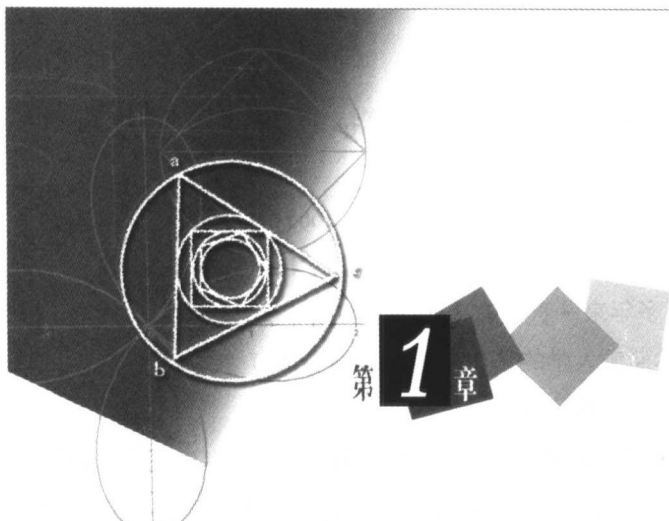
我期望在后面的篇幅中，能让你一窥数学的精美内涵，让你体会数学家感受到的喜悦。和音乐与美术一样，我们必须学习，才知道数学题材内有什么宝藏，何以诱使数学从业人士产生这般情怀。

我尽力劝说大家喜爱数学，而我又用音乐与美术作类比，其实十分不利，因为后面这两种艺术呈现给欣赏者的是立即的官能感受，耳朵和眼睛能回应音乐和画作的精细美丽。可是，数学大多不会取悦感官，无论是对视觉或是听觉；数学无非是一种知识型的迷人消遣。我们也许能够用细腻的图画传递信息，但不要误以为数学本身就是图画。我们必须启用知识的器官来欣赏、领会数学，而不是使用感觉的器官。

你必须主动参与，才能和我一同沉醉；你要在心中建构出我带给你的那些奥妙关系。数学无法像音乐与美术一般被动式的欣赏，你必须主动加入。我在这里邀请你与我做伴，一起来挑战这一趟伟大的遨游。我们即将出发，以最深入的方式，发掘数学让人着迷的原因。

注 释

- [1] 算法 (algorithm) : 用来解算特定问题的流程或一系列的步骤 .
- [2] 费马 (Pierre de Fermat, 1601 ~ 1665 年) , 法国数学家 , 于 1637 年提出费马大定理 (Fermat's Last Theorem) 这个定理 350 多年来一直没有人能够证明 , 最后终于在 1994 年 , 由普林斯顿大学的怀尔斯 (Andrew Wiles) 教授证明出来 .
- [3] 蓝迪不是他的本名 .
- [4] 葛登能 (Martin Gardner, 1914 年出生) 的数学推理著作有数十本 如 : 《跳出思路的陷阱》、《啊哈 ! 有趣的推理》、《葛老爹的推理游戏 1、2》、《迷宫、黄金比、索马立方体》、《诡论、铺瓷砖、波罗米欧环》等 .



数字是怎么来的？

数字从计数与数目开始，所以若想要了解数学的起源，就必须上溯至最早使用数目的年代——这是最艰难的工作。尽管如此，这样的追溯却能帮助我们明了，数学是否只是人类的次要天性，是否只是一种意外的发明，或者了解到数学确实是人类主要天性的一部分。如果数学的确是我们生而为人的一部分基础，那么我们更该相信数学能够、也应该由社会上各式各样的人来分享，而不是由“大胡子老头儿”独享。

找到计数的起源，就方便我们知道数学的本质，帮助我们认识那股创造出数学的驱动力。人类创造数目的最早动机，是要知道一堆物体有多少，换句话说，就是要知道袋子里有多少鸭蛋可分配给家人、族人要走多少天才能到达下一个饮水井、

还有多少天才会昼长夜短、需要多少个箭镞去交换一艘独木舟，等等。在上古初民的日常生活中，知晓该如何决定一堆东西的多少，诚然是一大动力。

要达到这个地步，就需要计数的行为，数学家把这行为称做“一对一映射”（one-to-one mapping）。当我们用手指计数时，是把唯一的一个数字指定（即映射）到特定一根手指，因此当我们计数完了，前面十个数字都分别指定给一根不同的指头。进行这项工作时，次序是很重要的，因为最后喊出的数字必须保证是我们计数物件的总数目，也就是该集合的多少；计数一个集合，就是量度它的多少。

当我们对一组或一堆物体做实物计数时，是在执行上述同样的映射，我们用手指头点算，一面以适当的次序喊出适当的数字。点完时最后喊出的数字，就是我们所要的数目。从这奇妙的计数过程，我们得到了自然数：1, 2, 3, 4, 5, ...，后面跟着的三个黑点（...）是省略符号，代表可以继续数下去。

发现计数的最早直接证据是两块兽骨，上面显现清晰的成组刻痕，其中一块是大约 35000 年前一只狒狒的股骨，在非洲列朋波山脉（Lebombo Mountains）发现的。另一块是在捷克发现的狼骨，年代约在 33000 年前（图 1），发现的地点是一处古人类的宿营地；这块狼骨特别有意思，上面有 55 条刻痕，每 5 条为一组，共分成 11 组。

我们知道，远在 33000 年前，尚未有耕种活动（农耕大约于 10000 年前才开始）也没有城镇。不过他们仍然是我们最近似的祖先——智人，即现代人种，这两块兽骨显示出，我们远古的渔猎采集祖先已经懂得计数了。

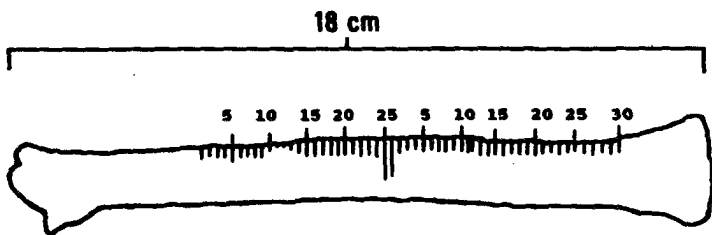


图1 阿勃沙隆博士 (Dr. Karl Absolon) 于 1937 年在捷克发现的一块 33000 年前狼骨的图示，上面有 55 条分组画出的刻痕，显示刻画的人具备计数的才能。本图示是依据 Lucas Bunt、Phillip Jones、Jack Bedient 所著《The Historical Roots of Elementary Mathematics》(出版者：New York: Dover Publications) 一书中的照片所绘成的。

计数有可能发生得更早吗？在现代人出现之前，可上溯至 130000 年前的尼安德塔人 (Neanderthal)，他们散布在中东、欧洲，确定不属于现代人，不过他们的脑子比现代人的大，成年尼安德塔人的脑平均体积大约为 1500cm^3 ，而我们的脑平均体积约为 1300cm^3 。他们有足够的智能去营建居室、用火、制造精巧器具、用花朵陪葬死者，甚至还举行宗教仪式。那么他们懂得计数吗？我们并不知道，只有等待考古学家来发掘了。

如果尼安德塔人懂得计数，那么计数的发生就要推前到 130000 年前了。有没有更早的呢？比尼安德塔人早很多的是直立人 (Homo erectus)，生存于 1500000 至 300000 年前，可能是我们早期的祖先。他们没有现代人或尼安德塔人的脑力，因为他们的脑室介于 900 立方厘米至 1100 立方厘米，大约相当于现代黑猩猩 (450 立方厘米) 和人类的中间。可是从他们的各种行为，透露出他们相当聪明：他们已会利用火，又从非洲远徙到

欧洲和亚洲；他们能制作细巧的工具，建造居室。同样的问题：他们懂得计数吗？同样的答案：我们不知道，只得仰赖考古学家去发现更多的资料。

计数的引进可能因为新的考古证据而往前推——作如此想并不算离谱；新的发现总会不断迫使我们人类祖先智能技艺发展的估计，朝向更早的年代修订。

许多学者把直立人描绘成躬着腰、毛茸茸、手持石块和木棒敲打大地的野蛮模样，然而在 1994 年，德国汉诺威历史保护研究所的提米（Hartmut Thieme），在汉诺威东方的煤坑里发现了一地窖的矛头，是 400000 年前的东西⁽¹⁾，这些矛头做得很精致，可能是一个晚期的直立人磨造成的，显示出直立人不是没有智慧的野蛮人，而有可能是身怀技艺和才能的狩猎者。

现在已有解剖学的证据指出，计数应该属于十分古老的行为，神经学家已经辨明某类行为与大脑的某些特殊部位有关。一般来说，语言能力与左脑有关，这里也是掌管一些如计划、执行连续运作等功能的大本营。在脑部左后方有一个特殊区域，提供我们认知手指和从事一些简单算术的能力。

将认知手指和计算技巧联结在一起，应当不会令人惊讶，因为我们的儿童开始学习计数时，就是把手指与数目关联起来，这两种行为由大脑的同一部位负责，显示出我们极长时间以来，一直使用手指来计数。

远在 33000 年前，我们远古的渔猎采集祖先已经懂得计数了。

如果计数能远远上溯到数十万年之前，而且还经由某种方式深植于我们脑中，那么计数与数目应该是我们天性的一部分，作为人类，就能计数也懂得数目。如果我们再观察到人们（甚至是一些自以为对数学毫无兴趣的人）从数目引发出多少娱乐工具，这种想法会更为强烈。

我们有许多博弈游戏使用到数目。用扑克牌赌 21 点，无论如何是一种计数的游戏：我手上的牌加起来的点数，会比庄家更接近 21 点吗？再补一张不会爆掉吗？掷骰子也是一种计数的游戏，输赢机会的计算相当复杂，但是那些玩家对于他们下的赌注并非常精于计算。你去过赛马场吗？去看看那些赌客像疯子似的计算赔率，以找出下一场马赛的赢家号码。

我们也将数字配合到音乐里面；使用数字来辨别我们的房屋及电话；人们研究各种复杂的指数，来观察股市涨跌。处处都用到数字、计算，及简易的算术。如果我们形容人类为会做工具、会用火的人猿，那么还有一个更确切的形容可以用在我们身上：我们是懂得计数的人猿。

数的抽象化

约于 10000 年前（公元前 8000 年）地球上的人类发生了重大的变化，在一个称为“肥沃月湾”的地区（包括今天的以色列、土耳其南部，及伊拉克的底格里斯—幼发拉底河谷一带），人们放下狩猎器具，开始耕种。农耕的兴起促使城市发展，因为人们能够终年定居在同一地方，已经毋须像他们的渔猎采集远亲那般，为了追逐猎物而四处迁徙。

然而他们必须做一些较为细致的工作，那是逐猎生活的前

人感到陌生的：他们要计划播种多少谷子；他们必须维护田地，储藏收成，分配粮食；城市发展起来了，又要保护自己不让外人掠夺，或是偷走他们的辛劳所得。为了组织军队和建立碉堡，于是政府诞生了，维持军队和建设城堡需要经费，政府就开始抽税！

所有这些新生事物，压向我们祖先的数学能力，因为仅懂得计数已不足应付，加减乘除四则运算，不但成为必需，更是不可或缺了。对于这段时期的算术技能，我们又拥有什么证据呢？由于一直到约公元前 3100 年才发明文字，所以这段时期的文字记载是不存在的。既然缺乏记载，我们就只能猜测，自公元前 8000 年至开始有历史记载之间的 5000 年中，究竟发生了什么事情。

多年来，人类学家在西亚的古代集居地，也是最初的农耕发祥地，找到很有趣的陶制小偶像，那些小陶偶做什么用呢？有些专家认为它们可能是原始的棋子^[2]，又或许是求旺子旺孙的偶像。但是找到的小陶偶有成千上万之多，其中许多是在普通居家地点发现的。当时会有那么多人下棋吗？

德州大学的舒孟特贝瑟鞞 (Denise Schmandt-Besserat) ，于 20 世纪 70 年代发现了答案。她从伊朗、伊拉克和土耳其的 113 处地点，收集到超过 8000 个陶土制品，并分门别类，然后断定它们是计算用的“算子”^[3]。农夫和村民使用那些烤硬的小陶偶，来记录他们的财物，有时还在几个“算子”外面裹上一层软土，再放在火边烤干，变成一个硬封套的样子，把记录的数目密封起来。有些“算子”的形状是用来表示某一个特定的数目，另有一些“算子”的形状是代表被计数的特定对象，可能是羊只，