考研数学手册

北京文都考研信息中心 编著

现代出版社

书　名：考研数学手册

作　者：北京文都考研信息中心

出版社：现代出版社

出版日期：2005

ISBN：7-5011-7047-9/G64

定 价：15.00

目　　录

第一部分　初等数学

第二部分　高等数学

第三部分　线性代数

第四部分　概率与统计

第一部分　初等数学

一、初等代数

1.乘法和因式分解公式

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(2) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(3) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(4) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(5) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(6) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(8) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

(n为正整数)

(9) $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$($n$为正偶数)

(10) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$为正奇数)

2.不等式

(1) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$

(2) $|a-b| \leqslant |a|+|b|$

(3) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$

(4) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$　($a>0, b>0$)

(5) $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1、x_2\cdots x_n}$

$(x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n)$

(6) $e^x > 1 + x(x \neq 0)$

(7) $ln(1+x) < x \quad (x > -1$ 且 $x \neq 0)$

3.**指数**

(1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

(2) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

(3) $(\frac{a}{b})^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

(其中 a、b 是正实数,α、β 是任意实数)

4.**对数**

(1) $a^{log_a N} = N$

(2) $log_a(MN) = log_a M + log_a N$

(3) $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$

(4) $log_a M^b = b\, lag_a M$

5.**数列**

(1) 等差数列

① 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

② 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

(2) 等比数列

① 通项公式:$a_n = a_1 q^{n-1}$

② 前 n 项的和 $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$

(3) 其它数列前 n 项的和(常用)

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. 排列组合和二项式定理

(1) 排列种数

① $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ (元素不可重复的排列)

② $A_n^k = n^k$ (元素可以重复的排列)

③ $P_n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ (全排列)

(2) 组合种数

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(3) 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (n \in N)$$

7. 根与系数的关系

(1) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

(2) 一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \qquad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

二、三角函数

1.和差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

2.倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

3.和差与积的关系

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

三、平面解析几何

1. 两点间距离：

两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 间的距离

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. 定比分点： 设 $M(x, y)$ 是线段 AB（两点坐标同上）的分点

(1). $\frac{AM}{MB} = \lambda, \begin{cases} \lambda > 0 & \text{内分} \\ \lambda < 0 & \text{外分} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad \lambda \neq -1$$

(2). 当 M 为 AB 的中点时

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

3. 直线

(1) 方程① 一般式：$Ax + By + C = 0$

② 点斜式：$y - y_0 = k(x - x_0)$

③ 斜截式：$y = kx + b$

④ 截距式：$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

(2) 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离的公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

4.二次曲线

(1) 椭圆

① 标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

② 焦点：$F(\pm c,0)$　　$c^2=a^2-b^2$

③ 切线：$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，切点$(x_1.y_1)$

④ 面积：$s=\pi ab$

(2) 双曲线

① 标准方程　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

② 焦点　$F(\pm c,0)$　　$c^2=a^2+b^2$

③ 渐近线　$y=\pm\frac{b}{a}x$

④ 切线　$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$　　切点(x_1,y_1)

(3) 抛物线

① 标准方程　$y^2=2px(p>0)$

② 焦点　$F(\frac{P}{2},0)$

③ 切线　$y_1y=p(x+x_1)$　切点(x_1,y_1)

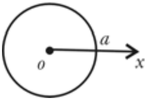
5.极坐标

(1) 直角坐标与极坐标的关系

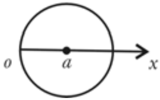
① $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$　　② $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \end{cases}$

（2）几种常用曲线的方程与图形

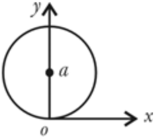
① 圆



$r = a$

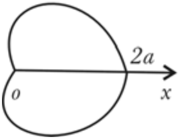


$r = 2a\cos\theta$

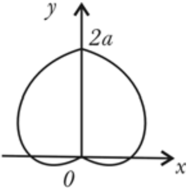


$r = 2a\sin\theta$

② 心形线

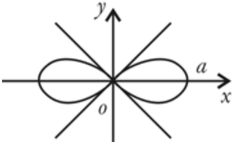


$r = a(1 + \cos\theta)$

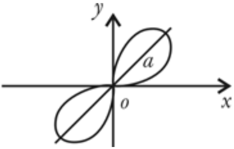


$r = a(1 + \sin\theta)$

③ 双纽线

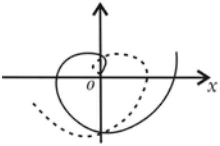


$r^2 = a^2\cos 2\theta$

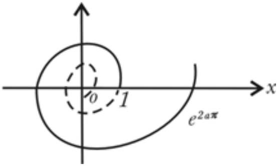


$r^2 = a^2\sin 2\theta$

④ 螺线

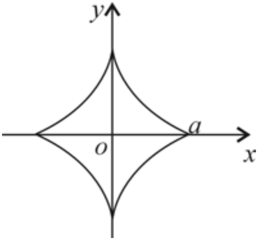


$r = a\theta$



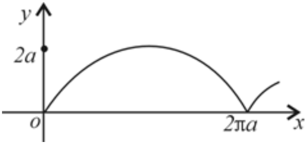
$r = e^{a\theta}$

6.参数方程



$(x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3})$

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

第二部分　高等数学

一、一元函数微分学

1.函数

(1) 双曲函数与反双曲函数的定义

① 双曲函数：$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

② 反双曲函数

$$arshx = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad arthx = \frac{1}{2} ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

(2) 关系式

$$sh(x + y) = shxchy + chxshy$$

$$sh(x - y) = shxchy - chxshy$$

$$ch(x + y) = chxchy + shxshy$$

$$ch(x - y) = chxchy - shxshy$$

$$ch^2 x - sh^2 y = 1$$

$$sh2x = 2shxchx$$

$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x$$

(3) 符号函数

$$sgnx = \begin{cases} 1 & 当\ x > 0 \\ 0 & 当\ x = 0 \\ -1 & 当\ x < 0 \end{cases}$$

(4) 取整函数

$[x]$ = 不超过 x 的最大整数

2.极限

(1) 极限存在的准则

① 准则 Ⅰ(夹逼定理)

数列:若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$

则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

函数:若 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$(或 $|x| > X$)

且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (或\ x \to \infty)}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (或\ x \to \infty)}} g(x) = A$,则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$

② 单调有界数列(函数)必存在极限

(2) 两个重要极限

① $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{Sinu}{u} = 1$

② $\lim\limits_{u \to 0} (1 + u)^{1/u} = e$

(3) 极限的四则运算法则

若 $limf(x) = A \qquad limg(x) = B$

$lim[f(x) \pm g(x)] = A + B$

$$lim[f(x) \cdot g(x)] = AB$$

$$lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

(4) 常用的等价无穷小

当 $u \to 0$ 时

$sinu \sim u$　　　　$arc\ sin\ u \sim u$

$tanu \sim u$　　　　$arc\ tan\ u \sim u$

$e^u - 1 \sim u$　　　　$ln(1+u) \sim u$

$1 - cos\ u \sim \frac{u^2}{2}$　　　　$(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$

(5) 有关极限的几个重要结论

① $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ \infty & |q| > 1 \end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$

(其中 $a_0 \neq 0$　　　　$b_0 \neq 0$)

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$　　　　$(0 < a)$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(6) 有关极限的重要性质

① 唯一性:若变量有极限,则它的极限必唯一

② 局部有界性:

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow$　必 $\exists\ M > 0, \delta > 0$,使当 $x \in (x_0$

$-\delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 时,使 $|f(x)| \leqslant M$

③ 保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > \underset{(<0)}{0}$,则必 $\exists\, \delta > 0$,使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 时 $f(x) > 0(<0)$.

若 $f(x) > 0(<0)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0(\leqslant 0)$.

3.函数的连续性

(1) 间断点的分类

$$
\text{间断点}\begin{cases}
\begin{array}{c}\text{第一类间断点}\\ \text{(左、右极限都存在)}\end{array}\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{(左极限} = \text{右极限)}\\ \text{跳跃间断点}\\ \text{(左极限} \neq \text{右极限)}\end{cases}\\
\text{第二类间断点:除第一类间断点之外的间断点}
\end{cases}
$$

(2) 在闭区间上连续的函数的性质

① 最大、最小值定理:在闭区间上连续的函数必有最大、最小值

② 介值定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续且 $f(a) = A \neq f(b) = B$,若 C 是 A、B 之间的任一数,

则必 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi) = C$

推论:设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且 $f(a)f(b) < 0$.

则必 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi) = 0$

(3) 有界性定理:在闭区间上连续的函数一定在这个区间上有界.

4.导数与微分

(1) 导数的定义式:

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

（2）微分的定义式

若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，

则 $dy=A\Delta x$

（3）可微的充要条件：

可导 $\Leftrightarrow$ 可微．　且 $dy=f'(x)dx$

（4）可导与连续的关系：

$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点处连续

（5）求导法则：

① 和差、积、商的求导法则

若 $u=u(x)$　$v=v(x)$ 在 x_0 点可导，则：

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$$

② 复合函数求导法则

若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则对复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 有

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)$$