

简明有限元法 及其应用

张铜生 张富德 编著

清华大学土木工程系

按新规范编写专业用书

地震出版社

简明有限元法及其应用

张铜生 张富德 编著

主 审：支秉琛

责任编辑：裘宗濂

地 震 出 版 社

1990

内 容 提 要

本书是为适应教学改革和多种形式办学的需要而编写的。主要内容有：弹性力学平面问题的基本方程，有限元模式，三角形三结点、矩形四结点、三角形六结点平面单元，平面问题框图与程序及等参数单元。在讲述上，将原理、方法、框图、程序、应用紧密结合，便于读者理解。

本书可作为土建、水利、机械类专业大专以上有限元课程的教材，亦可作为有关工程技术人员自修参考书。

简明有限元法及其应用

张铜生 张富德 编著

地质出版社出版

北京民族学院南路9号

北京朝阳展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

787×1092 1/32 10.25印张 237千字

1990年8月第一版 1990年8月第一次印刷

印数：0001—6000

ISBN 7-5028-0399-8/T·12

(787) 定 价：5.50 元

编委的话

新规范已陆续颁布执行，工民建专业在教学、设计方面迫切需要这方面的专业参考书。为此，清华大学土木工程系组织教师编写了这套《按新规范编写专业用书》。主要读者对象是：大专院校、广播电视大学、职工业余大学、继续进修学院工民建专业的师生，土建专业工程设计、施工技术人员以及准备高等教育自学考试的青年。

根据我们多年的教学经验，编写中遵循“内容充实，取材新颖，注重实用，便于自学”的原则，努力做到不仅包括学科的基本内容，而且反映科学技术的最新成果；既重视理论概念的阐述，也注意实际专题和工程实例的讲解。此外，为了减少自学的困难，对于个别内容较深的章节和习题还给予注解和提示，绝大多数习题列有答案。以上是我们的主观意愿，问题和缺点一定不少，希望得到同行和读者的指教。

本系列书在内容编排上，除了参照清华大学土木工程系有关教学大纲之外，还参考了全国高等教育自学考试土建类自学大纲(草案)，以及电视大学、建设部职工高等专科学校等单位所制订的工民建专业的部分教学大纲，使这套专业用书具有较广泛的适用范围，便于有关部门选为教材或教学参考书。

这套书的出版，得到了地震出版社的大力支持，在此谨致谢意。

清华大学土木工程系
按新规范编写专业用书

编 委 会

主编：王国周 龙驭球 沈聚敏
陈肇元 崔京浩

编委（以姓氏笔画为序）：

支秉琛 邝守仁 刘元鹤
江见鲸 杨德麟 郑金床
裘宗濂

前 言

弹性力学有限单元法，简称有限元法，是随着高速电子数字计算机的发展而日益发展起来的一种比较新颖而有效的数值方法。在我国，有限单元法的应用和研究已受到普遍重视，目前，不少高等学校的土木、水利、机械等专业都开设了这门课程。本书就是为了适应教学改革和多种形式办学的需要而编写的。

有限元是和计算机语言程序紧密相关的。为了使读者能逐步运用和学会编制有限元程序，书中以平面问题三结点三角形单元为典型进行有限元法的全过程分析，使读者能清晰地了解本课程的基本概念、原理及实用方法。本教材详细介绍了程序框图的编制及如何由框图转化成语言程序。为了使读者便于阅读并能较快地学会编制有限元程序，每个子框图后面紧接着有相应的子程序段，前后对照，程序语句中也都附有说明。在讲述上，将原理、方法、框图、程序、应用紧密结合，便于读者理解。本教材编写时力求做到内容充实，讲清基本概念，由浅入深，语言通俗，注重简明、实用。考虑到有些学校不设《弹性力学》课程或有些读者没有学过弹性力学，我们用一章介绍了与本课程有关的弹性力学的基本概念与基本方程。

本教材已在清华大学、烟台大学、河北建筑工程学院等单位试用，效果良好。

清华大学龙驭球教授对本教材的编写给予了热情支持与指导，支秉琛教授详细审阅了全部书稿，他们都提出了许多宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢。

编写过程中参考并引用了有关参考文献中的一些内容，谨向各文献的作者致谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和错误之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

编 者

1990年3月于清华大学

目 录

第一章 绪 论	1
§ 1—1 引言	1
§ 1—2 有限单元法的应用	3
第二章 弹性力学平面问题的基本方程	6
§ 2—1 弹性力学的基本假定	6
§ 2—2 外力、应力、应变和位移的记号和符号	8
§ 2—3 两种平面问题	11
§ 2—4 平衡方程——应力与外力的关系	17
§ 2—5 几何方程——应变与位移的关系	23
§ 2—6 物理方程——应力与应变的关系	29
§ 2—7 弹性力学平面问题经典解法概述	34
§ 2—8 虚功方程	36
思考题	45
习 题	46
第三章 用常应变三角形单元解弹性力学平面问题	51
§ 3—1 结构的离散化	51

§ 3—2	单元分析	53
一、	由结点位移求内部任一点的位移	53
二、	由结点位移求单元的应变	70
三、	由结点位移求单元的应力	72
四、	由结点位移求单元结点力	74
五、	单元刚度矩阵的特性	82
六、	非结点荷载向结点的移置	91
§ 3—3	整体分析	102
一、	建立整体刚度矩阵	102
二、	整体刚度矩阵的特点	111
三、	结点荷载列阵	117
四、	引入支承条件	118
五、	解方程组, 求结点位移	122
六、	求单元应力	124
七、	计算成果的整理	127
八、	计算步骤	135
§ 3—4	几个问题的讨论	140
一、	解答的收敛性	140
二、	单元的划分	143
三、	结构对称性的利用	147
思考题		149
习题		150

第四章	用常应变三角形单元解弹性力学平面问题的框图与程序	154
§ 4—1	程序功能.....	154
§ 4—2	程序说明.....	155
§ 4—3	程序的框图设计及源程序.....	158
§ 4—4	用常应变三角形单元解弹性力学平面问题程序的试算例题.....	197
思考题	216
习 题	216
第五章	用较精密的平面单元解弹性力学平面问题	219
§ 5—1	四结点矩形单元.....	219
§ 5—2	采用矩形单元计算实例.....	238
§ 5—3	面积坐标.....	247
§ 5—4	六个结点的三角形单元.....	251
§ 5—5	六结点三角形单元计算实例.....	265
§ 5—6	一维单元和二维单元的混合应用.....	267
思考题	270
习 题	271
第六章	用等参数单元计算平面问题	272
§ 6—1	平面四结点等参数单元概述.....	274
§ 6—2	平面四结点等参数单元的单元力学特性分析.....	281

§ 6—3	平面八结点等参数单元	292
§ 6—4	高斯数值积分	298
§ 6—5	等参数单元的形态	304
§ 6—6	等参数单元的算例	307
思考题		310
习 题		311
部分习题答案		313
参考书目		317

第一章 绪 论

§ 1—1 引 言

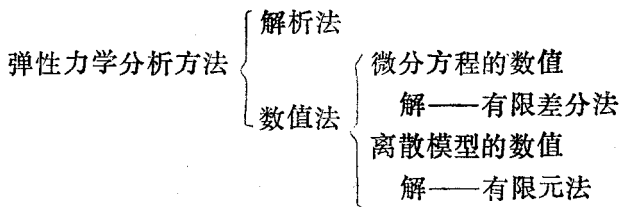
结构力学的研究对象是杆件结构，如桁架、刚架等，杆件的几何特征是长度比横截面尺寸大得多。弹性力学的研究对象是非杆件结构，如板、壳结构、实体结构等，这些结构的几何特征是它的厚度要比长度和宽度小得多，或长、宽、厚三个尺度大小属于同一量级。

读者所熟知的结构力学刚架位移法，先取基本体系，把刚架拆成多个单元（杆件），作单元分析；再将杆件组合成整个刚架，建立刚架位移法的基本方程，作整体分析。在这一分一合、先拆后搭的过程中，把复杂结构的计算问题，转化为简单的单元分析和集合问题，这就是有限单元法的雏形。

有限单元法又简称为有限元法。它用于分析杆件结构时，称为结构矩阵分析；用于分析弹性力学问题时，称为弹性力学问题的有限单元法，或简称为有限元法。本书只讨论弹性力学问题的有限单元法。

弹性力学问题分析方法可分为解析法与数值法两大类，

可表述为：



解析法（可参见 § 2—7），由于数学上的困难，通常只有某些简单问题才能得到解析的解答，而对于多数复杂结构问题，目前还没能得到闭合解。现在，为了求解这些复杂问题，唯一的途径是应用数值法，求得问题的近似解。

数值法又可分为两类：第一类是在解析法的基础上进行数值计算。它的要点是对基本微分方程采用近似的数值解法，如将微分改为差分，建立差分方程，得有限差分法；第二类是在力学模型上进行近似的数值计算。它的基本点是将连续体简化为由有限个单元组成的离散化模型，再对离散化模型求出数值解答，这类方法的代表就是近三十年发展起来的有限单元法。

两类方法相比，有限单元法具有如下的优点：

（1）物理概念清晰。有限元法一开始就从力学角度进行简化，使初学者易于入门。

（2）可以在不同的水平上建立起对该法的理解。它可以从通俗易懂的结构力学方法出发，阐述其基本原理和公式推导，也可以利用变分原理为该法建立起严格的数学解释。

（3）有较强的灵活性与适用性。它不仅能处理力学分

析中的复杂的几何形状，任意的边界条件，非均质各向异性材料，结构中包含杆件、板、壳等不同类型的构件，非线性应力—应变关系，还能用来求解流体力学、热传导以及电磁场等领域的许多问题。目前，它几乎适用于求解所有的连续介质和场的问题。

（4）采用矩阵表达形式，便于编制计算机程序，能充分利用高速电子计算机这个现代化工具。

因此，有限元法已被公认为力学分析中的新颖而又有效的数值方法。

有限单元法，从选择基本未知量的角度出发，可分为三类：

取结点位移为基本未知量——称为位移法；

取结点力为基本未知量——称为力法；

一部分取结点位移而另一部分取结点力为基本未知量——称为混合法。

位移法比力法更易于编写程序，更易于实现计算自动化，因此，在有限单元法中得到最广泛的应用。力法只在某些特殊问题上，由于未知量的个数相对较少而被采用。混合法是近十多年发展起来的，在板、壳问题中已经显示出某些优点。本书只讨论有限元位移法。

§ 1—2 有限单元法的应用

有限单元法最初是在五十年代作为处理固体力学问题的方法出现的。追溯历史，早在一九四三年，库兰特（Courant）

已应用了“单元”概念。在一九四五至一九五五年，阿吉里斯 (Argyris) 等人在结构矩阵分析方面有很大发展。在一九五六年，特纳 (Turner)、克拉夫 (Clough) 等人把刚架位移法的解题思路，推广应用于弹性力学平面问题。他们把连续体划分成一个个三角形的和矩形的单元，单元中位移函数首先采用了近似表达式，推导了单元刚度矩阵，建立了单元结点位移与结点力之间的单元刚度方程。在一九六〇年，克拉夫首次把这种解决弹性力学问题的方法，给予特定的名词，称为“有限单元法”。近二十多年来，随着电子计算机的高速化和普遍化，有限元继续不断地向更加广阔、更加深入的方面发展。有限条法、杂交法、动力有限元、非线性有限元、奇异元……，以及以各种不同变分原理为基础的有限单元法相继而起。

有限单元法的发展借助于两个重要工具：在理论推导方面，采用了矩阵方法；在实际计算中，采用了电子计算机。有限元、矩阵、计算机是三位一体的。由于有了现代化的、先进的计算工具，使得有限单元法近年来以惊人的速度骤然崛起。

有限单元法在应用上已远远超过了原来的范围。它已由弹性力学平面问题扩展到空间问题和板壳问题，能对原子能反应堆、拱坝、飞机、船体、涡轮叶片等复杂结构进行应力分析；它已由平衡问题扩展到稳定问题与动力问题，能对结构在地震力与波浪力作用下的动力反应进行分析；它已由弹性问题扩展到弹塑性与粘弹性问题，能解决土力学、岩石力学、断裂力学等问题；它已由结构的应力分析扩展到结构的

优化设计。除此，它在流体力学、热传导、磁场、建筑声学、生物力学等等方面都有不同程度的应用。

经过三十多年的发展，有限元法已经成为一门日益成熟的学科，它又是一门正在发展中的学科，有无限广阔的前景，有很广泛的实用价值。

本书是一本入门读物，力求简明、通俗、便于自学。在应用范围方面只涉及弹性力学的基本方程及弹性力学的静力问题；在推导上只采用结构力学的直接法；在方法上采用位移法。编者愿此书能成为广大读者步入有限元大门的向导。

第二章 弹性力学平面问题的基本方程

用有限单元法解弹性力学问题，初学者并不需要掌握弹性力学的全部理论，但对其中的某些基本概念和基本方程却要有所了解。为此，本章中将对这些概念和方程作简要的介绍，作为下面各章介绍弹性力学有限单元法的导引。

§ 2—1 弹性力学的基本假定

弹性力学在处理问题方面比材料力学更广泛、更严密，但弹性力学仍必须作一些基本的假定：

(1) 假设物体是线性弹性的。即物体在引起形变的外力被除去以后，能够完全恢复其原来的形状，这种性质称为“弹性”。如果材料又服从虎克定律，即外力与变形之间的关系成正比，这种弹性就叫做“线性弹性”。在这一假定下的物体只能发生线性弹性变形，我们称其为“线性弹性体”。这样的物体在任一瞬时的变形，完全取决于它在这一瞬时所受的外力，而与它前一刻的受力情况无关。由此，也就是假定了弹性体内没有初始应力。

(2) 假设物体是连续的。这假设认为整个物体的体积