普通高等教育‘十五’国家级规划教材

经济数学——

微 积 分

主编　吴传生
编者　陈盛双　管典安
　　　王卫华　吴传生

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育‘十五’国家级规划教材，系根据编者多年的教学实践，按照继承与改革的精神，结合经济类、管理类微积分教学基本要求编写的.

本书内容共分十一章，分别为函数，极限与连续，导数、微分、边际与弹性，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，微分方程与差分方程，无穷级数.

本书从实际例子出发，引出微积分的一些基本概念、基本理论和方法，把微积分和经济学的有关问题有机结合.对一些合适的主题，如极限、泰勒公式、泰勒级数等，突出逼近的思想，利用几何直观和数值方法导出结果，再予以理论分析，用于解决实际问题.注重突出微积分的基本思想，保持经典教材的优点，降低了对解题技巧训练的要求，适当介绍现代数学的思想，概念和术语.对某些部分，通过进行结构调整，适当降低理论深度，加强应用能力的培养.对泰勒级数与幂级数部分进行了体系的局部改革，优化了结构.

本书内容比现行经济类、管理类微积分教材的深广度适当加强，具有结构严谨，逻辑清晰，注重应用，文字流畅，叙述详尽，例题丰富，便于自学等优点，可供高等学校经济类、管理类专业的学生选用.

目　　录

前　　言

本书是普通高等教育‘十五’国家级规划教材，其主要特点是把微积分和经济学的有关内容进行了有机结合.

该书总的编写原则是 教学内容的深广度与经济类、管理类各专业微积分课程的教学基本要求相当，与教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的微积分的内容相衔接，符合经济类、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势，注重适当渗透现代数学思想，加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求.

在本书的编写过程中，我们尽可能遵循如下原则：

第一，从特殊到一般，再从一般到特殊 ;从具体到抽象，再从抽象到具体.

主要体现在如下两方面：

1. 从科学技术和经济学的实际例子出发，引入微积分的基本概念、理论和方法 ;反过来利用它们解决更多的经济应用问题，将微积分和经济学的有关内容有机结合.

2. 对某些合适的主题，先用几何直观、数值方法引出结论，再从理论上加以阐述、论证，最后用于解决实际问题.

第二，便于组织教学. 在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学内容，学生也比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面均有大的提高.

主要反映在如下几个方面：

1. 继承和保持经典微积分教材的优点.

2. 适当降低对解题技巧训练的要求，从简处理一些公式的推导，简化一些定理的证明 ;加强数学思想、几何直观、数值方法和逻辑思维等方面训练 ;加强应用能力的培养.

3. 适当降低一元函数的极限与连续的理论要求，降低不定积分的技巧要求，适当加强向量代数与空间解析几何以及多元函数微积分的内容，较好地满足后继课程对微积分的要求.

4. 力争从体系、内容、方法上进行改革，有所创新，将教材的结构、体系进一步优化，加强理论联系实际，且能恰到好处地反映一些现代数学的思想、术语.

为体现上述原则，编写本书时，我们对内容作了如下处理：

第一章从集合、映射引入函数概念，适当介绍一些现代数学术语，加强了“函数关系建立”和“经济学中的常用函数”两节内容.

第二章从实际例子、几何直观及数值结果导出极限精确定义，注重极限思想的描述，将用极限定义论证问题的技巧降到较低程度. 连续性讨论力求简捷，增加了不动点原理的内容.

第三章对导数、微分讨论得较详尽，和一般教材比较，对经济学上的两个重要概念——边际与弹性的讨论大大加强.

第四章突出了经济应用，将泰勒公式移至本章的最后，可在本章讲授，也可在第十一章的泰勒级数之前讲授.

第五章降低了不定积分的技巧训练，尽量将不定积分计算问题归结为一些规则和步骤，以降低学习难度.

第六章加强了定积分概念的实际背景介绍，加强了对元素法的形式上的描述，增强了定积分经济应用的内容.

第七章专门讨论向量代数与空间解析几何，比一般的经济类、管理类微积分教材的相应内容大为加强. 从多方面来看，我们认为这样做是值得的.

第八章从理论和方法上对多元函数微分学的讨论都比较详尽，加强了多元函数微分学在经济学中应用的内容，专列一节对经济学和其他学科中都十分有用的最小二乘法予以详细介绍. 根据我们的教学体会，加强这部分的内容，对培养适应新时代的经济管理人才是很必要的. 不过，使用本教材时，可根据实际情况对这一部分内容进行取舍.

第九章介绍了二重积分的概念及计算，考虑了二重积分的经济应用，另外，根据后继课程(如概率统计)学习的需要，专列了(无界域上)广义二重积分一节.

第十章开始对微积分学中讨论过的一些基本问题作了适当的小结. 本章有三个特点：一是将微分方程和差分方程从理论和方法上完全类比地讨论，且使之成为一个整体，便于学习；二是从经济实际问题引出微分方程、差分方程的基本概念，结合经济实际问题介绍了一阶微分方程的平衡解及其稳定性；三是加强数学建模能力的培养，专列两节讨论微分方程及差分方程的经济应用.

第十一章从逼近的观点提出本书所讨论的级数部分的两个基本问题，函数项级数部分在体系和内容上作了较大改革，突出逼近的思想. 首先从几何和数值方法出发，结合泰勒公式，引出泰勒级数的概念. 讨论了收敛性定理，介绍了几个基本函数的泰勒级数展开式. 再将泰勒级数的概念一般化，引出幂级数的概念，对幂级数作了较为系统的理论讨论，并介绍函数展开成幂级数的惟一性定理. 最后，将这些理论综合用于将一些初等函数展开成幂级数. 这样处理，

一是使得主题和中心明确;二是符合人们的认识规律;三是从数值和几何上引出问题,比较容易理解,保证了在理论体系完备的前提下,简化推导,减少篇幅.本章的另一个特点是讨论了数项级数和幂级数的经济应用.

本书的习题按节配置,遵循循序渐进的原则,既注意基本概念、基本理论和方法,又注意加强经济学和其他方面应用性习题的配置.每章后配置总习题,供学完一章后复习、总结、提高之用.

本书内容比现行经济类、管理类微积分教材的深广度适当加强,结构严谨,注重应用,文字流畅,叙述详尽,例题丰富,便于自学.本教材的教学内容和教学模式近三年来在我校的经济类、管理类专业的学生中广泛试用,受到了学生及老师的欢迎,收到良好的效果.

本书由吴传生主编.第一、二、三章由陈盛双编写,第四、五、六章由管典安编写,第七、八、九章由王卫华编写,第十、十一章由吴传生编写.全书由吴传生统稿定稿.朱勇教授认真审阅了全书,提出了宝贵的意见.

本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材;在经济应用部分,参考了由陈盛双、韩华编写的内部讲义《微积分的经济应用》.高等教育出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助,武汉理工大学教务处、理学院、数学系也给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,希望专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2003.2

第一章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是经济数学的主要研究对象．在这一章中，我们将在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中的常用函数．

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是一个只能描述而难以精确定义的概念，我们只给出集合的一种描述：集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体，集合简称集．组成集合的每一个对象称为该集合的元素．

下面举几个集合的例子：

例 1　2003 年元月 1 日在中国出生的人．

例 2　平面上所有直角三角形．

例 3　$x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根．

例 4　直线 $x - y = 1$ 上所有的点．

由有限个元素构成的集合，称为有限集，如例 1，3；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例 2，4．

通常用大写字母 $A, B, X, Y\cdots$ 等表示集合，用小写字母 $a, b, x, y\cdots$ 等表示集合的元素，若 x 是集合 A 的元素，则说 x 属于 A，记作 $x \in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A，记作 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$．

不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，空集在研究集合运算和集合之间的关系时，有其逻辑上的意义．如由方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根构成的集合，即为空集．

集合一般有两种表示方法：

一是列举法，把它的所有元素一一列举在一个花括号内．例如，集合 A 由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成，表示为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；自然数集 $\mathbf{N}$ 表示为 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$．这种表示法一般适用于有限集和可数无限集．二是描述法，指明集合中元素所具有的确定性质．一般形式为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

例如，方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解集，记为

$$A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$$

又如，平面上以原点为中心的单位圆内的点的全体组成的集合，记为

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

元素为数的集合称为数集，通常用 **N** 表示自然数集，**Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集和 **C** 表示复数集. 有时我们在表示数集的字母右上角添"+"、"−"等上标，来表示该数集的几个特定子集，以实数为例，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数之集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数之集，其他数集的情况类似，不再赘述.

只有一个元素的集合，称为单元素集，记为 $\{x\}$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \supset A$. 就称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

若 A 是 B 的子集，而 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$，例如 $\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

二、集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差.

设 A，B 是两个集合，则集合

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

分别称为 A 和 B 的并集、交集、差集.

有时，我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集，并用 I 表示，把差集 $I \setminus A$ 特别称为 A 的余集或补集，记作 A^c. 例如在实数集 **R** 中，集合 $A = \{x \mid |x| < 1\}$ 的余集为 $A^c = \{x \mid x \leqslant -1 \text{ 或 } x \geqslant 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

对偶律　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积,设 A,B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积,记作 $A\times B$,定义为如下的由有序对 (a,b) 组成的集合:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

三、区间和邻域

区间和一点的邻域是常用的一类实数集.

实数集 $\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$ 称为开区间;$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间;$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$,$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$,称为半开半闭区间,$a$,$b$ 称为区间的端点.这些区间统称为有限区间,它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1-1(a)、(b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b),此外还有无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)后,则可用类似的记号表示无限区间,例如 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c)、(d) 所示.

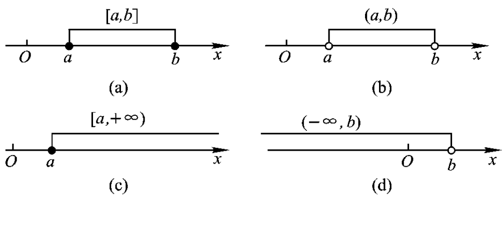

图 1-1

实数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$,称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$.点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1-2 所示.

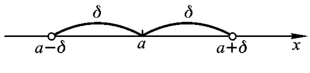

图 1-2

实数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域，例如 $[a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ 即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

习题 1 - 1

1. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合；　　(2) 一个无限集合；

(3) 一个空集；　　(4) 一个集合是另一个集合的子集.

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数集合；

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 内部（不包含圆周）一切点的集合；

(3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合；

(3) 集合 $\{x \mid |x-1| \leqslant 5$ 的整数$\}$.

4. 下列哪些集合是空集：

$A = \{x \mid x + 1 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x\in R\}$，$C = \{x \mid x > 1$ 且 $x < 0\}$，$D = \{x \mid x > 0$ 且 $x < 1\}$，$E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1$ 且 $x + y = 3$，x,y 均为实数$\}$.

5. 写出 $A = \{0,1,2\}$ 的一切子集.

6. 如果集 A 有 n 个元素，问 A 共有多少个子集？A 的真子集有几个？

7. 如果 $A = \{0,1,2,\}$，$B = \{1,2\}$ 下列各种写法，哪些是对的？哪些不对？

$1\in A$；　$0 \overline{\in} B$；　$\{1\}\in A$；　$1\subset A$；　$\{1\}\subset A$；　$0\subset A$；　$\{0\}\subset A$；　$\{0\}\subset B$；　$A = B$；　$A\supset B$；　$\varnothing\subset A$；　$A\subset A$.

8. 设 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,3,5\}$，$C = \{2,4,6\}$，求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$；

(3) $A\cup B\cup C$；　　(4) $A\cap B\cap C$；

(5) $A\setminus B$.

9. 如果 $I = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{1,2,3\}$，$B = \{2,4,6\}$，求：

(1) A^c;　　(2) B^c;

(3) $A^c \cup B^c$;　　(4) $A^c \cap B^c$.

10. 如果 A 是非空集合,下列各个等式哪些是对的?哪些不对?

$A \cup A = A$;　$A \cap A = A$;　$A \cap A = \varnothing$;　$A \cup \varnothing = A$;

$A \cup \varnothing = \varnothing$;　$A \cup I = I$;　$A \cap I = A$;　$A \cap \varnothing = A$;

$A \cap \varnothing = \varnothing$;　$A \setminus A = A$;　$A \setminus A = \varnothing$.

11. 如果 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$,求 $A \times B$

12. 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$,求 $X \times Y \times Z$.

13. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leqslant 3$;　　(2) $|x - 2| \leqslant 1$;

(3) $|x - a| < \varepsilon$(a 为常数,$\varepsilon > 0$);(4) $|x| \geqslant 5$;

(5) $|x + 1| > 2$.

14. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

(1) $A = \{x \mid |x + 3| < 2\}$;　　(2) $B = \{x \mid 1 < |x - 2| < 3\}$.

第二节　映射与函数

一、映射的概念

定义 1　设 X, Y 是两个非空集合,若对集合 X 中的每一个元素 x,均可找到集合 Y 中惟一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射,记为 f,或者更详细地写为

$$f: X \to Y$$

将 x 的对应元 y 记作 $f(x)$: $x \mapsto y = f(x)$. 并称 y 为映射 f 下 x 的像,而 x 称为映射 f 下 y 的原像(或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D_f = X$,而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y \mid y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 R_f(或 $f(X)$).

例 1　设 X 是平面上所有三角形的全体,Y 是平面上所有圆的全体,因每个三角形都有惟一确定的外接圆,若定义对应法则

$$f: X \to Y$$

$$x \mapsto y \text{(} y \text{ 是三角形 } x \text{ 的外接圆)}$$

则 f 显然是一个映射,其定义域与值域分别为 $D_f = X$ 和 $R_f = Y$.

例 2　设 $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$,下面所规定的对应关系 f 显

然也是一个映射：

$$f(\alpha)=a, f(\beta)=d, f(\gamma)=b$$

f 的定义域与值域分别为

$$D_f=X=\{\alpha,\beta,\gamma\}, R_f=\{a,b,d\}\subset Y$$

在这个例子中，R_f 是 Y 的真子集.

概括起来，构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

(1) 集合 X，即定义域 $D_f=X$；

(2) 集合 Y，即限制值域的范围：$R_f\subset Y$；

(3) 对应规则 f，使每个 $x\in X$，有惟一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

需要指出两点：

1. 映射要求元素的像必须是惟一的.

例如，设 $X=\mathbf{R}^+$，$Y=\mathbf{R}$，而对应规则要求对每一个 $x\in\mathbf{R}^+$，它的像 $y\in\mathbf{R}$ 且满足关系 $y^2=x$，这样的 f 是不是映射呢？回答是否定的，因为对每个 $x\in\mathbf{R}^+$，都可以有两个实数 $y_1=\sqrt{x}$ 与 $y_2=-\sqrt{x}$ 与之对应，即 f 不满足像的惟一性要求.

对不满足像的惟一性要求的对应法则，一般只要对值域范围稍加限制，就能使它成为映射.

例 3　设 $X=\mathbf{R}^+$，$Y=\mathbf{R}^-$，则对应关系

$$\begin{aligned} f:\ & X\to Y \\ & x\mapsto y\ (y^2=x) \end{aligned}$$

是一个映射.

2. 映射并不要求逆像也具有惟一性.

例 4　设 $X=Y=\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f:\ & X\to Y \\ & x\mapsto y=x^2 \end{aligned}$$

虽然 Y 中与 $x=2$ 和 $x=-2$ 对应的元素都是 $y=4$，但这并不影响 f 成为一个映射.

定义 2　设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，若 f 的逆像也具有惟一性，即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$，则称 f 是为**单射**，如果映射 f 满足 $R_f=Y$，则称 f 为**满射** 如果映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为双射(又称一一对应).

例 2 与例 3 中的映射是单射，例 1 与例 3 中的映射是满射，因此例 3 中的映射是双射.

二、逆映射与复合映射

设 $f:X\to Y$ 是单射，则由定义 2，对任一 $y\in R_f\subset Y$，它的逆象 $x\in X$（即满足方程 $f(x)=y$ 的 x）是惟一确定的，由定义 1，对应关系

$$\begin{aligned} g:&R_f\to X\\ &y\mapsto x\ (f(x)=y)\end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射，我们把它称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域为 $R_{f^{-1}}=X$.

显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，它就一定是 R_f 到 X 上的双射.

现设有如下两个映射

$$\begin{aligned} g:&X\to U_1\\ &x\mapsto u=g(x)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f:&U_2\to Y\\ &u\mapsto y=f(u)\end{aligned}$$

如果 $R_g\subset U_2=D_f$，那就可以构造出一个新的对应关系

$$\begin{aligned} f\circ g:&X\to Y\\ &x\mapsto y=f(g(x))\end{aligned}$$

由定义 1 可知，这还是一个映射，我们将之称为 f 和 g 的复合映射.

可以看出，复合映射 $f\circ g$ 的构成，实质上是引入了中间变量 u，因此关键在于 $R_g\subset D_f$ 是否成立. 如果这一条件得不到满足，就不能构成复合映射.

例 5　设 $X=Y=U_1=U_2=\mathbf{R}$，映射 g 与 f 为

$$\begin{aligned} g:&X\to U_1\\ &x\mapsto u=\sin x\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f:&U_2\to Y\\ &u\mapsto y=\frac{u}{1+u^2}\end{aligned}$$

显然 $R_g=[-1,1]\subset D_f$，因此可以构成复合映射

$$\begin{aligned} f\circ g:&X\to Y\\ &x\mapsto y=f(g(x))=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\end{aligned}$$

例 6　设映射 g 与 f 为

$$\begin{aligned} g:&\mathbf{R}\to\mathbf{R}\\ &x\mapsto u=1-x^2\end{aligned}$$