文都教育

2007

考研数学秘诀

——考研数学中的常考题型与思维定势

编　著:叶盛标
策　划:文都考研信息中心

新华出版社

考研数学秘诀/编著　叶盛标. -北京：
中国国际广播音像出版社,2006,4
ISBN　7-89994-225-X

Ⅰ.2...　Ⅱ.叶...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.013-44

考研数学秘诀
编　　著:叶盛标
策划编辑:王兴旺
出版发行:中国国际广播音像出版社
地　　址:北京市复兴门外大街2号
邮　　编:100866
文都网址:http://www.wendu.com
文都之星书店:010－88422102 转 831,832
经　　销:新华书店经销
印　　刷:北京市燕鑫印刷厂
开　　本:787×1092　1/16
印　　张:15.375
版　　本:2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
书　　号:ISBN　7-89994-225-X
定　　价:18.00元

第二版前言

长期深入研究历年全国硕士研究生入学考试数学真题之后,笔者认为,考生在备考过程中必须进行两个方面的研究:一、研究大纲,二、研究真题。真题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧。真题剔除了题海中的偏题、怪题、难题,是题海中的精品。所以我们必须精心研究真题,避免在茫茫题海中盲目地探索!

本书的例题和习题主要就是按全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲精选的真题,衷心希望对考生的复习起到抛砖引玉的作用!

本书体例清晰、层次分明,各章严格按照"考纲要求、内容提要、解题秘诀、重要说明、经典习题"五个部分进行编写。列出"考纲要求",目的是让读者对大纲中的要求有一个总体把握。在"内容提要"中,笔者精心提炼了应考必备的知识,使读者在阅读本书时不忘必备知识,有利于读者集中精力、踏实备考。全书总结了 55 个"解题秘诀",解题秘诀体现了解题的思维定势,对每一个解题秘诀都做了通俗易懂的解析,使读者轻松掌握解题技巧。特别是以"常考题型"的形式体现了解题秘诀的运用,书中总结了 115 个常考题型,使读者能够更好地把握真题,在复习过程中真正做到有的放矢。"重要说明"中介绍了在解题过程中应注意的问题。"经典习题"里编选了部分具有代表性的真题,并在书中对每一道习题都做了详细的解答。

本书的最大特色是用秘诀(歌诀)这种独特的为学生所喜闻乐见的形式表达考研数学解题的思维定势。

思维定势就是人的一种思维倾向,它是人在长期的思维过程中所形成的一种思维条件反射,亦称思维惯性。我们平时脱口而出的"七七四十九,九九八十一"就是思维定势。要对付考试,必须掌握对付常考题型的思维定势!

常考题型是基本概念、基本理论、基本方法的具体化,是考点的具体化,是考纲的具体化。要对付考试,必须掌握常考题型!

"以思维定势拿高分,以常考题型论输赢!"是对付考试的最实用、最实惠、最科学的指导思想,是笔者梦寐以求的境界!

文都教育集团为本书的第二版精心策划,使得本书更贴近研究生入学考试,好读好记好用,一书在手,考研足够! 在此特向他们表示最衷心的感谢!

叶盛标
2006 年 2 月 8 日
于武昌巡司河畔

作者 E-mail:yeshengbiao233@ sina. com
作者热线电话:027 - 87382138

目　录

阅读说明：第七章[1]，意即：第七章，供数一的考生阅读，下同.

第一章　极限与连续

考纲要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

内容提要

1. 保函数号定理　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且$A>0$(或$A<0$),那么就存在着点$x_0$的某一去心邻域,当$x$在该邻域内时,就有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

2. 保极限号定理　如果在x_0的某一去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

3. 零点定理　设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,那么在(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=0$.

4. 介值定理　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M和最小值m之间的任何值.

5. 极限存在的两个准则　ⅰ)夹逼准则;　ⅱ)单调有界数列有极限.

6. 两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

7. 求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,以$x_0$强行代入$f(x)$之中,若能代,谓之连续,即有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;若不能代,先定型,后定法,对于数列的极限,同样用这个秘诀.

8. 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称$y=f(x)$在点$x_0$连续.破坏"设"、"如果"、"且"三条件之一者谓之间断.点x_0为间断点,若左极限$f(x_0-0)$及右极限$f(x_0+0)$都存在,那末称x_0为$f(x)$的第一类间断点,否则为第二类间断点.

在第一类间断点中,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,或$y=f(x)$在$x_0$处无定义,这时可人为地改变定义或补充定义,使$y=f(x)$在点$x_0$处连续,此时的$x_0$为可去间断点.

解题秘诀

秘诀 1

(极限与连续内容秘诀)

极限连续最重要,
"强行代入"就是好.
零点定理有零点,
保号定理要保号.

秘诀 2

(求极限秘诀)

强行代入,
先定型,
后定法.

秘诀解析

"强行代入,先定型,后定法." 这是求极限的指导思想.

常见的未定式有:

$$\frac{0}{0}、\frac{\infty}{\infty};$$

$$\infty-\infty、0\cdot\infty \longrightarrow \frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty};$$

$$0^0、1^\infty、\infty^0 \xrightarrow[N=e^{\ln N}]{\text{对数恒等式}} \frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}.$$

常用的求未定式的方法有:

洛必达法则、夹逼定理,单调有界数列有极限准则、无穷小的代换定理,导数的定义,定积分的定义.

需要郑重说明,在使用这些方法前,有时要对所论及的未定式用初等数学或高等数学处理一下!这是在开始阶段的一个极为重要的思维定势.

秘诀运用

常考题型 1　强行代入,定型定法

【例 1】 (北京工业大学 1981,全国 2004 数三,数四)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

【分析】 应用秘诀:强行代入,先定型,后定法.

强行代入,定型定法

$$\frac{1}{0^2}-\frac{1}{0^2}=\frac{0^2-0^2}{0^4}=\frac{(0-0)(0+0)}{0^4}=\frac{0-0}{0^3}\cdot\frac{0+0}{0}$$

$(0-0)$ 可能是比$(0+0)$ 高阶的无穷小,倘若不这样,

或 $$\frac{(0-0)(0+0)}{0^4}=\frac{0-0}{0^2}\cdot\frac{0+0}{0^2},$$

或 $$\frac{(0-0)(0+0)}{0^4}=\frac{0-0}{0}\cdot\frac{0+0}{0^3}$$

【解】 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$

开始阶段初数处理

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x\cos x)(x+\sin x\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x+\sin^2x}{3x^2}=\frac{4}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}=\frac{4}{3}.$$

这个题目亦可这样做:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^4}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

接着用洛必达法则,这就浪费了信息资源,计算时要麻烦得多.

请牢记下面的一句名言:

高等数学 + 初等数学 = 攻无不克,战无不胜!

【例 2】 (全国 2004 数二)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【解】 强行代入 $x=0$,未定式为$\frac{0}{0}$型,当 $x\to0$ 时,

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$$

$$=x\ln\left[1+\frac{\cos x-1}{3}\right]\sim x\cdot\frac{\cos x-1}{3}\sim x\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{x^3}{6}.$$

开始阶段 高数处理

$\therefore$
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

【例 3】　(全国 2005 数二)

设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq0$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}\quad\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal[中值定理]{积分}\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

其中 $\int_0^x f(x-t)\,dt\xlongequal[u=x-t]{令}-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$

常考题型 2　导数、积分,可求极限

【例 4】　(全国 1998 数一,北京大学 1999)

求
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right].$$

强行代入 ∞ · 0 型

【解】 $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}$,

$\because$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sin\frac{i\pi}{n}\right]=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

根据夹逼定理,$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}$.

【例 5】　(清华大学 2000,北京大学 1996,北京大学 2001,华中师范大学 2002,湖北工业大学,东北师范大学,西北电讯工程学院)

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微,$f(x)\neq0$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

【解】 $f(a)\neq 0$,不妨设$f(a)>0$,由于$f'(a)$ 存在,$f(x)$ 在点 a 连续,

所以,当 n 充分大时，$$f\left(a+\frac{1}{n}\right)>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}}\xlongequal{\text{导数定义}}e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

常考题型 3　夹逼定理,谁来夹逼

【例 6】（全国 1995 数二）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\underline{\qquad\qquad}.$$

强行代入,0· ∞ 型

【解】$\because$ $$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}$.

【例 7】（同济大学等八院校 1985,全国 2000 数二）

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

【解】　由于被积函数 $|\cos t|$ 是周期为 π 的连续函数,所以可将$[0,+\infty)$分为小区间:

$$0<\pi<2\pi<3\pi<\cdots<n\pi<(n+1)\pi<\cdots,$$

对任意正数 x,一定存在非负整数 n,使得　$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$.

(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数,在每个周期上积分值相等,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有　$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 由(1) 知,当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

$\therefore$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

【说明】　在 1985 年同济大学等八院校考这道题时,没出现第(1) 题,因而难度要大一点,因为(1) 的结果对(2) 是提示、启发. 也就是说,这道题目的国题更容易为学生所接受,所理解.

倘若无第(1) 题,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

而$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}|\cos x|$不存在，

洛必达法则失效，因此只得另寻其他方法，而当我们想到对$\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$进行估计时，夹逼定理就呈现在我们面前！

常考题型4　无穷小量，年年比较

【例8】　（全国2002数一）

设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数，且$f(0)\neq0,f'(0)\neq0$，若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to0$时是比h高阶的无穷小，试确定a,b的值.

【解】　由已知

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0,$$

而$f(0)\neq0$，$\therefore a+b-1=0$.

又$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=af'(0)+2bf'(0)=(a+2b)f'(0)=0$,

而$f'(0)\neq0$，$\therefore a+2b=0$,

由$\begin{cases}a+b-1=0,\\a+2b=0.\end{cases}$　得$a=2,b=-1$.

【例9】　（全国2001数二）

设当$x\to0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数n等于

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4

【解】　$x\to0$时，

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4,$$

$$x\sin x^n\sim x\cdot x^n\sim x^{n+1},$$

$$e^{x^2}-1\sim x^2.$$

开始阶段，高数处理

于是$4>n+1>2$，$n=2$，选(B).

常考题型5　连续、间断，左右极限

【例10】　（全国2005数二）

设函数$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A)$x=0,x=1$都是$f(x)$的第一类间断点.

(B)$x=0,x=1$都是$f(x)$的第二类间断点.

(C)$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点.

(D)$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点.

强行代入，定型定法

【解】　$f(0-0)=\dfrac{1}{e^{\frac{0-0}{0-0-1}}-1}=\dfrac{1}{e^{+0}-1}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$；

$$f(0+0)=\frac{1}{e^{\frac{0+0}{0+0-1}}-1}=\frac{1}{e^{-0}-1}=\frac{1}{-0}=-\infty;$$

$$f(1-0)=\frac{1}{e^{\frac{1-0}{1-0-1}}-1}=\frac{1}{e^{-\infty}-1}=-1;$$

$$f(1+0)=\frac{1}{e^{\frac{1+0}{1+0-1}}-1}=\frac{1}{e^{+\infty}-1}=0.$$

所以 $x = 0$ 是第二类间断点，$x = 1$ 是第一类间断点，选(D).

【例 11】　(全国 2003 数二)

设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；a 为何值时，$x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

【解】　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}=1\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\frac{1}{2}(-x^2)}=-6a,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2a^2+4,$$

令 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，有 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1,-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

秘诀 3

(特例法秘诀)

随时拿来随时用，特殊寓于一般中；

A，B，C，D 任我选，管他春夏与秋冬！

【说明】　在选择题中，若函数、矩阵等是抽象的，特例法有奇效：一分钟搞定，百分之百的正确！这是因为马克思主义哲学认为：特殊寓于一般中！

常考题型 6　特例特法，瞬间搞定

【例 12】　(全国 2001 数三，数四)

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则

(A) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【解】　取 $f'(x)=-(x-a)$，$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2+C$. 故选(B). 对于客观试题，可以大胆地使用特例法.

特例特法，瞬间搞定

秘诀 4

(求由递推公式表达的数列的极限的秘诀)

数列极限看两头，　(x_1, x_∞)　看了两头不用愁；

单调有界有极限，　　　先求后证两步走！

【说明】　“数列极限看两头”，即看 x_1 和 x_∞，建议读者研究数列开头的几项和 x_∞，问题便一目了然！

常考题型 7　递推极限，要看两头

【例 13】（全国 2006 数一，数二）

设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n, (n = 1,2,\cdots)$

（Ⅰ）证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求该极限.

（Ⅱ）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】　传统的讲法 —— 先证后求，即先证$\{x_n\}$单调有界，后求极限.

这种讲法由来已久，还将继续延续下去，因为老师这么样，学生也这么讲，学生的学生也这么讲……

这种讲法无疑是正确的，但也存在困惑：是单调上升？还是单调下降？界在哪儿？

应该是：强行代入，先定型，后定法.

由 $x_{n+1} = \sin x_n$，得　$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = \sin(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

强行代入，定型定法

$\therefore$　$L = \sin L, L = 0. x_\infty = 0.$

可见$\{x_n\}\downarrow$，以 0 为下界.

【解】（Ⅰ）因$0 < x_1 < \pi$，则$0 < x_2 = \sin x_1 \leqslant 1 < \pi$，于是$0 < x_{n+1} = \sin x_n \leqslant 1 < \pi$，$(n = 1,2,\cdots)$

所以$\{x_n\}$有界.

又　$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$，即　$x_{n+1} < x_n$，所以$\{x_n\}\downarrow$，以 0 为下界.

$\therefore \{x_n\}$单调下降且有界，$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在，且由上面的分析求出$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$.

（Ⅱ）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x_n\to 0}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\qquad(1^\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

秘诀 5

（求渐近线秘诀）

要求渐近线，就是求极限：

水平、垂直和斜的，思考要全面！

三种渐近线

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$，则有水平渐近线$y = C$；

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则有垂直渐近线$x = x_0$；

若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$，则有斜渐近线$y = kx + b$.

常考题型 8　渐近线里，三种类型

【例 14】（全国 1991 数一，数二）

曲线$y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$.

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线也有铅直渐近线.

【解】　由$\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$，所以有水平渐近线$y = 1$；

又$\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$，所以有铅直渐近线$x = 0$. 因而选(D).

【例 15】（全国 2005 数二）

曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

【解】 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=1.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}$$

当 $t\to0$ 时，$(1+t)^k-1\sim kt$

$\therefore$ 斜渐近线为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

重要说明

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

2. 一切初等函数在其定义区间都是连续的.

3. 求极限的方法就是：强行代入，先定型，后定法. 这是一个放之四海而皆准的方法. 读者不应满足于会求极限，而应该也一定会达到研制数列的极限、函数的极限的试题！

4. 在求极限前，要对未定式进行初等数学处理和高等数学处理！

经典习题

题 1（全国 2000 数一）

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

题 2（全国 2003 数一）

$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

题 3（全国 2000 数二）

若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 36.　　(D) ∞.

题 4（全国 2002 数二）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=\text{________}.$$

题 5（全国 2002 数二）

设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$　$(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

题 6（全国 2005 数二）

当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$________.

题 7（全国 2001 数二）

求 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

题 8（全国 2002 数二）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

第二章　导数与微分

考纲要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,数一,数二中要求了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,数三、数四中要求了解导数的经济意义(含边际与弹性的概念).理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

内容提要

导数是一种特殊的商式极限$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

1. $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Rightarrow y=f(x)$ 在点 x_0 处连续;
   $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\not\Rightarrow y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.
2. 导数的几何意义:$y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.
3. 莱布尼兹公式:设 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数,则$(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

解题秘诀

秘诀 6

(导数与微分内容秘诀)

导数定义最重要,
导数公式要记牢;
复函求导要剥皮,
隐函求导直接导.

秘诀 7

(同名导数秘诀)

幂导幂,	$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$
指导指,	$(a^x)' = a^x\ln a$
弦导弦,	$(e^x)' = e^x$
幂指弦弦雅克西,	$(\sin x)' = \cos x$
同名导数雅克西!	$(\cos x') = -\sin x$

秘诀解析

秘诀讲述了导数定义的重要性和函数求导的可操作性:对复合函数求导要明白复合过程,然后一层一层地求导;对隐函数直接求导,即纳入复合函数的求导.

秘诀运用

常考题型 9　导数定义,永恒考题

【例 16】　(全国 2001 数一)

设$f(0)=0$,则$f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

【解】　1) 若$f(0)=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).$$

导数定义，永恒考题

由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)\text{ 存在；}$$

$\Leftarrow$若$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在，又$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$存在

当然$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$存在，只表右导数存在，排除(A).

2) 若$f(0)=0, f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在$\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\frac{1-e^h}{h}=f'(0)\cdot(-1)=-f'(0).$$

$\Leftarrow$若$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在，$\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}$存在，当然$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}=\lim_{x\to 0\pm}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$，故选(B).

3) 若$f(0)=0, f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在$\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}=f'(0)\cdot 0=0.$$

即$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在.

反之，若$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在，由于$\lim_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}=0$，不能保证$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在.

4) 若$f(0)=0, f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在$\Rightarrow$

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=2\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)$，即$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

反之，若已知$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在，推不出$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在.

常考题型 10　函数求导，年年都考

【例 17】（全国 2005 数二）

设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$ ________.

开始阶段，初数处理

【解】 $\ln y=x\ln(1+\sin x)$，两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

令 $x=\pi$，得 $y'(\pi)=-\pi$，即得　$dy|_{x=\pi}=-\pi dx$.

【例 18】（全国 1997 数二）

设 $y=y(x)$ 由$\begin{cases}x=\arctan t\\2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，将 $2y-ty^2+e^t=5$ 两边对 t 求导，得

$$2y'_t - y^2 - 2tyy'_t + e^t = 0,$$

∴ $$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1 - ty)}, \text{又} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2},$$

∴ $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + t^2)(y^2 - e^t)}{2(1 - ty)}.$$

常考题型 11　n 阶导数,形式优美.

【例 19】（全国 2000 数二）

求函数 $f(x) = x^2\ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$　$(n \geqslant 3)$.

【解】　用莱布尼兹公式.

$$f^{(n)}(x) = (\ln(1 + x))^{(n)} \cdot x^2 + n(\ln(1 + x))^{(n-1)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2!}(\ln(1 + x))^{(n-2)} \cdot 2 \quad ①$$

求　$(\ln(1 + x))^{(k)}$：$(\ln(1 + x))' = (1 + x)^{-1}$，$(\ln(1 + x))'' = (-1)(1 + x)^{-2}$，

$(\ln(1 + x))''' = (-1)^2 2!(1 + x)^{-3}, \cdots$，

由此可得　$$(\ln(1 + x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k}.$$

将 $(\ln(l + x))^{(k)}$ 代入 ① 式得

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!\frac{x^2}{(1 + x)^n} + (-1)^{n-2}(n - 2)!\frac{2nx}{(1 + x)^{n-1}} + (-1)^{n-3}(n - 3)!\frac{n(n - 1)}{(1 + x)^{n-2}},$$

再将 $x = 0$ 代入得

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}n(n - 1) \cdot (n - 3)! = (-1)^{n-1}\frac{n!}{n - 2}.$$

常考题型 12　切线、法线,导数搞定

【例 20】（全国 2005 数二）

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1 + t) \end{cases}$ 确定,则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2 + 3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2 + 3$.

(C) $-8\ln 2 + 3$.　　(D) $8\ln 2 + 3$.

【解】　当 $x = 3$ 时,由 $3 = t^2 + 2t$ 解得 $t = 1, -3$.

由于 $y = \ln(1 + t)$ 的定义域为 $t > -1$,所以 $t = 1, y = \ln 2$. 应用参数式函数的求导法则得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2t + 2}\right|_{t=1} = \frac{1}{8},$$

切线、法线,导数搞定

所以题中曲线在 $x = 3$ 处的法线的斜率为 -8,于是法线方程为

$$y - \ln 2 = -8(x - 3).$$

令 $y = 0$,解得　$$x = 3 + \frac{1}{8}\ln 2.$$

此即为法线与 x 轴交点的横坐标. 选(A).

重要说明

1. $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$.

2. 要保留 $y', y'', y''', \cdots$ 的自然美,发现规律,即可求出 $y^{(n)}$.

3. 正如秘诀 7 所说:导数定义最重要!导数的运算法则、导数的应用均由导数的定义导出,要娴熟地用导数的定义求导数!至于求初等函数、分段函数、复合函数、隐函数、由参数方程所表达的函数的导数,这是最简单的,类似于机械操作!但要算出一个正确的答案,必须小心谨慎!

经典习题

题 9 (全国 2005 数二)

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

题 10 (全国 1995 数一,数二)

设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则必有

(A) $f(0)=0$.　　(B) $f'(0)=0$.

(C) $f(0)+f'(0)=0$.　　(D) $f(0)-f'(0)=0$.

题 11 (全国 2002 数一)

已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ ________.

题 12 (全国 1990 数一,数二)

已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]2n$.

题 13 (全国 2002 数二)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.