教育科学“十五”国家规划课题研究成果

经济应用数学
——概率论与数理统计

主　编　马统一
副主编　康殿统　李　劲

高等教育出版社

内容简介

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一. 内容包括：随机事件与概率，随机变量的分布与数字特征，二维随机变量及其概率分布（包括大数定律与中心极限定理），数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析，回归分析等，附录为概率论与数理统计发展简史，统计软件简介，常用分布表. 每章配有充足的、难度适当的、应用性较强的例题和习题供选用.

本书起点较低、难度适中，只要求读者具有高等数学和线性代数的初步知识，没有因降低难度而降低本学科的理论水平，注意突出数学概念和数学思想方法的讲解，加强数学应用能力的训练. 可作为培养应用型人才的高等学校经济管理类专业概率论与数理统计课程的教学用书，以及其它理工科专业的教学参考书，也可供经济管理专业技术人员参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学——概率论与数理统计/马统一主编.
—北京：高等教育出版社，2004.1
ISBN 7-04-012935-3

Ⅰ. 经… Ⅱ. 马… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第101978号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第1版
印　　张	21.75	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	400 000	定　　价	22.90　元

策划编辑　李艳馥
责任编辑　杨芝馨
封面设计　王凌波
责任绘图　黄建英
版式设计　陆瑞红
责任校对　康晓燕
责任印制

总 序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”.

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会．会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标．课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划．为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）．会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题．2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校．2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作．计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材．

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果．

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的．探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务．因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要．

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高．

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　　言

为了更好地适应 21 世纪我国高等教育跨越式发展的需要，满足我国高校从“精英教育”向“大众化教育”的重大转移过程中社会对高校应用型人才培养的各种要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，更好地体现分类指导的原则，紧密配合教育部的“高等学校教学质量和教学改革工程”，全国高等学校教学研究中心在承担教育科学“十五”国家规划课题——“21 世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织了全国若干所以培养应用型人才为主的高等学校进行其子项目课题——“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索.

本书是根据该项目立项的要求和我们的教学改革实践，以及参考现有的一些教材编写而成的，可作为高等学校经济管理类专业的教学用书，以及其它理工科专业的教学参考书，也可供经济管理类专业技术人员参考使用.

本书分三部分，概率论部分(第一章至第三章)是全书的重点，为读者提供必要的理论基础；数理统计部分(第四章至第八章)介绍了常用的数理推断方法：参数估计，假设检验，方差分析和回归分析；附录部分包括概率论与数理统计的发展简史，Excel 在概率论与数理统计中的应用，SAS 软件使用简介以及常用分布表.

本书有这样几个特点：一是降低起点和难度. 降低起点是只要求读者具有高等数学和线性代数的初步知识，降低难度则是在如何易教易学上下功夫. 例如在文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性，甚至在数学符号的使用上都做了许多考虑. 这就使得降低难度而不致降低理论水平. 事实上，本书在内容的广度和深度方面都达到甚至超过了教学大纲规定的要求. 二是淡化运算技巧，扩大应用实例的范围，突出数学概念和数学思想方法的讲解，加强数学应用能力的培养. 例如在应用方面，我们有意编写了大量的例题，并配备了相当数量的、难易适中的习题供学生选做，这些例题和习题中反映社会实际的题目占有很大比例(如金融、保险等风险投资；设备购置、工程设计、交通运输等优化配置；随机实验、比赛胜负、市场变化、天气状况等的预测；工程的可靠性、安全性等决策；品种的优劣、仪器的好坏、预报的准确状况、武器的性能判别等)，这在以往的概率统计教材中是少见的，这些例题和习题对增强学生学习概率论与数理统计的兴趣是有帮助的. 三是尝试概率统计内容与计算机和数学软件使用的有机结合. 例如书中编排了 Excel 在

概率论与数理统计中的应用及 SAS 软件使用简介．四是编写了概率论与数理统计发展简史（见附录Ⅰ）．我们认为，知道一点概率统计的来龙去脉，对每一个经管专业的大学生来说是必要和有益的．本书的绝大部分内容都经过了编者在经济管理等专业四五年的试用，收到了良好的教学效果．

本书作为经济管理类专业教学用书，考虑可在一个学期授完．若按周 6 学时（$17\times6=102$ 学时）安排，讲授约需 82 学时，习题课 20 学时；若按周 5 学时（$17\times5=85$ 学时）安排，讲授约需 64 学时，习题课 16 学时．对于加“*”的章节，教学中可灵活选用，也可作为读者进一步阅读的内容或作为选修课的内容，以适合各个层次的需要．

本书由河西学院数学系马统一任主编，康殿统、李劲任副主编．

第一章由河西学院数学系徐兆强编写；第二章、第六章由康殿统编写；第三章由马统一、李劲编写；第四、五章由扬州大学数学科学学院姚家凤、钱林编写；第七章和附录Ⅱ由河西学院数学系杨成福编写；第八章由华中农业大学理学院数学系汪晓银编写；附录Ⅰ由李劲编写．全书由马统一统稿．

编者特别感谢高等教育出版社李艳馥同志的指导并为本书的编写出版所付出的辛勤劳动．在本书编写过程中，河西学院数学系徐兆强教授提出了不少有价值的建议，使本书增色不少．书末所列参考文献，可供读者在学习本书时参考，我们在编写过程中，亦从它们那里获益匪浅，在此一并致谢．河西学院领导、教务处及数学系领导对本书的编写和出版给予了大力支持，在此也谨向他们致谢．

由于编者水平所限，对书中的疏漏和不足之处，敬请各位专家、同行及读者不吝赐教．

编　者

2003 年 8 月 10 日于河西学院数学系

目　　录

第一章　随机事件与概率

概率论与数理统计是一门研究随机现象的学科，它有着系统、丰富的内容和许多深刻的结论，同时它作为研究和揭示随机现象的规律的主要理论工具，已经在自然科学，国民经济，以及社会活动的几乎所有部门都得到了广泛的应用．

本章介绍概率论的一些基本概念，即介绍随机现象，随机试验，样本空间，随机事件，随机事件的概率等概念．然后还将介绍一些随机事件之间的关系和运算，概率的性质和计算方法等，初步展开对概率论科学方法的学习．同时也介绍一些应用概率论科学方法解决实际问题的例子．而随机事件与概率是本章的两个最主要的概念和知识．

§ 1.1　样本空间与随机事件

本节中我们将先从随机现象谈起．人们主要是通过随机试验来认识和考查随机现象的，进而通过随机试验得出概率论中的两个重要概念——样本空间和随机事件．在这一节中，我们将看到具有不确定性的随机现象是如何与追求最严密、最精确的数学学科联系起来的．

首先来看什么是随机现象．

在客观世界中存在着两类不同的现象．一类现象是，在一定的条件下必然会发生，或必然不发生的现象．例如，一个电路中若电动势 V 和电阻值 R 是确定不变的，那么根据欧姆定律可知该电路中的电流 I 也是确定不变的，这在实际当中也很容易检验．又例如，在大气压力为 101 325Pa 时，纯净水被加热到 100℃ 时必然会沸腾，而温度被降到 0℃ 时又必然会结冰．再例如，鸡蛋得不到持续的适当温度，就一定不会孵出小鸡．这一类现象我们称之为必然现象．而另一类现象，可以看作是在相同的条件下其结果却不能事先确定的现象，例如，随意抛掷一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；一堆产品中混合有合格品和不合格品，从中随意抽取一件，则取到的可能是合格品，也可能是不合格品；测量一个物体的长度，一般来说各次测得的数值总是不同的．这一类现象，即每次试验或观测之前无法预知其确切结果，而在试验或观测之后可以得到一个确切结果的现象，就称为随机现象．随机现象在自然界和人类社会中都广泛存在着．

随机现象在个别或少量的试验或观测中呈现出不确定性，但是切不可认为随机现象就没有一定的规律了．事实上，如果做了大量的重复试验或观察，我们就会发现一个随机现象中各个结果的出现总是服从一定的规律的．例如，多次重复地抛掷一枚质地和构造均匀的硬币，则正面朝上和反面朝上的次数大致上总是相等的．表 1.1 就是前人做“抛硬币”试验的记录．

表　1.1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$		试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	w	m	w	m	w		m	w	m	w	m	w
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502	6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
2	3	0.6	25	0.5	249	0.498	7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512	8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
4	5	1.0	25	0.5	253	0.506	9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502	10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1.1 中的 n 是抛掷的次数，m 是正面朝上的次数，$w=m/n$ 被称为出现正面的频率．

从表 1.1 中可以看到，当 $n=500$ 时，正面朝上的频率 w 就总是约等于 0.5 了．

随机现象具有某些规律性的问题，在后面还要谈到，这里我们先介绍随机试验．

一般来说，可以得到随机现象的结果的试验或观测都称为随机试验（或简称为试验），比如下面的例子都是随机试验．

E_1：掷一颗骰子（一块小立方体，在它的六个面上分别标有 1 至 6 个小点），观察它朝上一面出现的点数．

E_2：记录某电话交换台在一分钟内接到的呼唤次数．

E_3：一个人进行射击，直到击中目标为止，记录他的射击次数．

E_4：在一批灯泡中随意抽取一只，测试它的寿命．

还可以举出许多随机试验来．一般地，随机试验应具有以下一些共性：

(1) 试验被认为是可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的全部基本可能结果都是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验之前无法预定哪一个结果一定会出现，但试验之后必有某一个基本结果要出现．

在实际工作中，人们往往是通过随机试验来研究随机现象的．

以上我们叙述了一些概率论的客观背景，现在来看概率论是如何研究随机现象的．

从上述例子看到，每次随机试验的所有可能出现的基本结果都是明了的．例如，在试验 E_1 中，“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”就是这个试验可能得到的全部基本结果．把一个随机试验可能得到的全部基本结果“放”在一起，构成一个集合．这个集合被称为样本空间，而将样本空间中的元素即试验的每一个基本结果称为样本点．由于有各种各样的随机试验，所以样本空间也是很多的．因此我们给出如下定义：

定义 1.1.1　随机试验的每一个基本结果称为样本点，记作 ω_1，ω_2，…；随机试验的所有样本点组成的集合称为样本空间，记作 Ω，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

例如由上述试验 E_1 可得样本空间为

$\Omega=\{$出现 1 点,出现 2 点,…,出现 6 点$\}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}=\{1,2,\cdots,6\}$

其中的 $k=\omega_k=$ 出现 k 点 $(k=1,2,\cdots,6)$ 就是样本点．

请读者就上述的其他随机试验分别写出其样本空间来．

一个随机试验的全部基本结果构成了一个样本空间 Ω，而这些基本结果其实就是一些事件的发生．由于这些事件在一定的条件下是否发生不是必然的，因此我们可以称它们是一些随机事件．

然而从一个随机试验得到的随机事件当然不只是这些基本结果，例如对前述的试验 E_1 来说，“出现 2 点”是一个随机事件，而“出现偶数点”也是一个随机事件．可见我们考虑的随机事件不应该只限于那些基本结果．

容易看出，任何一个随机事件总是由某些基本结果 (即样本空间 Ω 中的某些元素) 构成的．仍考虑试验 E_1，“出现 2 点”是由一个样本点构成的随机事件，而“出现偶数点”则是由三个样本点构成的随机事件．因此，随机事件都可以被看作是样本空间 Ω 的子集合．特别地，我们把由一个样本点构成的单元素子集称为一个基本事件．

若 $A\subset\Omega$ 是一个随机事件，则当且仅当 A 的样本点中有一个发生时，我们说 A 发生了．例如，在试验 E_1 中，“出现 2 点”，“出现 4 点”，“出现 6 点”是三个样本点，则当且仅当这三个样本点中有一个发生时，我们称随机事件 $A=\{$出现偶数点$\}$ 发生了．

由集合论知识可知，样本空间 Ω 本身和空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，而从前述的随机试验的共性中容易看出，Ω 是一个必然事件，而 $\varnothing$ 是一个不可能事件．必然事件和不可能事件本来不是随机的，但为了研究和讨论问题时的方便，在概率论中将它们看成是特殊的随机事件．

在概率论的研究中往往不是孤立地考虑单个随机事件的，而是把许多随机事件作为一个整体来考虑，有时还要考虑若干个随机事件之间的关系．

综上所述，我们给出如下的随机事件的定义：

定义 1.1.2　设 Ω 是一个样本空间，F 是 Ω 的一些子集构成的集合，若 F 满足以下条件：

(1) $\Omega \in F$；

(2) 若 $A_i \in F$ $(i=1,2,\cdots)$，则有

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F;$$

(3) 若 $A \in F$，则 A 在 Ω 中的余集 $\overline{A} = \Omega - A \in F$，

那么称 F 为 Ω 上的一个事件域，F 中的元素 (即 Ω 的一些子集) 称为随机事件，或简称为事件，Ω 称为必然事件.

按照定义 1.1.2，在给定的样本空间 Ω 上往往可以建立不同的事件域. 例如当 $\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$ 时，$F = \{\Omega$ 的所有子集$\}$，则 F 显然是一个事件域；再令 $F_1 = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$，其中 $A = \{$出现偶数点$\}$，$\overline{A} = \{$出现奇数点$\}$，则容易验证，F_1 也是一个事件域. 因此，在讨论具体问题时，我们应适当地选择事件域，以便于讨论问题. 这里我们约定，今后凡是提到的任何事件，则这些事件必是属于某个选定了的事件域 F 的，但一般不指出这个 F 的具体构成了.

事件域有以下一些性质.

定理 1.1.1　设 F 为 Ω 上的事件域，则

(1) 不可能事件 $\varnothing \in F$；

(2) 若 $A_i \in F$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F;$$

(3) 若 $A_k \in F$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in F, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in F;$$

(4) 若 A，$B \in F$，则 $A - B \in F$.

证明　(1) $\because$ $\Omega \in F$，$\overline{\Omega} = \varnothing$，$\therefore$ $\varnothing \in F$.

(2) $\because$ $A_i \in F$，$i=1$，2，$\cdots$，$\therefore$ $\overline{A}_i \in F$，$i=1$，2，$\cdots$，

根据德摩根 (De Morgan) 定律 (见本章的习题 6) 即有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} \in F.$$

(3) $$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \in F,$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap \cdots \in F.$$

(4) $\because$ $A, B \in F$，$\therefore$ $\overline{B} \in F$，$\therefore$ $A - B = A \cap \overline{B} \in F$.　】

从定义 1.1.2 和定理 1.1.1 看到，在一个事件域 F 中，有限或无限可列

个事件的并、交以及事件的差、余等运算都是封闭的，即运算后的结果仍是 F 中的事件.

因为事件是样本空间 Ω 的子集，所以事件之间的运算关系与集合之间的运算关系是一致的. 但为了学习上的方便，我们介绍一些概率论中常用的事件之间运算关系的有关说法.

由于事件 A 发生是指当且仅当 A 中的样本点有一个发生，故若事件 A 发生导致事件 B 发生时，称 B 包含了 A，记为 $A\subset B$. 例如在“掷骰子”试验中，令 $A=$ {出现 2 点或出现 4 点}，$B=$ {出现偶数点}，则 $A\subset B$.

若 A，B 是二事件，且有 $A\subset B$，$B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

若事件 C 表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称 C 是 A 与 B 的和事件，记为 $C=A\bigcup B$.

若事件 D 表示事件 A 与事件 B 同时发生，则称 D 是 A 与 B 的积事件，记为 $D=A\bigcap B$ 或 $D=AB$. 例如 $A=$ {出现 2 点或 3 点或 4 点}，$B=$ {出现奇数点}，则 $C=A\bigcup B=$ {出现的点数小于 6}，$D=AB=$ {出现 3 点}.

事件的和、积运算可以推广到任意有限个或无限可列个事件的情形.

若事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的. 显然基本事件之间都是互不相容的. 事件的互不相容性是一个重要的概念. 若多个事件 A_i 中任意两个事件都互不相容，则称这多个事件两两互不相容.

注意，若 $\bigcap\limits_i A_i=\varnothing$，此时并不能判定 A_i 是两两互不相容的. 例如 $A=$ {出现偶数点}，$B=$ {出现奇数点}，$C=$ {出现 1 或 2 点}，则 A，B，C 不是两两互不相容的，但 $ABC=\varnothing$.

若事件 C 表示事件 A 发生同时事件 B 不发生，则称 C 为 A 与 B 的差事件，记为 $C=A-B$. 例如 $A=$ {出现偶数点}，$B=$ {出现的点数不大于 4}，则 $C=A-B=$ {出现 6 点}.

若 A，B 是两个事件，且 $A\bigcup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是对立事件，记为 $\overline{A}=B$ 或 $A=\overline{B}$. 显然 $\overline{A}$ 发生就是指 A 不发生，且有 $\overline{A}=\Omega-A$，即 $\overline{A}$ 就是 A 在 Ω 中的余集.

关于事件运算的关系式还有很多，例如 $A-B=A\overline{B}$，$A-B=A-AB$，$A\bigcup B=A\bigcup(B-AB)$，$(A-B)C=(A\bigcap C)-B=(A\bigcap C)-(B\bigcap C)$ 等等.

例 1.1.1　证明　$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\overline{B}$.

证明　以下诸语句等价：

$\overline{A\bigcup B}$ 发生.

$A\bigcup B$ 不发生.

A 不发生且 B 不发生.

$\bar{A}$ 发生且 $\bar{B}$ 发生.

$\overline{A\,B}$发生.

$\therefore\quad \overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$. 】

例 1.1.1 的推广就是德摩根定律，见本章的习题 6.

例 1.1.2　设 A，B，C 是三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 都不发生；(2) A，B，C 中恰好有一个发生；(3) A，B，C 中至少有一个发生；(4) A，B，C 都发生；(5) A，B，C 都不发生；(6) A，B，C 中不多于两个发生.

解　(1) $(A-B)-C=A\bar{B}\bar{C}$.

(2) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(3) $A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$.

(4) $ABC=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}}$.

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

(6) $\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$.

例 1.1.3　从图书馆中任取一本书，设事件 A 为“取到的是数学书”，事件 B 为“取到的是中文版的书”，问 (1) AB 表示什么？(2) $A\subset B$ 表示什么？

解　(1) AB 表示的是事件“取到的是中文版的数学书”；

(2) $A\subset B$ 说明只要取到的是数学书，则该书一定是中文版的，所以 $A\subset B$ 表示这个图书馆中的数学书全是中文版的. 】

例 1.1.4　同时抛掷两枚不同的硬币，观察出现正、反面的情况. 设事件 $A=$ {第一枚出现正面}，$B=$ {两枚出现同一面}，$C=$ {恰有一枚出现正面}，求事件 $A\cup B$，$A\cup C$，AB，AC，$A-B$，并问 A，B，C 中哪两个事件是对立的？

解　$\because\quad \Omega=$ {(正,反)，(正,正)，(反,正)，(反,反)}，

$A=$ {(正,反)，(正,正)}，$B=$ {(正,正)，(反,反)}，$C=$ {(正,反)，(反,正)}，

$\therefore\quad A\cup B=$ {(正,反)，(正,正)，(反,反)}，

$A\cup C=$ {(正,反) (正,正)，(反,正)}，

$AB=$ {(正,正)}，$AC=$ {(正,反)}，$A-B=AC$.

$\because\quad B\cup C=\Omega$，$BC=\varnothing$，$\therefore\quad B$ 与 C 是对立事件. 】

§1.2　古典概率与几何概率

随机事件 (除去 Ω 和 $\varnothing$) 在一次试验中可能发生，也可能不发生，但一个随机事件在一次试验中发生的可能性大小却是固有的，这是人们从长期的观察

中和认真思考后认识到的一种客观规律性.

考虑这样一类试验：它们的基本结果只有有限个，而且每个基本结果发生的可能性大小都是相同的. 例如抛一枚硬币，掷一颗骰子，从装有 n 个不同颜色的乒乓球的袋中任取一球等，都是这样的试验. 一般地，设试验 E 的样本空间 Ω 有 n 个样本点，并且每个样本点的发生是等可能性的，我们就以数字 $1/n$ 表示每个样本点发生的可能性. 显然每个基本事件发生的可能性也是 $1/n$，并称 $1/n$ 为每一个基本事件的概率. 若某个事件 A 包含 m 个样本点，则 A 的概率应该是 m/n. 这就是古典概率.

定义 1.2.1　设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，随机事件 A 中有 m $(0\leqslant m\leqslant n)$ 个样本点，则称 $P(A)=m/n$ 为随机事件 A 的古典概率，或简称为 A 的概率.

定理 1.2.1　古典概率有以下性质：

(1) 对任何事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 必然事件的概率等于 1，即 $P(\Omega)=1$；

(3) 若 A 与 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).\tag{1.2.1}$$

证明　(1)，(2) 是显然的，现证 (3).

设 A 中有 m_1 个样本点，B 中有 m_2 个样本点，因为 $AB=\varnothing$，所以 $A\cup B$ 中有 m_1+m_2 个样本点. 故

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$ 】

推论　(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(2) 设事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明　(1)　$\because$　A 中有 m 个样本点时，$\overline{A}$ 中一定有 $n-m$ 个样本点.

$$\therefore\quad P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A).$$

(2) 由 (1.2.1) 式可知 $n=2$ 时成立，再由归纳法即可证得. 】

下面通过例题来看古典概率在实际问题中的应用.

例 1.2.1　一只口袋里装有 6 只乒乓球，其中 4 只白色，2 只红色. 从袋中取两次，每次任取一球. 考虑两种情形：(1) 第一次取出一球看过其颜色后放回袋中，第二次再任取一球. 这种情形叫有放回抽样；(2) 第一次取出一球后不放回袋中，第二次再任取一球. 这种情形叫不放回抽样.

设事件 A 为“取到的两只球都是白球”，事件 B 为“取到的两只球都是红球”，事件 C 为“取到的两只球颜色相同”，事件 D 为“取到的两只球中至