考研数学题库精编系列丛书

理工类

线性代数题库精编

(修订2版)

王永葆　教授

东北大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

图书在版编目（CIP）数据

线性代数题库精编/王永葆教授．—2版（修订本）．—沈阳：东北大学出版社，2001.4

(考研数学题库精编系列丛书：理工类)

ISBN 7-81054-467-5

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第08498号

东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路3号巷11号 邮政编码110004)

电话：(024) 23890881 传真：(024) 23892538

网址：http://www.neupress.com E-mail:neuph@neupress.com

东北大学印刷厂印刷 **东北大学出版社发行**

开本：850mm×1168mm 1/32 字数：277千字 印张：10.75

2001年4月第2版 **2001年4月第1次印刷**

责任编辑：郭爱民 **责任校对：冯 伟**

封面设计：唐敏智 **责任出版：杨华宁**

定价：15.00元

编辑寄语

近年来,随着国家不断扩大研究生招生数额,大批有志的青年朋友纷纷加入到了考研大军中。于是,考研一族每天匆匆的行色、忙碌的身影便成为大学校园中一道亮丽的风景。如何遴选一套合适的参考书,使您既能系统地复习基础知识和基本理论,全面地掌握近年来考研的题型、题路、题质和题量,又能抓住重点、难点和考点,通过备“战”练“兵”进行强化训练,在较短时间内培养解题能力、增长实战技巧、提高应试水平,是一件至关重要的大事。“良好的开端,是成功的一半。”“好的教本,是成功之本”。

《考研数学题库精编》(理工类、经济类)系列丛书自2000年3月面世以来,以其题型全、题路新、题质高、题量大等特点,深受全国各地广大考生的青睐。一些考研辅导班的授课教师经过多方比较,最终选择本丛书作为授课的主要教本;许多读者因在当地书店未购到本丛书,纷纷来电、来函办理邮购事宜。更有一些数学专家对本丛书给予了较高的评价,并提出了很好的建议。所有这些,既是对我们丛书编辑的鼓励和信任,更是对我们的鞭策。

本丛书经过此次修订后,纠正了差错,弥补了疏漏,吸收了各方面的智慧,更好地体现了编辑思想和设计意图。该丛书主要具有以下特点。

一是紧扣考研大纲 根据《考研数学复习大纲》的要求确定编写内容,对重要的概念、定理、公式作出扼要剖析,便于考生加深理解,增强记忆,避免犯概念性错误或其他解题

错误。

二是精选典型例题 针对历年考研基本题型,精心遴选典型例题。对于重点例题,或在解题前给出【解题思路】,或在解题后归纳【解题技巧】,提供【方法总结】,以使考生切实收到举一反三、触类旁通之效。

三是突出重点难点 本丛书突出重点、难点和考点,并有"错点分析"、"易错提醒"和"巧点揭示",使读者在较短时间内快速掌握要害之处和关键所在,提高学习效率,取得最佳效果。

四是同步强化训练 书中每单元都精选了大量的同步训练题(但绝无超出《大纲》的偏题、怪题),供读者备"战"练"兵",以使读者更透彻地消化和理解所学内容,强化应试能力,大大提高临场的解题速度和准确性。

五是应试水平检测 每章后都选编了历届考研的数学真题,便于考生对应试水平、复习效果和综合能力进行完全检测,以便找出差距,制定应对措施。

值得一提的是,本丛书的作者都是多年从事考研辅导工作、经验丰富的知名专家、教授。书中每一个字符都凝聚着他们的智慧,是其心血和汗水的结晶。

最后,编辑将古希腊哲学家亚里士多德的一段名言转录于此,送给广大的考生朋友:

> "能够摄取必要营养的人,要比吃得很多的人更健康。同样地,真正的学者往往不是读了很多书的人,而是读了有用的书的人。"

愿本丛书能成为您备战应考的良师益友、斩关夺隘的得力助手。祝您旗开得胜,马到成功!

丛书编辑

2001 年 4 月

前　言

本书是根据国家教育部颁布的《考研数学复习大纲》要求的内容编写的。自从1987年全国硕士研究生入学数学统一考试以来，迄今已有十多年了。作者依据数学复习大纲以及这些年来统考命题的特点和历年在考研辅导班的教学经验，应广大考生的强烈要求编写了本书。应该说，这是一本应试之作。

本书内容包括线性代数中大纲要求的全部内容，即行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量及二次型等。

本书具有如下特点：

(1)精讲内容，重点突出。对考研大纲要求的重要概念、公式、定理进行系统梳理，集中讲解，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免概念错误及错用公式和定理。每章中的“内容精讲指要”就是为此目的而设置的.

(2)资料完整，代表性强。本书具有资料完整，分析详细、解题思路清晰和注意解题技巧的特点。多年来，作者一直在收集、整理和分析、统计、预测历年考研试题。自1987年至今约有1300道考题及有关资料，从中归纳提炼，使本书涉及到的内容既覆盖面广，又突出重点。

(3)典型例题，有的放矢。针对考研命题特点及考研大纲要求，讲解典型例题。本书注意基本概念、基本定理、基

需要全本请访问 www.ertongbook.com

本公式和基本题型的准确理解、表述和应用。每章中的“基本题型例析”就是为此目的而设置的。书中题型和考研题型基本相同,有“填空题”、“单项选择题”、“证明题”及“计算题”等。

(4)一题多解,注意比较。凡题目有多种解法的,一般均一一列举,并加以比较,指出各解法之优劣和繁简,以使读者的解题速度和答题技巧能有所提高。

(5)解题证题,思路清晰。对有代表性的题目,都指明解题思路或证明思路,对题目加以分析,使读者一目了然,注重培养读者分析问题和解决问题的能力。

(6)习题量大,备战练兵。题型仍是按考题格式编写。历届的考研真题,有代表性的,都收在其中,或作例题讲解,或作同步训练习题。所有的训练题均附有详细解答和提示。

本书是全国理工科硕士研究生入学应试的有益参考书。本书亦可作为在校本科生学习线性代数的参考书,对于从事教学工作的教师也可以作教学参考书。

由于编者水平所限,书中难免有疏漏与不妥之处,敬请读者及业内同仁批评指正,作者将非常感激。

王永葆 谨识

1999 年 12 月

再版前言

应报考硕士研究生的考生的需要,我们编写并于2000年初出版了《线性代数题库精编》。该书出版不到一年,就两次印刷,可见该书受到广大考生的欢迎,已成为许多考研辅导班选用的教材和考生复习时必备参考书。

本书面世以来,又有教育部的《2001年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》一书正式出版,我们认真地研究和分析新的数学考试大纲,留意命题内容和命题特点的变化,以及2000年硕士研究生入学的数学考题内容和未来趋势。在此基础上,我们对《线性代数题库精编》认真地进行了修订。对原书的六大特点予以保留,它们是:

(1) 精讲内容,重点突出;

(2) 资料完整,代表性强;

(3) 典型例题,有的放矢;

(4) 一题多解,注意比较;

(5) 解题证明,思路清晰;

(6) 习题量大,备战练兵。

现在,对于修订版,我们力求做到:

(1) 内容完备,系统复习　书中完整地介绍了考研数学大纲所划定的内容、题型和公式,使考生明确考试内容和要求,系统复习掌握所需知识,提高解题能力。

(2) 按大纲要求来编写　在选题方面,全书完全按新

的数学大纲来修订,既注意内容的覆盖面,又突出重点,也要难易适度,以适应实际应试要求。

(3) 内容不断更新完善　自本书出版以后,2000 年硕士研究生数学考题全部编入,一题不漏。可喜的是,有的 2000 年硕士研究生的考题是本书初版时的选题。例如 6-56 题就是 2000 年的考题。

(4) 注意未来发展趋势　本书注意到未来趋势,含有微积分、线性代数和概率统计方面的综合题目的出现,我们予以充分注意,让考生有这方面的适应能力。

修订版当然纠正了原版不当之处,但由于我们水平所限,难免有新的疏漏和错误,欢迎读者和业内同仁批评指正,作者将非常感激。

王永葆　谨识

2001 年 1 月 1 日

目　　录

再版前言

前　言

第一章　行 列 式…… 1

内容精讲指要…… 1
基本题型例析…… 6
同步训练题萃 …… 22
答 案 与 提 示 …… 39

第二章　矩　　阵 …… 55

内容精讲指要 …… 55
基本题型例析 …… 65
同步训练题萃 …… 79
答 案 与 提 示 …… 92

第三章　向　　量…… 113

内容精讲指要…… 113
基本题型例析…… 120
同步训练题萃…… 138
答 案 与 提 示…… 153

第四章　线性方程组…… 180

内容精讲指要…… 180

基本题型例析…… 184
同步训练题萃…… 197
答 案 与 提 示…… 212

第五章 矩阵的特征值与特征向量…… 235

内容精讲指要…… 235
基本题型例析…… 238
同步训练题萃…… 248
答 案 与 提 示…… 258

第六章 二 次 型 …… 281

内容精讲指要…… 281
基本题型例析…… 283
同步训练题萃…… 296
答 案 与 提 示…… 304

附录 2001年全国硕士研究生入学统一
考试数学试题(线性代数部分)…… 327

作者简介

王永葆，男，汉族，辽宁省庄河县人，1937 年 8 月生。1963 年毕业于东北大学理学院应用数学系，留校在数学系任教，从事教学和科研工作，1996 年 6 月晋升为教授。

从事应用数学、概率及数理统计、多元统计分析的应用研究，获得多项成果。

在教学工作中，多年来一直给硕士研究生和本科生讲授应用数理统计，概率论与数理统计，多元统计分析，随机过程，高等数学，线性代数等课程，曾多次获教学优秀奖。编著有《应用数理统计》、《随机过程》等硕士研究生使用的讲义，还著有《工程中的常用数学方法（概率与统计》由东北大学出版社 1992 年出版，再版多次。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第一章　行　列　式

内容精讲指要

一、n 阶行列式的定义

n^2 个元素 a_{ij} (i，$j=1$，2，…，n)组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示所有可能的取自不同行和不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中 n 个元素的行标按自然数的顺序排列后，若对应的列标构成的排列为偶排列，则取正号，若是奇排列，则取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

(和是对全体 1，2，…，n 的 n 级排列取的)，称为 n 阶行列式．

二、余子式与代数余子式

n 阶行列式划去第 i 行和第 j 列，即划去元素 a_{ij} 所在的行和列

的所有元素，其余元素按原来的顺序所构成的 $(n-1)$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式．

三、n 阶行列式的展开

n 阶行列式的值 D_n 为：

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

通常称为这是 n 阶行列式按第一列展开．

四、行列式的性质

1．任何行列式与其转置行列式相等．

2．交换行列式的两行(列)，行列式要改变符号．

3．行列式中某行(列)公因子，可以提到行列式符号外面来；亦即用一个数乘以行列式等于用这个数乘以该行列式中的任意一行(列)．

4．若一个行列式中有两行(列)完全相同，或有一行(列)的元素为零，或有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零．

5．若两个 n 阶行列式 D_1，D_2 除第 i 行(列)外，其余对应的行(列)完全相同，则 D_1+D_2 可表示成一个 n 阶行列式，其第 i 行(列)为 D_1 和 D_2 的第 i 行(列)的对应元素之和，而其余各行(列)则与 D_1(或 D_2)完全一样．

6．把行列式的某一行(列)的元素同乘一个数后加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变．

五、几种特殊的行列式

(一) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(二) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

(三) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \text{W} & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(四) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \text{W} & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(五) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$$

六、定　　理

定理 1　n 阶行列式等于它的任一列(行)的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和.

定理 2　n 阶行列式中某一列(行)的每个元素与另一列(行)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

七、行列式计算方法

按任一列(行)展开计算 n 阶行列式的方法:

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

八、克莱姆(Cramer)法则

(一) 非齐次线性方程组

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 为 D 中的第 j 列元素用线性方程组的常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 替换而得到的行列式（$j = 1, 2, \cdots, n$）.

（二）齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

基本题型例析

一、填空题

【例 1-1】 在五阶行列式中，项 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 的符号取_____.

【解】 将 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 记成 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$，对应的列标的排列为奇排列，故符号取<u>负号</u>.

【例 1-2】 $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$ = _____.

【解】 按三阶行列式计算得<u>0</u>.

【例 1-3】 $\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = _____.

【解】 $\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 按 c_1 展

需要全本请访问 www.ertongbook.com