高等学校教学用书

解析几何简明教程

纪永强　编著

中国铁道出版社

2002年·北京

内 容 简 介

本书根据综合性大学、高等师范院校数学专业的空间解析几何课程大纲编写，共分六章，研究了矢量与坐标，曲面与空间曲线，平面与空间直线，柱面、锥面、旋转曲面和其它二次曲面以及二次曲面的化简与分类。

本书可作为综合性大学和高等师范院校的空间解析几何课程的教材，也可作为大专、函授、夜大、自考教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何简明教程/纪永强编著 .—北京:中国铁道出版社,2002.8

ISBN 7-113-04772-6

Ⅰ.解... Ⅱ.①纪... Ⅲ.解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060955 号

书　　名:解析几何简明教程
作　　者:纪永强 编著
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:李小军
编辑部电话:010-63583214
封面设计:李艳阳
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:880×1230　1/32　印张:9.625　字数 292 千
版　　本:2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:1～3000 册
书　　号:ISBN 7-113-04772-6/O·95
定　　价:15.00 元

前　言

空间解析几何是大学数学系的主要基础课程之一。学好这门课对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题，特别是对于解决平面几何和立体几何的有关问题是很有用的。

本书讨论了矢量的各种运算，利用矢量法和坐标法建立了曲面和空间曲线的一般方程与参数方程，特别对于平面和空间直线作了详细的研究，研究了它们的相互位置与数量关系。在第四章二次曲面中，用多种方法建立了柱面、锥面和旋转面的一般方程和参数方程；对于其它二次曲面，如椭球面、双曲面和抛物面，就它们的标准方程讨论了它们的性质和图形，最后利用主方向为新坐标轴的方向直接写出空间直角坐标变换来化简二次曲面。这种方法优于用主径面为新坐标平面化简二次曲面，还优于用不变量化简二次曲面。利用本章讲的方法化简二次曲面，既易写出坐标变换，又易得出简化方程，计算量小。

第五章和第六章的理论是平行的，建议本科学生学习前五章的内容，第六章自学；专科学生学习前四章和第六章。

本书论证严谨，同时又力求简明。叙述上深入浅出，条理清晰，特别注意讲清各种量的内在联系。本书每节选择了典型的例题，并且注重了一题多解。实践证明，采用本教材的处理方法，既便于教又易于学。

本书每节后都配了习题，后面有习题答案或提示。

本书的出版，得到丽水师专的资助，在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中缺点错误在所难免，诚恳地希望大家批评指正。

编著者

2001 年 9 月

目　　录

第一章　矢量与坐标

空间解析几何的基本思想就是用代数的方法来研究三维空间中的几何．为了把代数运算引到几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化、数量化．因此，我们首先在空间中引进矢量及它的运算，并通过矢量来建立坐标系，使得点用有序实数组(称为它的坐标)来表示，从而图形可以用方程来表示，几何问题就转化为代数问题，从而就能用代数的方法来研究几何．

矢量及其代数运算本身也很重要，利用它可以解决空间及平面几何中的有关问题，它在力学、物理学中也有重要的应用．

为了书写方便，我们使用下面的一些符号：

“$\Rightarrow$”表示必要性；“$\Leftarrow$”表示充分性；“$\triangleq$”表示记作；“$\triangleq$”表示定义为；“$\Leftrightarrow$”表示“充要条件”或“的充要条件是”或“等价于”，R 表示实数集．

第一节　矢量的概念

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫矢量(或向量)．矢量用符号 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示．

如力、加速度、位移、速度等都是矢量．

矢量 $\vec{a}$ 可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示．这条有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示 $\vec{a}$ 的大小，也叫 $\vec{a}$ 的模，有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向(自 A 到 B)表示矢量 $\vec{a}$ 的方向．如图 1.1.1.

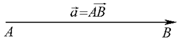

图1.1.1

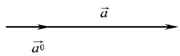

图1.1.2

定义 1.1.2

(1) 若 $|\vec{a}|=0$，则称 $\vec{a}$ 为零矢量．记作 $\vec{a}\triangleq\vec{0}$，零矢量 $\vec{0}$ 的方向不

定.

(2) 若$|\vec{a}|=1$,则称$\vec{a}$为单位矢量.

当$|\vec{a}|\neq 1$时,与$\vec{a}$同方向的单位矢量记为$\vec{a}^{\circ}$. 如图1.1.2,即

$$|\vec{a}^{\circ}|=1.$$

例如 起点和终点相同的矢量是零矢量,即

$$\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

定义1.1.3

(1) 若$\vec{a}$与$\vec{b}$同向且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$是相等矢量,记作$\vec{a}=\vec{b}$;

(2) 若$\vec{a}$与$\vec{b}$反向且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$互为反矢量,记作$\vec{b}=-\vec{a}$.

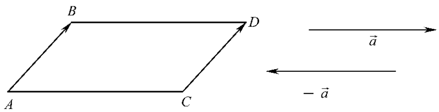

图1.1.3

如图1.1.3,矢量$\overrightarrow{AB}$平行移动得到矢量$\overrightarrow{CD}$,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

我们讲的矢量都是自由矢量. 即:长度相等方向相同的矢量是同一个矢量,与起点的选择无关.

矢量$\vec{a}$的反矢量是$-\vec{a}$,显然$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反矢量,即

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA},\quad \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.$$

定义1.1.4

(1) 若$\vec{a}$与$\vec{b}$都平行于同一条直线,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$共线,记作$\vec{a}/\!/\vec{b}$.

(2) 若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$都平行于同一平面,则称$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是共面矢量.

规定:零矢量$\vec{0}$与任意矢量$\vec{a}$共线,即

$$\vec{0}/\!/\vec{a}.$$

显然,一组共线矢量一定是共面矢量. 三个矢量中如果有两个矢量

是共线的,则这三个矢量一定也是共面的．

第二节　矢量的加减法

1　矢量的和

定义 1.2.1(矢量和的三角形法则)　给定空间中的两个矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和定义为 $\overrightarrow{OB}$,即

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\triangleq\overrightarrow{OB}.\tag{1.2.1}$$

注:(1) 当 $\vec{a}$ 不平行于 $\vec{b}$ 时,OAB 构成一个三角形．则

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

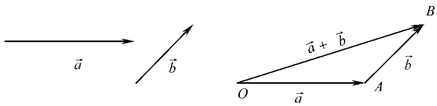

图1.2.1

(2) 当 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 且同向时,则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$(或 $\vec{b}$)同向,并且

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

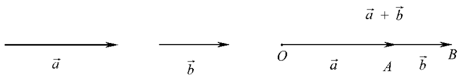

图1.2.2

(3) 当 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 且反向时,设 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$,则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向,并且

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|.$$

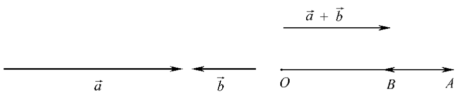

图1.2.3

由矢量和的定义及矢量的相等我们有:当 $\vec{a}$ 不平行于 $\vec{b}$ 时,任取空间

一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，得一平行四边形 $OABC$. 如图 1.2.4.

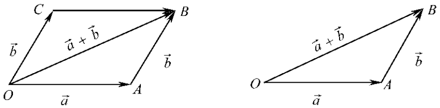

图 1.2.4

则

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}. \tag{1.2.2}$$

此法叫矢量和的平行四边形法则.

显然，当 $\vec{a}$ 不平行于 $\vec{b}$ 时，矢量和的三角形法则与平行四边形法则等价.

2　矢量和的性质

定理 1.2.2　矢量的和满足以下运算律：

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$；

(3) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(4) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\triangleq\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

其中 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是空间中的任意矢量.

证明　由矢量和的定义知，(1)和(2)显然成立.

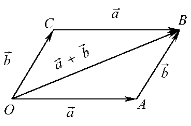

图 1.2.5

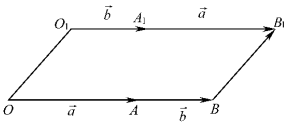

图 1.2.6

(3) 当 $\vec{a}$ 不平行于 $\vec{b}$ 时，如图 1.2.5 可知

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}.$$

所以

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

当 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 且同向时，如图 1.2.6 可知

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB};$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{O_1B_1}.$$

因为 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{O_1B_1}$ 都与 $\vec{a}$（或 $\vec{b}$）同向，所以

$$|\overrightarrow{OB}|=|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{b}|+|\vec{a}|$$

$$=|\vec{b}+\vec{a}|=|\overrightarrow{O_1B_1}|.$$

即 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{O_1B_1}$ 的模相等，故 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O_1B_1}$，即 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

当 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 且反向时，留给读者自己证明．

（4）如图 1.2.7，任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$

则

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

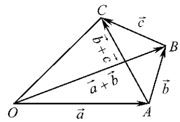

图1.2.7

所以

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

注：由交换律得：

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}.$$

定义 1.2.3（矢量和的多边形法则）　给定 n 个矢量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，在空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，则它们的和定义为 $\overrightarrow{OA_n}$，即

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$
$$=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\triangleq\overrightarrow{OA_n}. \tag{1.2.3}$$

如图 1.2.8. 特别地，当 $A_n\equiv O$ 时，它们的和为零矢量 $\vec{0}$.

例 1　如图 1.2.9，三角形 ABC 依次构成的矢量的和是零矢量，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

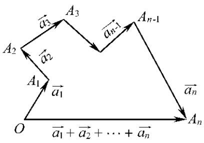

图 1.2.8

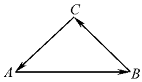

图1.2.9

3　矢量的减法

定义 1.2.4**(减法的定义)**　**若** $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$**,则**

$$\vec{c}\triangleq\vec{a}-\vec{b},\quad \vec{b}\triangleq\vec{a}-\vec{c}.$$

此定义相当于移项变号,从图 1.2.10 **易见**

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \tag{1.2.4}$$

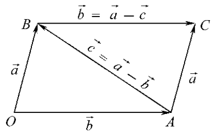

图 1.2.10

从而我们得到,三角形的任一条边上的矢量,等于它的终点对应的一条边上的矢量减去起点对应的另一条边上的矢量.

定理 1.2.5　**减去一个矢量等于加上这个矢量的反矢量,即**

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

证明　**设** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$**,由定义** 1.2.4 **得**

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a},$$

两边再加上 $-\vec{b}$**得:**

$$\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

因为 $\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$**且** $\vec{0}+\vec{c}=\vec{c}$**,所以**

$$\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

推论 1.2.6

(1)　$\vec{a}-(-\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$;

（2）　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.

例 2　**如图** 1.2.11**，在平行六面体** $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ **中，已知** $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$**，**$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$**，**$\overrightarrow{AA_1}=\vec{b}$**，求** $\overrightarrow{AC_1}$ **和** $\overrightarrow{A_1C}$.

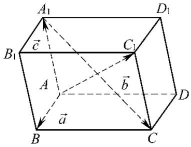

图 1.2.11

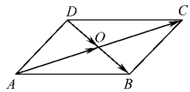

图 1.2.12

解　（1）　$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

或

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$$

$$=\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

（2）　$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$$=-\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$$

或

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}$$

$$=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$$

例 3　**用矢量法证明 对角线互相平分的四边形是平行四边形**.

证明　**如图** 1.2.12　**已知** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$**，**$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$.

因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$$

$$=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

所以　$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$ **且** $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，

即四边形 $ABCD$ **是平行四边形**.

习　题　1.2

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？

（1）把空间中的一切单位矢量归结到共同的始点；

（2）把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

（3）把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点．

2. 给定了空间四边形 $ABCD$，设 K，L，M 和 N 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证 $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$.

3. 要使下列各式成立，矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 应满足什么条件？

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

（2）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（3）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

第三节　数量乘以矢量

1　概　　念

我们知道，位移、力、速度与加速度等都是矢量，而时间、质量等都是数量，这些矢量与数量常常会发生某些结合的关系，例如

$$\vec{f}=m\vec{a}.$$

其中 $\vec{f}$ 表示力，$\vec{a}$ 表示加速度，m 表示质量．又如

$$\vec{s}=t\vec{v}.$$

其中 $\vec{s}$ 表示位移，$\vec{v}$ 表示速度，t 表示时间．

n 个相同非零矢量 $\vec{a}$ 的和仍是一个矢量：

$$\vec{a}+\vec{a}+\cdots+\vec{a}\triangleq n\vec{a}.$$

$n\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 同向，$n\vec{a}$ 的模为 $n|\vec{a}|$.

定义 1.3.1　实数 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个矢量，它的长度为

$$|\lambda\vec{a}|\triangleq|\lambda||\vec{a}|. \tag{1.3.1}$$

$\lambda\vec{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向．如图 1.3.1.

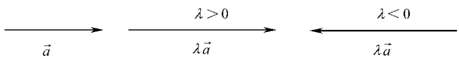

图1.3.1

由定义 1.3.1　**我们得以下四点：**

(1) 当 $\lambda=0$ **或** $\vec{a}=\vec{0}$**时，由**(1.3.1)**得**

$$0\vec{a}=\vec{0},\quad \lambda\vec{0}=\vec{0}; \tag{1.3.2}$$

(2) 当 $\lambda=1$ **时，**

$$1\vec{a}=\vec{a}; \tag{1.3.3}$$

(3) 当 $\lambda=-1$ **时，**

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a} \tag{1.3.4}$$

是 $\vec{a}$**的反矢量．**

(4) 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$**时，则与** $\vec{a}$**同方向的单位矢量为**

$$\vec{a}^{\circ}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}, \tag{1.3.5}$$

从而有

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}. \tag{1.3.6}$$

2　**数乘矢量满足以下运算律**

定理 1.3.2　**与数因子的结合律：**

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}. \tag{1.3.7}$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，$\vec{a}$**是任意矢量．**

证明　**设** $\vec{a}\neq\vec{0}$**且** $\lambda\mu\neq0$　**(否则显然成立)．**

因为

$$\begin{aligned}|\lambda(\mu\vec{a})|&=|\lambda||\mu\vec{a}|=|\lambda||\mu||\vec{a}|\\&=|\lambda\mu||\vec{a}|=|(\lambda\mu)\vec{a}|.\end{aligned}$$

所以 $\lambda(\mu\vec{a})$**与**$(\lambda\mu)\vec{a}$**的模长相等．而它们的方向，当** λ **与** μ **同号时，都与** $\vec{a}$**的方向相同，当** λ **与** μ **异号时，都与** $\vec{a}$**的方向相反，因此** $\lambda(\mu\vec{a})$**与**$(\lambda\mu)\vec{a}$**同向，所以有**

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$$

定理 1.3.3　**矢量对数量的分配律：**

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}. \tag{1.3.8}$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，$\vec{a}$是任意矢量．

证明　设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\lambda\mu\neq0$ 且 $\lambda+\mu\neq0$（否则显然成立）．

（ⅰ）若 $\lambda\mu>0$，这时$(\lambda+\mu)\vec{a}$与 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$同向（如图 1.3.2）．并且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\vec{a}|&=|\lambda+\mu||\vec{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\vec{a}|\\&=|\lambda||\vec{a}|+|\mu||\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}|\\&=|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}|.\end{aligned}$$

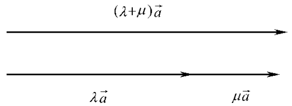

图1.3.2

所以有

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

（ⅱ）若 $\lambda\mu<0$，不妨设 $\lambda>0,\mu<0$，再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形．下面只证前一种情形，后一种情形可以相仿证明．

设 $\lambda>0,\mu<0,\lambda+\mu>0$，这时$(-\mu)(\lambda+\mu)>0$，由（ⅰ）得

$$(\lambda+\mu)\vec{a}+(-\mu)\vec{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\vec{a}=\lambda\vec{a}.$$

所以

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}-(-\mu\vec{a})=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

定理 1.3.4　**数对矢量满足分配律：**

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}, \tag{1.3.9}$$

其中任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\vec{a}$和 $\vec{b}$是任意矢量．

证明　设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$且 $\lambda\neq0$（否则显然成立）．

（ⅰ）　若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，当 $\vec{a}$与 $\vec{b}$同向时，取 $m=|\vec{a}|/|\vec{b}|$ 当 $\vec{a}$与 $\vec{b}$反向时，取 $m=-|\vec{a}|/|\vec{b}|$，由矢量相等的定义，这样显然有

$$\vec{a}=m\vec{b}. \tag{1.3.10}$$

因此,根据(1.3.7)和(1.3.8)有

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{a}+\vec{b})&=\lambda(m\vec{b}+\vec{b})=\lambda[(m+1)\vec{b}]\\&=(\lambda m+\lambda)\vec{b}=(\lambda m)\vec{b}+\lambda\vec{b}\\&=\lambda(m\vec{b})+\lambda\vec{b}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.\end{aligned}$$

(ⅱ)若 $\vec{a}$ 不平行于 $\vec{b}$,如图 1.3.3 所示.

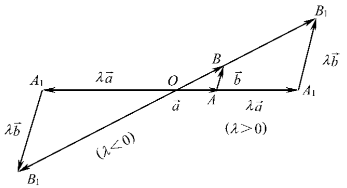

图 1.3.3

因为 $\lambda\vec{b}\,/\!/\,\vec{b}$,所以$\angle OAB=\angle OA_1B_1$. 又

$$\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{OA_1}|}=\frac{|\lambda\vec{b}|}{|\lambda\vec{a}|}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OA}|}$$

所以　$\triangle OAB\backsim\triangle OA_1B_1$. 因此

$$\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}.$$

而　$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{OB_1}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

所以　$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

从矢量的加法与数乘矢量的运算规律知,对矢量也可以象实数及多项式那样去运算.

例 1　已知　$\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$,$\vec{b}=-2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$. 求 $2\vec{a}-3\vec{b}$.

解　$2\vec{a}-3\vec{b}$

$$\begin{aligned}&=2(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3)-3(-2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3)\\&=8\vec{e}_1-13\vec{e}_2+3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

例 2　**用矢量法证明：平行四边形的对角线互相平分.**

证明　如图 1.3.4，设 M 是 AC 的中点，只证 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$.

因为

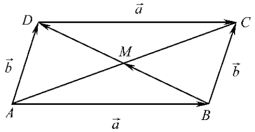

图1.3.4

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\vec{a}$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}),$$

$$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\vec{b}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}).$$

所以，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，即 $|\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MD}|$ 且 B、M、D 共线.

例 3　如图 1.3.5，设 M 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，求 $\overrightarrow{AM}$.

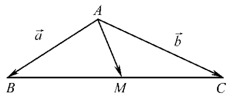

图1.3.5

解法 1　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

解法 2　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\overrightarrow{MC}$

$$=\vec{a}+(\vec{b}-\overrightarrow{AM}),$$

所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

解法 3　因为

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\vec{b}+\overrightarrow{CM}.$$

所以

$$2\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$$

$$=\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CM}$$

$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{0}=\vec{a}+\vec{b}.$$

故

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

例 4　设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-3\vec{b}$，

证明：A、B、D 三点共线.