教育科学“十五”国家规划课题研究成果

应用数学基础
——微积分

上册

宣立新　主编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果之一，以本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》为依据编写的全国通用教材。

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用。全书分上、下册出版。上册内容为：函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分和不定积分、定积分的应用、关于极限定义的精确化、常微分方程等七章。每节配有思考题和习题，每章最后一节为综合例题（选学内容），便于教师因材施教。书后有附录：Mathematica 软件包在高等数学中的应用、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表、思考题和习题参考答案。

本书从极限的描述定义开始展开一元微积分的主要内容，在此基础上引进极限的精确化定义。全书说理浅显，便于教也便于学。本书可供培养应用型人才的高等学校理工农各类专业学生使用，也可作为技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础——微积分. 上册/宣立新主编. —北京：高等教育出版社，2004.4
ISBN 7-04-013991-X

Ⅰ. 应… Ⅱ. 宣… Ⅲ. ①应用数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 004926 号

出版发行 高等教育出版社　　购书热线 010-64054588
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号　　免费咨询 800-810-0598
邮政编码 100011　　网　　址 http://www.hep.edu.cn
总　　机 010-82028899　　http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本 787×960　1/16　　版　　次　　年　月第 1 版
印　　张 23.5　　印　　次　　年　月第　次印刷
字　　数 440 000　　定　　价 24.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有　侵权必究

策划编辑　张忠月
责任编辑　郑洪深
封面设计　王凌波
责任绘图　黄建英
版式设计　王艳红
责任校对　尤　静
责任印制

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、支持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果之一，它是面向培养应用型人才的高等学校理工农各类专业的高等数学教材，本书以教育部颁发的本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》为依据，汲取理工农类培养应用型人才的高等学校数学教学改革的经验，又注意借鉴国外同类学校数学教学改革的成功经验．本书力求具有以下特点：

1. 突出培养应用型人才的宗旨，注重重要概念的实际背景和强化高等数学理论知识的应用。

2. 强调数学的思想和方法。

3. 注意高等教育大众化的新形势，极限部分先介绍描述定义，让读者尽快学习导数与微分、积分的知识，在此基础上再介绍极限的精确定义，全书通俗易懂。

4. 为了便于教师因材施教，本书每节除习题外，配有帮助读者理解相关的概念、掌握重要方法的思考题。每章最后都有一节“综合例题”(打＊号的)不作教学要求。这是供数学基础较好的读者选读的。这些例题综合性较强，稍有难度。它也可以作为教师习题课时选用的题目。

5. 将现代化的计算工具——高等数学软件包按书中上、下册的内容分别编在上、下册的附录里，便于有条件的学校使用，并以此引导学生重视基本概念、基础知识的学习，注意提高解决实际问题的能力，而不盲目追求运算技巧。

本书(上、下册)的基本教学时数不少于160学时，讲解标有“＊”号的内容要另外安排学时。

本书第七章微分方程、第九章多元函数微分学、第十二章无穷级数中的常数项级数，由南京工程学院胡可乐副教授编写；第八章向量代数与空间解析几何、Mathematica软件包在高等数学中的应用(一、二)由南京师范大学孙越泓博士编写；其余各章节由南京师范大学宣立新教授编写。全书的框架、统稿、定稿由宣立新承担。

由于我们的水平所限，加上时间较紧，因此书中必有不少缺点和错误，敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编　者

二〇〇三年十月

目　　录

绪　论 …… 1

第一章　函数的极限与连续 …… 3

第一节　函数 …… 3

一、集合、常量与变量(3)　二、函数的概念(4)　三、函数的表示法(6)　四、函数的反函数(8)　五、单值函数与多值函数(8)　六、函数的几种特性(9)　七、初等函数(10)

八、建立函数关系的实例(13)　思考题 1 - 1(15)　习题 1 - 1(15)

第二节　微积分的两个基本问题和我国古代学者的极限思想 …… 16

一、微积分的两个基本问题(17)　二、我国古代学者的极限思想(19)

第三节　函数的极限 …… 19

一、数列的极限(19)　二、$x\to\infty$时函数的极限(20)　三、$x\to x_0$时函数的极限(22)

四、极限的性质(24)　思考题 1 - 3(24)　习题 1 - 3(25)

第四节　无穷小与无穷大 …… 26

一、无穷小(26)　二、无穷大(27)　思考题 1 - 4(28)　习题 1 - 4(28)

第五节　极限的运算法则 …… 29

思考题 1 - 5(32)　习题 1 - 5(32)

第六节　函数的连续性及其应用 …… 33

一、函数的连续性(33)　二、连续函数的运算(35)　三、初等函数的连续性(38)

四、函数的间断点(39)　五、闭区间上连续函数的性质(41)　思考题 1 - 6(43)　习题 1 - 6(44)

第七节　两个重要极限 …… 44

一、极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$(45)　二、极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$(47)　思考题 1 - 7(49)　习题 1 - 7(49)

第八节　无穷小的比较 …… 50

思考题 1 - 8(52)　习题 1 - 8(52)

* 第九节　综合例题 …… 53

习题 1 - 9(57)

第二章　导数与微分 …… 58
第一节　导数的概念 …… 58
一、几个实例(58)　二、导数的定义(59)　三、导数的几何意义(62)　四、可导与连续的关系(63)　思考题2-1(64)　习题2-1(65)
第二节　导数公式与函数的和差积商的导数 …… 66
一、常数和基本初等函数的导数公式(66)　二、函数的和差积商的导数(66)　思考题2-2(69)　习题2-2(70)
第三节　反函数和复合函数的导数 …… 70
一、反函数的导数(70)　二、复合函数的导数(72)　思考题2-3(75)　习题2-3(75)
第四节　隐函数和参数式函数的导数 …… 76
一、隐函数的导数(76)　二、参数式函数的导数(78)　三、相关变化率(79)　思考题2-4(81)　习题2-4(81)
第五节　高阶导数 …… 82
思考题2-5(85)　习题2-5(86)
第六节　微分及其应用 …… 86
一、微分的概念(86)　二、常数和基本初等函数的微分公式与微分运算法则(89)
三、微分的应用(92)　思考题2-6(95)　习题2-6(95)
* 第七节　综合例题 …… 96
习题2-7(99)

第三章　微分中值定理和导数的应用 …… 102
第一节　拉格朗日定理和函数的单调性 …… 102
一、罗尔定理(102)　二、拉格朗日定理(104)　三、函数的单调性(106)　思考题3-1(109)　习题3-1(109)
第二节　函数的极值与最值 …… 110
一、函数的极值(110)　二、函数的最值(113)　思考题3-2(116)　习题3-2(116)
第三节　曲线的凹凸、拐点与函数的分析作图法 …… 118
一、曲线的凹凸与拐点(119)　二、曲线的渐近线(121)　三、函数的分析作图法(122)
思考题3-3(124)　习题3-3(125)
第四节　曲线弧函数的微分　曲率 …… 126
一、曲线弧函数的微分(126)　二、曲率(127)　思考题3-4(131)　习题3-4(132)
第五节　柯西定理与洛必达法则 …… 132
一、柯西定理(132)　二、洛必达法则(133)　思考题3-5(137)　习题3-5(137)
第六节　函数的多项式逼近——泰勒公式 …… 137

思考题 3 - 6(143)　习题 3 - 6(143)
* 第七节　导数在经济上的应用举例 …… 144
一、经济学中几个常见的函数(144)　二、边际与边际分析(144)　三、弹性与弹性分析(146)　思考题 3 - 7(148)　习题 3 - 7(149)
* 第八节　综合例题 …… 150
习题 3 - 8(154)

第四章　定积分与不定积分 …… 156
第一节　定积分的概念与性质 …… 156
一、几个实例(156)　二、定积分定义(158)　三、定积分的几何意义(159)　四、定积分的性质(160)　思考题 4 - 1(162)　习题 4 - 1(162)
第二节　原函数与不定积分 …… 163
一、函数的原函数与不定积分(163)　二、基本积分公式(164)　三、不定积分的性质(165)　思考题 4 - 2(166)　习题 4 - 2(167)
第三节　微积分基本公式 …… 167
一、积分上限函数及其性质(168)　二、微积分基本公式(169)　思考题 4 - 3(171)　习题 4 - 3(172)
第四节　积分的换元法 …… 173
一、不定积分的换元法(173)　二、定积分的换元法(180)　思考题 4 - 4(186)　习题 4 - 4(186)
第五节　积分的分部积分法 …… 188
一、不定积分的分部积分法(188)　二、定积分的分部积分法(192)　思考题 4 - 5(194)
习题 4 - 5(194)
第六节　积分举例和积分表的使用 …… 195
一、积分举例(196)　二、积分表的使用(201)　思考题 4 - 6(202)　习题 4 - 6(203)
第七节　反常积分 …… 204
一、无穷区间上的反常积分(204)　二、无界函数的反常积分(206)　思考题 4 - 7(208)
习题 4 - 7(209)
* 第八节　综合例题 …… 209
习题 4 - 8(213)

第五章　定积分的应用 …… 215
第一节　积分模型和定积分的微元法 …… 215
第二节　定积分在几何上的应用 …… 216

一、平面图形的面积(216)　二、两种立体的体积(220)　三、平面曲线的弧长(224)
思考题5-2(226)　习题5-2(226)
第三节　定积分在物理上的应用 …… 227
一、功(227)　二、液体侧压力(229)　三、引力(230)　思考题5-3(230)　习题5-3(231)
第四节　函数的平均值及其应用 …… 231
思考题5-4(234)　习题5-4(235)
* 第五节　综合例题 …… 235
习题5-5(240)

第六章　关于极限定义的精确化 …… 243
第一节　极限概念的精确化 …… 243
一、数列的极限(243)　二、函数的极限(245)　思考题6-1(247)　习题6-1(247)
第二节　与极限概念有关的命题证明举例 …… 248
思考题6-2(251)　习题6-2(251)
* 第三节　综合例题 …… 252
习题6-3(254)
附:极限概念产生和发展的历史简介 …… 255

第七章　常微分方程及其应用 …… 258
第一节　微分方程的基本概念 …… 258
一、实例(258)　二、有关概念(259)　思考题7-1(261)　习题7-1(261)
第二节　可分离变量的微分方程 …… 262
一、可分离变量的微分方程(262)　二、齐次方程(264)　思考题7-2(266)　习题7-2(267)
第三节　一阶线性微分方程 …… 267
一、一阶线性微分方程(267)　二、伯努利方程(271)　思考题7-3(273)　习题7-3(273)
第四节　一阶微分方程的应用举例 …… 274
思考题7-4(279)　习题7-4(280)
第五节　可降阶的高阶微分方程 …… 280
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程(281)　二、$y''=f(x,y')$型的微分方程(281)　三、$y''=f(y,y')$型的微分方程(282)　思考题7-5(283)　习题7-5(284)
第六节　二阶线性微分方程解的结构 …… 284
一、线性齐次微分方程解的结构(284)　二、线性非齐次微分方程解的结构(286)　思考题7-6(287)　习题7-6(288)

第七节　二阶常系数线性微分方程 …… 288
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法(288)　二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法(291)　思考题 7 - 7(296)　习题 7 - 7(296)
第八节　二阶微分方程的应用举例 …… 297
思考题 7 - 8(302)　习题 7 - 8(302)
* 第九节　综合例题 …… 303
习题 7 - 9(308)

附录 …… 309
一、Mathematica 软件包在高等数学中的应用(一) …… 309
二、一些常用的中学数学公式 …… 324
三、几种常用的曲线(a > 0) …… 326
四、积分表 …… 327

思考题和习题参考答案 …… 334

参考书目 …… 361

需要全本请访问 www.ertongbook.com

绪　　论

初等数学主要研究不变的量之间的数量关系和不变图形的性质. 本书是以讨论微积分内容为主体的高等数学, 是研究变量关系的数学, 包括微积分内容的十章、空间解析几何和常微分方程. 高等数学是理工农各类非数学专业一门重要的基础课, 是学习物理、专业基础课和一些专业课的重要基础, 也是培养科学的思维方法、增强应用能力和创新意识, 提高综合素质的重要载体. 微积分是人类在文化、科学技术方面最伟大的成就之一, 它在科学技术中有广泛的应用.

一、微积分的产生

直到 16 世纪, 人类关于数学的知识还停留在初等数学阶段, 研究的是常量和固定的图形. 到了 16 世纪, 由于航海、采矿等生产实践的需要, 促进了天文学、力学的发展, 人们对运动的研究, 对变动的量之间的关系的研究, 出现了曲线围成的图形的面积问题、变速直线运动的位移问题, 这些是积分学的基本问题; 到了 17 世纪, 又出现了曲线的切线斜率、变速运动的瞬时速度问题, 这些是微分学的基本问题. 在牛顿(Newton) 和莱布尼茨(Leibniz) 之前, 人们分开研究了一些微分或积分问题, 他们两人在总结前人经验的基础上, 首先揭示了微分和积分之间紧密的内在联系, 对创立微积分学起了决定性作用. 微积分的产生, 在实际应用中发挥了巨大的作用. 可是当时微积分的一些重要的基本概念模糊不清, 在逻辑推理上也存在许多矛盾没有解决, 经历了一个多世纪在理论上的朦胧期, 直到 19 世纪, 由于极限理论和实数理论的建立, 微积分才有了坚实的理论基础, 为近代、现代分析的产生和发展提供了基础.

必须指出, 现在微积分教学的体系, 一般先学习极限, 后学习微积分. 为了便于读者的学习和尽快接触微积分知识, 本书在第一章按照柯西(Cauchy) 的极限定义的方式给出极限的描述定义, 在学完一元微积分后, 再按照魏尔斯特拉斯(Weierstrass) 的极限定义的方式给出极限的精确定义, 并证明一些原先用描述定义无法证明的重要命题, 以加深读者对极限概念的理解.

二、学习微积分必须注意的几点

学习微积分时, 必须十分重视基本概念的学习, 注意重要概念的实际背景, 认真领会概念的定义, 通过实例加深理解.

学习微积分时，必须重视基础理论的学习，注意理解知识之间的逻辑关系，并十分重视理论知识的应用.

学习微积分时，必须重视基本运算的训练，但我们不主张那种没有普遍规律、技巧性很强的运算训练，有条件的读者，注意用数学软件包进行运算.

学习微积分时，重视微积分的思想、方法的学习.

第一章

函数的极限与连续

高等数学研究的内容是函数的微积分及其应用,而极限是研究函数的微积分的主要工具.中学数学里,介绍了函数的基本概念和数列的极限,本章将介绍范围更广的函数概念,提出并分析微积分产生的两个基本问题,引进函数的极限与连续的描述性定义,为学习函数的微积分打好基础.

第一节 函 数

一、集合、常量与变量

1. 集合

集合是具有某种性质的事物的全体.集合常用大写英文字母表示,组成集合的具体事物称为该集合的元素,集合的元素常用小写的英文字母表示,a 是集合 A 的元素记作 $a\in A$, b 不是集合 A 的元素记作 $b\notin A$.

由有限个元素组成的集合,可列举出它的所有元素来表示,如方程

$$x^2+2x-3=0$$

的解所成的集合

$$A=\{1,-3\}.$$

由无穷多个元素组成的集合,通常用明确表示元素特性的符号来表示,如以

$$\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

表示具有性质 P 的事物的全体.如

$$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\ x,y\in R\}$$

表示 xOy 平面上以原点 O 为圆心,1 为半径的圆周.

为了书写方便,本书常用一些符号表示常用词语.

符号“$\forall$”表示“对任意的”或者“对每一个”;

符号“$\exists$”表示“存在”或者“有”.

对集合 A、B,如果$\forall\ x\in A$,总有 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\varnothing$, 空集是任何集合的子集. 如

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\} = \varnothing.$$

在本书中, 变量总是在实数范围内讨论. 常用的数集除了有自然数集 N, 整数集 Z, 有理数集 Q, 实数集 R 外, 还有各种类型的区间.

设 $a, b \in R$ 且 $a < b$.

开区间 $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$;

左半开区间 $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$;

右半开区间 $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$;

无穷区间 $(-\infty, +\infty) = R$;

$(a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x\}$; $[a, +\infty) = \{x \in R \mid a \leq x\}$;

$(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$; $(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$.

为了讨论函数在一点附近的某些性态, 下面引入点的邻域概念.

定义 1 设 $a, \delta \in R, \delta > 0$, 数集 $\{x \in R \mid |x - a| < \delta\}$, 即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体, 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $N(a, \delta)$, 点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用 $N(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x \in R \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $N(\hat{a}, \delta)$.

显然 $N(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, $N(\hat{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

2. 常量与变量

在考察现实世界中的事物时, 常常会遇到各种形式的量, 其中有的量在考察过程中不起变化, 这种量称为常量, 常用小写字母 a, b, c 等表示. 还有一些量, 在考察的过程中取不同的数值, 这种量称为变量, 常用小写字母 x, y, z, t 等表示.

如一架客机在连续的飞行过程中, 乘客人数是一个常量, 而飞机飞行的高度则是一个变量.

二、函数的概念

定义 2 设 x 和 y 是两个变量, $D \subset R$, $D \neq \varnothing$, $\forall x \in D$, 变量 y 按照某个对应关系 f 总有确定的实数与之对应, 则称 y 是定义在 D 上的函数, 记作 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 y 的定义域. 数集 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 y 的值域, 记作 $f(D)$.

表示对应关系的符号 f 也可使用 g, F, Φ 等等.

由定义 2 可见, 两个函数相同的充分必要条件是对应关系相同、定义域也相同, 与自变量、因变量选用的字母无关. 由于函数 $y = |x|$ 与 $y = x$ 的对应关系不同, 因此它们是两个不同的函数; 由于函数 $y = 2\lg x$ 与 $y = \lg(x^2)$ 的定义域不

同,因此它们也是两个不同的函数. 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 不仅是同一个函数,而且 $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{t^2}$ 也是同一个函数.

例 1 某商场 2003 年第一季度各月毛线的零售量(kg)如下表:

月份 t	1	2	3
零售量 s	84.1	95.3	62.4

上表表示了该商场 2003 年第一季度月零售量(因变量) s 与月份(自变量) t 之间的对应关系.

例 2 某地某日的气温 T 由气温自动记录仪描得一条曲线(如图 1-1),这个图形表示了气温 T 和时间 t(从 0 时开始)之间的对应关系,记录的时间(h)范围是[0, 24].

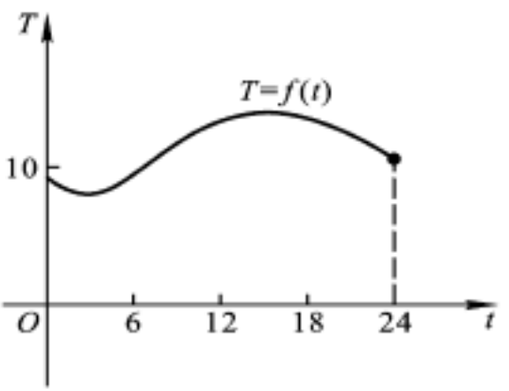


图 1-1

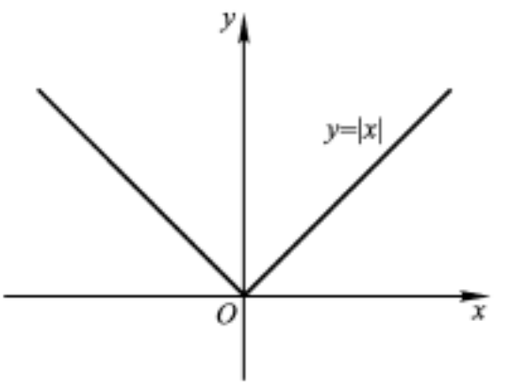


图 1-2

例 3 数学式

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数,它的图像如图 1-2 所示.

例 4 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0<x\leq 1, \\ 0, & x=0, \\ -1-x, & -1\leq x<0 \end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数,它的图像如图 1-3 所示.

函数的定义域,对于具有实际意义的函数来说,则要按题意来确定,如例 1 中函数的定义域 $D=\{1, 2, 3\}$,例 2 中函数的定义域 $D=[0, 24]$,又如圆的面积

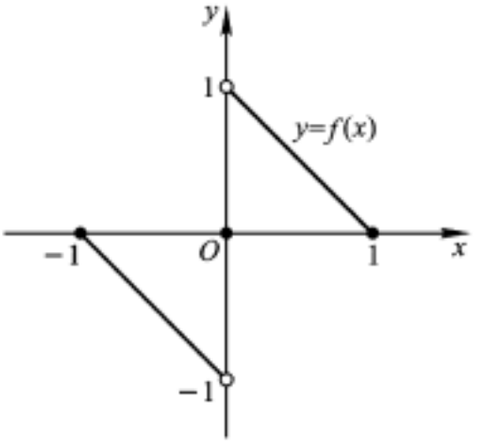


图 1 - 3

A 是半径 r 的函数 $A(r) = \pi r^2$, 它的定义域 D = (0. TIF; E + ∞) ; 对于抽象地用公式表达的函数, 函数的定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值. 如例 3 中函数的定义域 D = R. 例 4 中的函数, 其自变量的取值范围在函数的表达式中已经给定了, 它的定义域 D = [- 1, 1] .

例 5　确定函数 $y = \frac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域.

解　该函数的定义域 D 为满足不等式组

$$\begin{cases} 1 + x > 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

的 x 的集合, 即 D = (- 1, 0) ∪(0. TIF; E + ∞) .

三、函数的表示法

为表示一个函数, 要把它的定义域和对应关系表述清楚. 一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有: 表格法、图示法和公式法(解析法) .

(1) 以表格形式表示函数的方法称为函数的表格法. 如例 1 和数学用表中的函数都是用表格法表示的. 用表格法表示函数, 清楚、适用, 但一般只能列出有限个自变量的值.

(2) 以图形表示函数的方法称为函数的图示法. 如例 2 的函数就是用图示法表示的. 用图示法表示函数, 直观、形象, 但一般的函数难以作出它们的图像.

(3) 用数学式表示函数的方法称为函数的公式法, 也称为解析法. 如例 3、例 4、例 5 的函数都是用公式法表示的. 在高等数学中讨论的函数基本采用公式法表示.

例 3、例 4、例 5 中的函数虽然都是用公式法表示的, 但它们又有区别. 例 5

需要全本请访问 www.ertongbook.com