

简 明 微 分 几 何

马 力 编 著

清 华 大 学 出 版 社
北 京

内 容 提 要

本书在假定读者不具备拓扑学知识的前提下,介绍了微分几何的主要内容.书中主要讲解空间中的曲线论和曲面论、二维黎曼流形、微分流形、微分形式、Lie 导数、张量理论、协变导数和曲率张量.力图将古典的微分几何和现代微分几何结合在一起讲给理工科的学生.书中给出了很多例子,试图利用这些例子使学生很好地了解几何概念的含义!书中也给出了一些新的内容,比如,椭球面上的测地线、KdV 方程的推导、图形极小曲面的极小性等.以此来强调经典内容和当代热点数学问题之间的关系.同时,书中安排一定数量的习题,供读者练习.

本书可供理工科一年级以上的大学生、研究生以及对数学有兴趣的学者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

简明微分几何/马力编著.—北京:清华大学出版社,2004

ISBN 7-302-07761-4

.简... .马... .微分几何 .O186 .1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 112291 号

出 版 者: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社总机: 010-62770175

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

封面设计: 常雪影

印 刷 者:

装 订 者:

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 140×203 印张: 5.375 字数: 135 千字

版 次: 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-07761-4/O·335

印 数: 1~

定 价: .00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

前 言

本书是这十年来我为数学、自然科学和工程科学二、三年级大学生讲授微分几何课的结晶。我力图在一个学期内(时间大约 60 学时)把经典微分几何(即曲线和曲面论)与现代微分几何统一起来而做一个简明的介绍。书中很多内容可能是在以前的大学生用的微分几何书中没有出现过的。比如,椭球面上的测地线、KdV 方程的推导、图形极小曲面的极小性等。书中强调了经典内容和目前热点数学问题之间的关系,强调几何概念并给出了很多例子。本书假定读者没有学过拓扑学,而没有拓扑学基础,理解流形的概念是个难点,所以书中给出了流形概念的比较直观的公理化定义。可以说,公理化逻辑思维在本书中起了很重要的作用。书中强调了外微分形式的作用,采用力学、物理文献中的常用写法来讲解张量分析和 Lie 导数,其主要目的是提高数学系大学生、理工科大学生和研究生在微分几何理论上、数学修养上甚至数学上的成熟性。书中安排了很多习题,也希望学生多做习题,因为通过演习大量习题对理解和掌握微分几何的概念和定理非常有好处;如果真能做到这一点,学生必能提高其自修能力。本书可作为高年级大学生、研究生和研究人员学习微分几何的入门书和参考书。

学完本书后,如想进一步了解微分几何或黎曼几何的读者可读:

陈省身. 陈省身论文选集.

伍鸿熙等 . 黎曼几何初步 .

陈省身、陈维桓 . 微分几何讲义 . 北京大学出版社出版 .

而关心其应用的同学可读:

A . Isidori . Nonlinear Control Systems (2nd Edition) .
Springer-Verlag, 1989 .

马 力

2002 年 4 月于清华园

目 录

第 1 部分 经典微分几何

第 1 章 曲线论.....	2
1.1 平面曲线	3
1.2 Frenet 公式的应用	8
1.3 空间曲线.....	13
1.4 空间曲线实例.....	18
第 2 章 空间中的曲面	22
2.1 空间曲面的概念.....	22
2.2 曲面上的曲线.....	30
2.3 椭球面上的测地线.....	33
2.4 曲面的曲率.....	34
2.5 实例计算.....	39
2.6 曲面上形状算子.....	44
2.7 外微分形式.....	47
2.8 活动标架法.....	52
2.9 曲面基本方程的求解.....	56
2.10 外微分的进一步应用	61
2.11 极小曲面	63
第 3 章 二维黎曼几何	66
3.1 黎曼度量与结构方程.....	66
3.2 向量场与其协变导数.....	71

3.3	测地线.....	76
3.4	散度和梯度算子.....	82
3.5	Gauss-Bonnet 公式	85

第 2 部分 现代几何

第 4 章	微分流形和外微分形式	92
4.1	微分流形.....	92
4.2	\mathbb{R}^n 中开集上的外微分形式	99
4.3	流形上的微分形式和向量场	105
4.4	Lie 导数	113
第 5 章	张量和黎曼几何.....	122
5.1	张量及其代数运算	122
5.2	张量的 Lie 导数	125
5.3	对称和反对称张量, 张量微分.....	129
5.4	协变导数和黎曼曲率	137
5.5	欧氏空间的子流形	148
5.6	常曲率空间	155
5.7	流形上的积分简介	158
附录	161
参考文献	163
索引	164

第 1 部分 经典微分几何

在中学时代我们学过平面几何,它主要描述点、线和面之间的位置关系.后来用笛卡儿的观点,我们在平面上建立了直角坐标系,从而点、线和面就用一组参数或表达式表示出来.这样很多优美的图形也就可以用优美的公式来表示,从这些公式中可以反映出它们之间的数量关系.在高等数学中,我们学习了一个强有力的科学工具,即函数的微分、积分之间的牛顿-莱布尼兹公式,下面就用这一工具来研究空间中的曲线与曲面的表示及其之间的关系.

第1章 曲线论

设空间中有一质点在运动, 其轨迹为一条曲线. 此曲线可表示为 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 或 $\mathbf{p}(t) = (x^i(t)), 1 \leq i \leq 3, a \leq t \leq b$. 在点 $\mathbf{p}(t)$ 或时间 t 时, 质点的速度为 $\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{x}^i(t))$, 其速率为

$$|\dot{\mathbf{p}}(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{x}^i(t)^2}.$$

而加速度为 $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (\ddot{x}^i(t))$. 有时简记 $w(t) = |\dot{\mathbf{p}}(t)|$. 我们要求所研究的曲线满足一个条件: $w(t) > 0, t \in (a, b)$. 我们称 t 为曲线 $\mathbf{p}(t)$ 的参数. 一条曲线可用很多参数形式表示, 但我们要求参数之间的变换非奇异, 即若 $t = t(u), u \in (c, d), a = t(c), b = t(d)$, 则须有 $t'(u) > 0, u \in (c, d)$. 最典型且常用的是弧长参数

$$s = \int_a^t w(\tau) d\tau.$$

我们也常称 s 为自然参数. 于是 $s(t) = \int_a^t w(\tau) d\tau = |\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(a)|$. 我们常记 $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(t(s))$.

注意本书中约定所涉及的函数或映射皆光滑, 即无穷次连续可微.

设 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ 是一族这样的闭曲线, 即 $\mathbf{F}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. 记 $s = s(t)$ 为 $\mathbf{F}(t)$ 的自然参数. 一个有意思的问题是研究如下演化微分方程

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F} = \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{F}.$$

这个方程称为缩短曲线流问题. 给定初值, 利用偏微分方程的理论, 我们知道这个问题在小时间里是有解的. 但是这个解会在多长

时间内存在,或更一般地问这个方程的适定性如何,却是一个很难的数学问题.目前,还有很多人在进行这方面研究.

1.1 平面曲线

设 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ 为平面曲线,用自然参数 s 表示之为 $\mathbf{p}(s) = (x(s), y(s))$. 记

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(s) = (x'(s), y'(s)),$$

于是由复合求导法和弧长参数的定义可知

$$\mathbf{p}'(s) = \mathbf{p}'(t) \frac{dt}{ds} = \mathbf{p}'(t) / |\mathbf{p}'(t)|.$$

于是我们有 $|\mathbf{p}'(s)| = 1$. 规定 $\mathbf{T} = \mathbf{p}'$, 则 \mathbf{T} 为曲线 \mathbf{p} 在 $\mathbf{p}(s)$ 处的单位切矢. 由

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s))$$

可定义出一个单位法矢 $\mathbf{N} = \mathbf{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$, 使得 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 构成右手系. 以后称 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 或 $\{\mathbf{p}(s); \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 为 F-标架(见图 1.1).

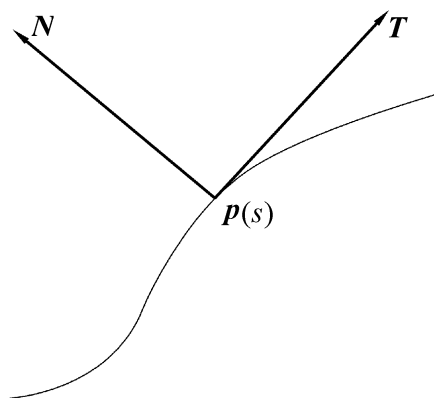


图 1.1

据 $|\mathbf{T}|^2 = 1$ 知 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$, 即 \mathbf{T} 与 \mathbf{N} 平行. 于是有某函数 $k = k(s)$ 满足 $\mathbf{T}' = k\mathbf{N}$. 易知 $\mathbf{N}' = -k\mathbf{T}$. 我们称 k 为曲线 \mathbf{p} 在 $\mathbf{p}(s)$ 处的曲率或相对曲率. 以后称

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= 0 \quad k \quad \mathbf{T} \\ \mathbf{N}' &= -k \quad 0 \quad \mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

为 Frenet 公式或 F-公式 .

若 $k = 0$, 则 $\mathbf{T}' = \mathbf{0}$, $\mathbf{N}' = \mathbf{0}$, 从而存在常数 a 和 b 使得 $x(s) = a + s$, $y(s) = b + s$, 从而有

$$\begin{aligned} x(s) &= a + s, \\ y(s) &= b + s. \end{aligned}$$

这里 a, b 为常数 .

设 $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$, $r > 0$ 为常数, 于是 $\mathbf{p}(t)$ 为平面上半径为 r 的圆 . 直接计算知 $w(t) = r$, 从而 $s = rt$. 这样圆可表示为

$$\begin{aligned} x(s) &= r \cos(s/r), \\ y(s) &= r \sin(s/r). \end{aligned}$$

由 $x'(s) = -\sin(s/r)$, $y'(s) = \cos(s/r)$ 知

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= (-\sin(s/r), \cos(s/r)), \\ \mathbf{N}(s) &= (-\cos(s/r), \sin(s/r)). \end{aligned}$$

由 $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{r} \mathbf{N}(s)$ 知 $k(s) = \frac{1}{r}$, 因此所谓的曲率 k 描述了曲线的某种弯曲程度(见图 1.2) .

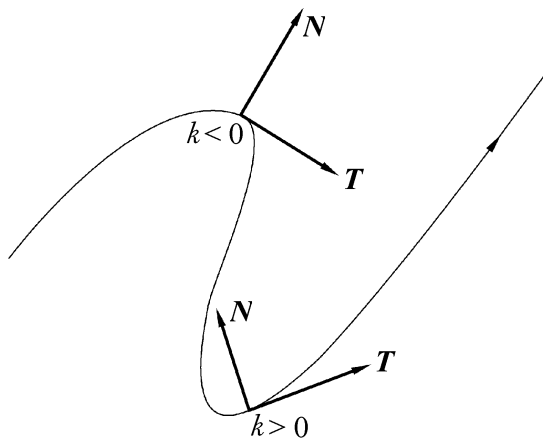


图 1.2

由于 $\mathbf{T}(s) = \mathbf{p}'(s)$ 为加速度, 所以曲率 k 可以视为作用力的大小. 我们常称 $\frac{1}{k}$ 为曲率半径, 记为 ρ .

现在来说明曲率是欧氏运动 (即旋转和平移) 的不变量. 记 $O(2)$ 为 2×2 的正交矩阵集合. 设 $\mathbf{A} \in O(2)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{a}$, 则 $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{A}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{N}$, 从而得 $\tilde{\kappa} = k$; 反过来, 若曲线 $\mathbf{p}(s)$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ 曲率相同, 即 $k(s) = \tilde{\kappa}(s)$, 在 s_0 处做适当的旋转与平移使得 $\tilde{\mathbf{p}}(s_0) = \mathbf{A}\mathbf{T}(s_0)$. 令

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{p}}(s_0) - \mathbf{A}\mathbf{p}(s_0),$$

即有

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) = \mathbf{A}\mathbf{p}(s) + \mathbf{a}.$$

利用几何直观或利用切矢的坐标表示直接计算, 得

$$\tilde{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{A}\mathbf{N}(s).$$

因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|\mathbf{A}\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{p}}'|^2 + |\mathbf{A}\mathbf{N} - \tilde{\mathbf{v}}'|^2)(s) \\ &= |\mathbf{A}\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{p}}'| \cdot |\mathbf{A}\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{p}}'| + |\mathbf{A}\mathbf{N} - \tilde{\mathbf{v}}'| \cdot |\mathbf{A}\mathbf{N} - \tilde{\mathbf{v}}'| \\ &= k |\mathbf{A}\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{p}}'| \cdot |\mathbf{A}\mathbf{N} - \tilde{\mathbf{v}}'| - k |\mathbf{A}\mathbf{N} - \tilde{\mathbf{v}}'| \cdot |\mathbf{A}\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{p}}'| \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{A}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{N}$, 从而 $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{a}$. 总结之有下面的定理.

定理 1 平面上两条曲线 $\mathbf{p}(s)$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ 曲率相同的充要条件是 $\mathbf{p}(s)$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ 只差一个欧氏运动.

例 计算椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($a > b > 0$) 的曲率.

由于 $w(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, 所以不能把 s 显式表示为 t 的函数. 但由复合求导法可知

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{w(t)},$$

和

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{w(t)} (-a\sin t, b\cos t).$$

因此

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(t) = \frac{1}{w(t)} (-b\cos t, -a\sin t).$$

利用

$$\mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \frac{dt}{ds} = k\mathbf{N}$$

得

$$k(t) = \frac{ab}{w(t)^3}.$$

让我们再做一个观察. 设 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s) = (x(s), y(s))$ 为平面曲线, s 为其自然参数. 在小范围里, 若记 $\varphi = \varphi(s)$ 为 $\mathbf{T}(s)$ 与 x 轴的夹角 (见图 1.3), 则我们有表示

$$\mathbf{T}(s) = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \mathbf{N}(s) = (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

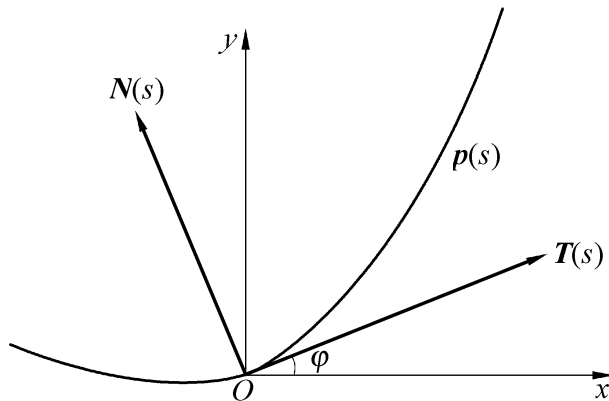


图 1.3

于是, 由

$$\mathbf{T}(s) = d/ds \mathbf{N}(s),$$

及 Frenet 公式知 $k = d\varphi/ds$. 我们设 $k \neq 0$. 根据

$$\frac{dx}{ds} = \cos$$

和

$$\frac{dy}{ds} = \sin ,$$

我们有

$$x(s) = \int \cos ds = \frac{\cos}{k(\cdot)} d ,$$

和

$$y(s) = \int \sin ds = \frac{\sin}{k(\cdot)} d .$$

这样,我们就在局部上给出了用曲率来表示原来曲线的公式.

我们总结一下.在这一节里,实际上我们已经学到了微分几何学中的一个常用技巧:对原始数据多次求导,然后用这些结果作代数运算找出优美的公式.但数学上主要的目的是要求所得的结果简洁、漂亮而且抓住本质.要达到这一目标,就要多做习题,掌握一些技巧,从而获得良好的感觉.

考虑一下,对前面的缩短曲线流问题,如果初始曲线是平面曲线,是不是解也是平面曲线?答案是肯定的,其证明我们不讲了.

习 题

1. 对一般曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 证明其曲率为

$$k(t) = \frac{x(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)y(t)}{w(t)^3} .$$

2. 在极坐标 (r, θ) 中, 设曲线表示为 $r = F(\theta)$, $a < \theta < b$, 证明: 弧长为

$$\int_a^b [\dot{r}^2 + (F')^2]^{1/2} d\theta ,$$

曲率为

$$k = \frac{\dot{r}^2 + 2(F)^2 - rF}{[\dot{r}^2 + (F)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3. 求双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的曲率.

4. 对常数 $a > 0$, 求曲线 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 的曲率.

5. 设 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ 为光滑曲线且它的曲率 $k(t)$ 不为 0. 设 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 构成 F-标架, 定义曲线

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t).$$

证明: $\mathbf{q}(t)$ 在 t 处的切矢就是 $\mathbf{p}(t)$ 的在 t 处的法矢.

6. 设曲线由隐式方程

$$F(x, y) = 0$$

给出(这里我们要设 $dF(x, y) \neq 0$). 试证其曲率为

$$k(x, y) = \frac{F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. 设 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (-\infty, +\infty)$ 为光滑曲线, 且它不过原点 $(0, 0)$. 假设

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{p}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{p}(t)| = \infty.$$

证明存在 $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得

$$|\mathbf{p}(t_0)| = \min_{t \in (-\infty, +\infty)} |\mathbf{p}(t)|.$$

1.2 Frenet 公式的应用

定义 1 设 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ (s 为自然参数), 称曲线 \mathbf{p} 有伴随曲线 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(u)$, $u = s$ (注意这时 $u = s$ 不是 \mathbf{q} 的自然参数), 是指

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{p}(s) + a(s) \mathbf{T}(s) + b(s) \mathbf{N}(s), \quad " s,$$

于是

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \mathbf{p}(s) + a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N}.$$

据 Frenet 公式知

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = (a_1 - ka_2 + 1) \mathbf{T} + (ka_1 + a_2) \mathbf{N}.$$

定义

$$\frac{a_1}{ds} = a_1 - ka_2 + 1,$$

$$\frac{a_2}{ds} = ka_1 + a_2,$$

并称之为点 $\mathbf{q}(s)$ 处曲线 \mathbf{q} 在 Frenet 标架 $\{\mathbf{p}(s); \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 中的绝对速度, 而称 $\{a_1, a_2\}$ 为曲线 \mathbf{q} 在 Frenet 标架 $\{\mathbf{p}(s); \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 中的相对速度. 所谓的 Cesaro 不动条件为

$$a_1 - ka_2 + 1 = 0,$$

$$ka_1 + a_2 = 0.$$

它描述平面上一个固定点 $\mathbf{q}(s) = \text{const}$ 在 Frenet 标架 $\{\mathbf{p}(s); \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 中相对速度应满足的方程.

定义 2 设 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ 为三次可微曲线. 若有 $k(s) = 0$ 就称 $\mathbf{p}(s)$ 为曲线的顶点. 若曲线的起点 $\mathbf{p}(0)$ 与终点 $\mathbf{p}(L)$ 相同就称 \mathbf{p} 为闭曲线; 若进一步有 $\mathbf{p}(s_1) \neq \mathbf{p}(s_2)$, $0 < s_1 < s_2 < L$, 就称 \mathbf{p} 为简单闭曲线. 若连结曲线 \mathbf{p} 上任何两点的线段在内部区域中, 就称 \mathbf{p} 为卵形线(oval curve)或闭凸曲线.

简单闭曲线把平面分成两块区域, 称其中的有界区域为 \mathbf{p} 的内部区域.

例 若 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s 为自然参数) 为闭凸曲线, 即 \mathbf{r} 所围的有界区域为凸区域, 对 $a > 0$, 定义 \mathbf{r} 的平行曲线

$$\mathbf{r}_a(s) = \mathbf{r}(s) - a\mathbf{N}(s).$$

证明:

$$L(a) = L(\gamma) + 2\pi a,$$

$$A(a) = A(\gamma) + aL(\gamma) + \pi a^2,$$

$$k_a(s) = \frac{k(s)}{1 + ak(s)},$$

其中 \mathbf{N} 为 γ 的单位法矢, $A(\gamma)$ 为所围有界区域的面积, $L(\gamma)$ 为 γ 的长度, k_a 为 γ_a 的曲率.

提示 记 t 为 γ_a 的弧长参数. 由弧长参数的定义知

$$t = \int \left| \frac{d\gamma_a}{ds} \right| ds = \int (1 + ak(s)) ds,$$

所以 $dt/ds = 1 + ak(s)$. 在这里我们注意到, 对闭凸曲线总有 $k(s) \geq 0$. 利用 $k(s) = d^2\gamma/ds^2$ 立即可得

$$\int k(s) ds = 2\pi.$$

这样

$$L(\gamma_a) = L(\gamma) + \int a k(s) ds = L(\gamma) + 2\pi a.$$

记 $\{\gamma_a; \mathbf{T}_a, \mathbf{N}_a\}$ 为 γ_a 的 Frenet 标架, 则有

$$\mathbf{T}_a = \frac{d\gamma_a/dt}{\left| d\gamma_a/dt \right|} = \frac{(\mathbf{T} - a\mathbf{N}) \gamma'}{\left| (\mathbf{T} - a\mathbf{N}) \gamma' \right|} = \mathbf{T},$$

于是, $\mathbf{N}_a = \mathbf{N}$. 这样我们有

$$\frac{d\mathbf{T}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{T}_a/ds}{dt/ds} = k\mathbf{N} (1 + ak).$$

于是知道

$$k_a(s) = \frac{k(s)}{1 + ak(s)}.$$

回忆, 对可定向的简单闭曲线 $\gamma(t)$, $t \in [b, c]$. 它包围的区域 S 的面积为

$$A = \int_S dx dy = \int_b^c x(t) \frac{dy}{dt} dt.$$

利用这个公式我们可以证明

$$A(a) = A(\quad) + aL(\quad) + a^2.$$

作为 Frenet 公式的另一个应用, 我们往证历史有名的四顶点定理.

定理 1(四顶点定理) 卵形线上至少有四个顶点.

证明 由 Frenet 公式 $x' = -ky, y' = kx$ 知

$$k ds = 0,$$

$$\int_p xk ds = - \int_p x k ds = - \int_p y ds = 0,$$

$$\int_p yk ds = 0.$$

因此, 对任何实数 a, b, c 有

$$\int_p (ax + by + c)k ds = 0. \quad (*)$$

由 p 是有界闭集知 $k(s)$ 至少有两个顶点, 即极大点与极小点. 若只有这两个顶点, 过这两点作直线 $ax + by + c = 0$ (见图 1.4), 则函数 $(ax + by + c)k$ 在 p 上 (除这两点外) 无零点且不变号; 而这与 $(*)$ 式矛盾! 这说明 k 至少还有另一零点. 但是任意光滑函数在闭凸曲线上符号变化要么为偶数次, 要么为无穷多次. 也就是说, k 在闭凸曲线 p 上至少有 4 个零点. 即证.

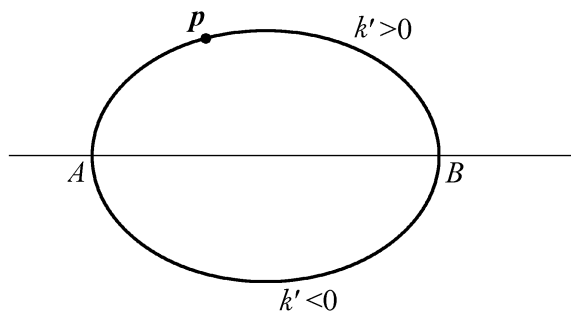


图 1.4

注 (1) 这一定理是由孟加拉国数学家发现.

(2) 在椭圆上正好有四个顶点.