

第 1 章 排列与组合

1.1 基本计数法则

组合数学在研究计数时经常要用到最基本的两个法则，一个是加法法则，另一个是乘法法则。以后没有特别说明都假定事件 A 和 B 是无关的两类。

加法法则、乘法法则及排列与组合

1. 加法法则

若具有性质 A 的事件有 m 个，具有性质 B 的事件有 n 个，则具有性质 A 或性质 B 的事件有 $m+n$ 个。

最简单的例子是事件 A 为大于 0 小于 10 的偶数，即 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ，事件 B 是大于 0 而小于 10 的奇数，而 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ，则大于 0 而小于 10 的整数 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 共 9 个，大于 0 而小于 10 的整数或为偶数（属于 A ）或为奇数（属于 B ），根据加法法则共有 $4+5=9$ 个。

2. 乘法法则

若具有性质 A 的事件有 m 个，具有性质 B 的事件有 n 个，则具有性质 A 与性质 B 的事件有 mn 个。

例 1.1 设一标识符由两个字符组成：第 1 个字符由 a, b, c, d, e 组成，第 2 个字符由 $1, 2, 3$ 组成。依据乘法法则共有 $5 \times 3 = 15$ 种产生方式，即

$$a1, a2, a3; b1, b2, b3; c1, c2, c3; d1, d2, d3; e1, e2, e3$$

例 1.2 设 A 到 B 有 3 条不同的路径， B 到 C 也有 3 条不同的

路径 则从 A 经过 B 到 C 共有 $3 \times 3 = 9$ 条不同的路径 (图 1.1)

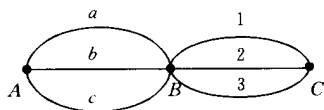


图 1.1

假定前面 3 条 A 到 B 的路径分别为 a, b, c , 后面 B 到 C 的路径分别为 $1, 2, 3$, 则 A 到 C 经过 B 的路径为

$$a1, a2, a3; b1, b2, b3; c1, c2, c3$$

例 1.3 求小于 10000 的正整数中含有数字 1 的数的个数.

小于 10000 的正整数可以看成是 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 中取 4 个数构成的 4 位数. 比如一位数 8 可以看成是

$$0008$$

0 不属于正整数, 故根据乘法法则共有 $10^4 - 1 = 9999$ 个. 同理, 4 位数中不含 1 的正整数的个数应为

$$9^4 - 1 = 6561 - 1 = 6560$$

所以小于 10000 并含有数 1 的数的个数为

$$9999 - 6560 = 3439$$

加法法则有时可以表示为

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

类似地, 乘法法则可表示为

$$|A \cap B| = |A| |B|$$

前提是 $A \cap B = \emptyset$ 即 A 和 B 是不同的两种事件. $|A|$ 表示事件 A 的数目.

1.1.2 应用举例

例 1.4 长度为 n 的二元码的数目.

$$\text{令 } a = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad a_i \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n.$$

当 $n=2,3$ 时, 编码如图 1.2 所示.

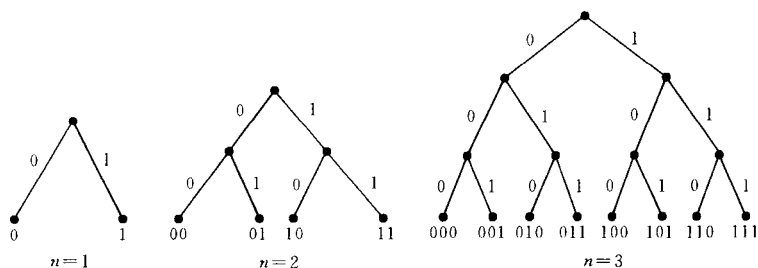


图 1.2

根据乘法法则, 长度为 n 的二元码总数为

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ 项}} = 2^n$$

例 1.5 脱氧核糖核酸 DNA.

DNA 是遗传物质的基本构件, 由 T, C, A, G 四种化合物构成的链 (在遗传学上, T 称为胸腺嘧啶, C 称为胞嘧啶, A 称为腺嘌呤, G 为鸟嘌呤). 由它们的排列顺序确定一个遗传信息的编码. 人类的 DNA 链长度为 2.1×10^{10} . 根据乘法法则, 人的 DNA 数目为 (由于 $4^{2.1} = 18.379 > 10^{1.26}$)

$$4^{2.1 \times 10^{10}} = (4^{2.1})^{10^{10}} > (10^{1.26})^{10^{10}}$$

故

$$4^{2.1 \times 10^{10}} > (10^{10^{10}})^{26}$$

例 1.6 布尔函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 数目.

根据乘法法则, 长度为 n 的 $(0, 1)$ 符号串 $x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_i = 0, 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ 共 $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ 个}} = 2^n$ 个, 设分别由 a_1, a_2, \dots, a_{2^n} 表

示. 以 $n=2$ 为例.

令

$$a_1 = 00, a_2 = 01, a_3 = 10, a_4 = 11$$

$f(a_j)$ 可取值 0 或 1, $j=1, 2, 3, 4$. 故 $n=2$ 的布尔函数数目应为

$$2^4 = 16$$

同理 n 个变元的布尔函数数目应为 2^{2^n} .

当 $n=4$ 时, $2^4 = 16$ 故 4 个布尔变量 x_1, x_2, x_3, x_4 的布尔函数数目为

$$2^{16} = 65536$$

例 1.7 某一 BASIC 语言, 标识符或由两个字符组成, 其中第 1 个字符为英文字母, 第 2 个字符由英文字母或数字构成; 或只有一个字符, 即由一个英文字母组成. 试求合乎要求的标识符数目.

第 1 个字符为英文字母, 共 26 种可能;

第 2 个字符为英文字母或数字, 共 $26 + 10 = 36$ 种可能

根据乘法法则共 $26 \times 36 = 936$ 种可能.

若标识由一个英文字母构成, 则共有 26 种可能.

根据加法法则, 标识符总数为

$$936 + 26 = 962$$

例 1.8 $n = 7^3 \times 11^2 \times 13^4$ 求除尽 n 的数的个数.

除尽 n 的数可写成 $7^{\alpha_1} \times 11^{\alpha_2} \times 13^{\alpha_3}$, $0 \leq \alpha_1 \leq 3, 0 \leq \alpha_2 \leq 2, 0 \leq \alpha_3 \leq 4$ 故除尽 n 的数的个数为

$$4 \times 3 \times 5 = 60$$

例 1.9 由 a, b, c, d, e 这 5 个字符 从中取 6 个按字典顺序构成字符串, 要求: (1) 第 1 和第 6 个字符必为子音字符 b, c, d ; (2) 每一字符串必有两个母音字符 a 或 e , 且两个母音字符不相邻; (3) 相邻的两子音字符必不相同. 求字符串的数目.

这样的字符串依字典顺序排列为

<i>bababc</i>	<i>bababd</i>	<i>babacb</i>
<i>babacd</i>	<i>babadb</i>	<i>babadc</i>
<i>babcab</i>	<i>babcac</i>	<i>babcad</i>

...

dedecd dededb dededc

什么叫字典序，即 a 在 b 之前，表明 $a < b$ ，同理， $b < c$ 。对 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 和 $b_1 b_2 \cdots b_k$ 若存在 $t \leq k$ 使得 $a_i = b_i, i < t$ 但 $a_t < b_t$ ，即 a_t 的顺序在 b_t 之前，则称

$$a_1 a_2 \cdots a_k < b_1 b_2 \cdots b_k$$

于是两个母音字母 a, e 的位置有以下 3 种可能：(2, 4), (2, 5), (3, 5)。(2, 4) 表示一个母音在第 2 位，另一个母音在第 4 位。

故长度为 6 的字符串可有以下 3 种格式：

(2, 4): $\times \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \times \quad \times$

(2, 5): $\times \quad \circ \quad \times \quad \times \quad \circ \quad \times$

(3, 5): $\times \quad \times \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \times$

其中 \times 表示子音， \circ 表示母音，两个子音字母有 3×3 种选择，一对相邻的子音字母有 3×2 种选择。每种格式都有 $3^2 \times 3 \times 2 \times 2^2$ 种方案。

根据加法法则与乘法法则，符合以上格局的字符串总数应为

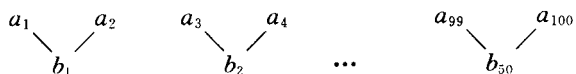
$$\begin{aligned} N &= 3(3^2 \times 2^2 \times 3 \times 2) \\ &= 3^4 \times 2^3 = 81 \times 8 = 648 \end{aligned}$$

1.2 一一对应

如果说加法法则与乘法法则是计数的基本法则，则一一对应也是在计数过程中经常用到的方法之一。这个术语在数学中经常见到，在组合数学中又有了新的含义。即若问题 A 和问题 B 对应， A 不容易求解，而 B 较容易求解，则可以通过对 B 的计数，反过来得到 A 的解。先举一个例子。设已知序列：

$$a_1, a_2, \dots, a_{100}$$

从中找出最大者，试问需要作多少次比较？



假定 a_1 和 a_2 比较, 设 $b_1 = \max\{a_1, a_2\}$; a_3 和 a_4 比较, 得到 $b_2 = \max\{a_3, a_4\}$; 依此类推.

$$b_k = \max\{a_{2k-1}, a_{2k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, 50$$

同理,

$$c_j = \max\{b_{2j-1}, b_{2j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, 25$$

只剩下 c_1, c_2, \dots, c_{25} 淘汰了 75 个数.

令 $d_h = \max\{c_{2h-1}, c_{2h}\}, \quad h = 1, 2, \dots, 12$

$$d_{13} = c_{25}$$

从 d_1, d_2, \dots, d_{13} 中得到:

$$e_l = \max\{d_{2l-1}, d_{2l}\}, \quad l = 1, 2, \dots, 6$$

$$e_7 = d_{13}$$

又从 e_1, e_2, \dots, e_7 中得到:

$$f_m = \max\{e_{2m-1}, e_{2m}\}, \quad m = 1, 2, 3$$

$$f_4 = e_7$$

再令 $g_1 = \max\{f_1, f_2\}, \quad g_2 = \max\{f_3, f_4\}$

最后 $M = \max\{g_1, g_2\}$

共需进行 $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 2 + 1 = 99$ 次比较.

其实, 若考虑每作一次比较就淘汰一个数, 从 100 个数中找出其中最大的数 M 必须淘汰 99 个数, 故须作 99 次比较. 将这个问题看做是有 100 位选手参加的单打淘汰赛, 最后产生一名冠军就更容易理解了. 同样, 1000 个数中要找出最大者 (或最小者) 可立即可回答必须作 999 次比较, 无需再作上面一系列的分析.

例 1.10 C_nH_{2n+2} 是碳氢化合物, 随 n 的不同有下列不同的支链如图 1.3 所示.

请注意图 1.4(a) 和 (b) 两个图实际上是同构的.

与 b_2 相连接,再消去 a_2 及边 (a_2, b_2) .继续以上的步骤 $n-2$ 次,直到最后剩下一条边为止.于是一棵树对应一个序列

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$$

b_1, b_2, \dots, b_{n-1} 是 1 到 n 中的数,且并不是一定不相同.

反之,任给一个序列

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-2} \quad (1)$$

其中 $1 \leq b_i \leq n, i=1, 2, \dots, n-2$, 便可找到与之对应的树 T 方法如下:从序列

$$1, 2, \dots, n \quad (2)$$

中找到第 1 个不出现在 b_1, b_2, \dots, b_{n-2} 中的数,这个数显然就是 a_1 ,同时找出树 T 的边 (a_1, b_1) .从序列(1)和序列(2)中分别消去 b_1 和 a_1 .在余下的序列中继续以上的步骤 $n-2$ 次,直到序列(1)为空为止.这时序列(2)剩下的两个数设为 a_k 和 b_k .边 (a_k, b_k) 也是树 T 的最后一条边.于是便得到树 T .

这就证明了 n 个标号顶点的树和 $n-2$ 个数

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$$

一一对应,其中 $1 \leq b_i \leq n, i=1, 2, \dots, n-2$.根据乘法法则,序列(1)的数目为 n^{n-2} 定理得证.

例 1.11 图 1.5 是一个极端的例子,不难得到 $n=6, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ 即图 1.5 对应序列

$$1 \ 1 \ 1 \ 1$$

如图 1.6 所示.反过来从

$$(1) \begin{cases} (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (1, 1, 1, 1) \end{cases}$$

$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 中第 1 个不出现在 $(1, 1, 1, 1)$ 的数为 2, 可得 (a_1, b_1) 为 $(2, 1)$, 即 $a_1 = 2, b_1 = 1$.

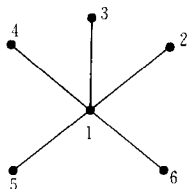
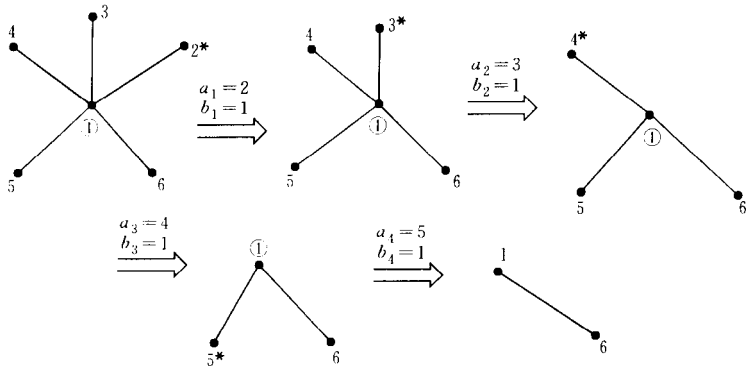


图 1.5



图中 * 为 a_i , \circ 为 b_i 标号

图 1.6

从 $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 中删去 2 从 $(1, 1, 1, 1)$ 中删去 1, 可得:

$$(2) \begin{cases} (1, 3, 4, 5, 6) \\ (1, 1, 1) \end{cases}$$

继续以上步骤, 可得 $a_2 = 3, b_2 = 1$. 删去 a_2 和 b_2 得

$$(3) \begin{cases} (1, 4, 5, 6) \\ (1, 1) \end{cases} \quad \text{所以, } a_3 = 4, b_3 = 1.$$

$$(4) \begin{cases} (1, 5, 6) \\ (1) \end{cases} \quad \text{所以 } a_4 = 5, b_4 = 1.$$

$$(5) \begin{cases} (1, 6) \\ \emptyset \end{cases} \quad \text{故 } (1, 6) \text{ 为树枝.}$$

综上所述, 树枝为

$$(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$$

例 1.12 以图 1.7 为例说明以上的步骤.

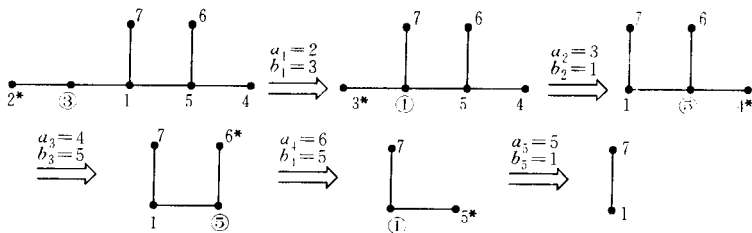


图 1.7

故得

$$b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = 5, b_4 = 5, b_5 = 1$$

即树 T 对应于序列 $3, 1, 5, 5, 1$.

反过来, 有

$$(1) \begin{cases} (1, 2^*, 3, 4, 5, 6, 7) \\ ((3), 1, 5, 5, 1) \end{cases} \quad \text{可得 } a_1 = 2, b_1 = 3. \text{ 分别删去 } a_1 \text{ 和}$$

b_1 得:

$$(2) \begin{cases} (1, 3^*, 4, 5, 6, 7) \\ ((1), 5, 5, 1) \end{cases} \quad \text{可得 } a_2 = 3, b_2 = 1. \text{ 分别删去 } a_2 \text{ 和}$$

b_2 得:

$$(3) \begin{cases} (1, 4^*, 5, 6, 7) \\ ((5), 5, 1) \end{cases} \quad \text{可得 } a_3 = 4, b_3 = 5. \text{ 分别删去 } a_3 \text{ 和 } b_3 \text{ 得:}$$

$$(4) \begin{cases} (1, 5, 6^*, 7) \\ ((5), 1) \end{cases} \quad \text{可得 } a_4 = 6, b_4 = 5. \text{ 分别删去 } a_4 \text{ 和 } b_4 \text{ 得:}$$

$$(5) \begin{cases} (1, 5^*, 7) \\ (1) \end{cases} \quad \text{可得 } a_5 = 5, b_5 = 1. \text{ 分别删去 } a_5 \text{ 和 } b_5 \text{ 得:}$$

$$(6) \begin{cases} (1, 7) \\ \emptyset \end{cases} \quad \text{故 } (1, 7) \text{ 是树枝.}$$

即树 T 由下列树枝构成:

$$(2, 3), (3, 1), (4, 5), (6, 5), (5, 1), (1, 7)$$

读者不难将这棵树恢复起来。

1.3 排列

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是 n 个不同元素的集合, r 满足 $0 \leq r \leq n$. 任取 A 中 r 个元素按顺序排成一列, 称为从 A 中取 r 个的一个排列。

例如, $A = \{a, b, c, d\}$, $r = 3$. 从 A 中取 3 个排列的全体如下:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
 $abd, aab, bad, bda, dab, dba,$
 $acd, adc, cad, cda, dac, dca,$
 $bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$

总数为 24 个。

令 P_r^n 表示从 n 中取 r 个排列的全体数目, 有的也用 $P(n, r)$ 来表示。

从 n 中取 r 个排列, 可以看做是与下面的问题一一对应。

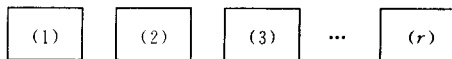


图 1.8

图 1.8 为 r 个依序排列的盒子. 设 A 为带有标志 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个球. 从 A 中取一个球放在第 1 个盒子中, 从余下的 $n-1$ 个球中取另一个放在第 2 个盒子中, 依此类推. 最后, 从 $n-r+1$ 个余下的球中取一个放到第 r 个盒子中. 由此可得从 A 中取 r 的一个排列。

第 1 个盒子有 n 种出现的可能, 第 2 个盒子有 $n-1$ 种出现的可能, ..., 第 r 个盒子有 $n-r+1$ 种出现的可能. 根据乘法法则:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

由 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ 所以有

$$P_r^n = n! / (n-r)!$$

为了方便起见, 令 $0! = 1$, 所以, $P_n^n = 1$.

$$P_n^n = n!$$

例 1.13 由 5 种颜色的星状物, 20 种不同的花排成如下的图案: 两边是星状物, 中间是 3 朵花. 问共有多少种这样的图案?

5 种颜色的星状物取两个排列的排列数为

$$P_2^5 = 5 \times 4 = 20$$

20 种不同的花, 取 3 种排列的排列数为

$$P_3^{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

根据乘法法则, 共有图案数为

$$20 \times 6840 = 136800$$

例 1.14 A 单位有 7 位代表, B 单位有 3 位代表, 排成一列合影. 要求 B 单位 3 个人排在一起. 问有多少种不同的排列方案?

B 单位 3 个人的某一排列作为 1 个元素参加单位 A 进行排列, 可得方案为 $(7+1)! = 8!$.

但 B 单位的 3 人共有 $3!$ 种排列.

根据乘法法则, 总排列方案数为

$$8! \times 3!$$

例 1.15 若例 1.14 中 A 单位的两人排在两端, B 单位的 3 人不能相邻, 问有多少种不同的排列方案?

A 单位 7 人共有 $7!$ 种排列. 两端固定后, B 单位 3 人中的第 1 人有 6 种选择.

设 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ 是 A 的排列,

$$A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6 * A_7$$

B 单位第 1 位的 6 种选择, 即上面 * 的位置. 第 2 位为了不与第 1 位并排相邻, 故只有 5 种选择. 第 3 位有 4 种选择, 故排列总数为

$$7! \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$$

例 1.16 求 20000 到 70000 间的偶数中由不同数字组成的 5 位数的个数.

(1) 假定所求的数为 $abcde$ 这 5 位数, 其中 $2 \leq a \leq 6, e \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

若 $a \in \{2, 4, 6\}$ 则 e 有 4 种选择, bcd 有 $P_3^{10-2} = P_3^8$ 种选择. 根据乘法法则, 有:

$$3 \times 4 \times P_3^8 = 4032$$

种可能.

(2) 若 $a \in \{3, 5\}$ 则 e 有 5 种选择, bcd 依然有 P_3^8 种选择. 根据乘法法则, 有:

$$2 \times 5 \times P_3^8 = 3360$$

根据加法法则, 总个数为

$$4032 + 3360 = 7392$$

例 1.17 试求由 $\{1, 3, 5, 7\}$ 组成的不重复出现的整数的总和.

这样的整数可以是 1~4 位 其数目为

$$P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$$

问题是求这 64 个数的总和.

若将这 64 个数全部罗列出来再求和, 这不是一个好办法. 由它们构成的数有一位数、两位数、三位数、四位数. 统计各自在个位、十位、百位、千位上数值的总和, 设它们的总和分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 , 则问题所求的和 S 有

$$S = S_1 + 10S_2 + 100S_3 + 1000S_4.$$

(a) S_1 的计算

一位数中个位数之和为 $(1+3+5+7)P_0^3$ 即

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

两位数的组合有 13, 15, 17, 31, 35, 37, 51, 53, 57, 71, 73, 75. 故两位数中个位数之和为

$$(1+3+5+7) \times P_1^3 = 48$$

三位数有：

135 ,137 ,153 ,157 ,173 ,175 ,315 ,317 ,351 ,357 ,371 ,375 ,513 ,
517 ,531 ,537 ,571 ,573 ,713 ,715 ,731 ,735 ,751 ,753

三位数中个位数之和为

$$(1+3+5+7) \times P_2^3 = 16 \times 6 = 96$$

四位数有：

1357 ,1375 ,1537 ,1573 ,1735 ,1753 ,3157 ,3175 ,3517 ,3571 ,
3715 ,3751 ,5137 ,5173 ,5317 ,5371 ,5713 ,5731 ,7135 ,7153 ,
7315 ,7351 ,7513 ,7531

同样，四位数中个位数之和为

$$(1+3+5+7) \times P_3^4 = 16 \times 6 = 96$$

故 $S_1 = (1+3+5+7)(P_0^3 + P_1^3 + P_2^3 + P_3^3) = 16 + 48 + 96 + 96 = 256$

(b) S_2 的计算，即计算在十位数的和

$$\begin{aligned} S_2 &= (1+3+5+7)(P_1^3 + P_2^3 + P_3^3) \\ &= 16 \times (3+6+6) = 240 \end{aligned}$$

(c) S_3 的计算

$$S_3 = (1+3+5+7)(P_2^3 + P_3^3) = 16 \times 12 = 192$$

(d) S_4 的计算

$$S_4 = (1+3+5+7)P_3^4 = 96$$

故

$$\begin{aligned} S &= 256 + 240 \times 10 + 192 \times 100 + 96 \times 1000 \\ &= 256 + 2400 + 19200 + 96000 \\ &= 117856 \end{aligned}$$

例 1.18 随机地选择 $n (< 365)$ 个人，求其中至少有两人生日相同的概率。

n 个人生日不同的排列数为

$$P(365, n) = \frac{365 \cdot 364 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(365 - n)!}$$

n 个人生日的序列可能有 365^n 种, 故 n 个人在一起生日不同的概率为

$$P(365, n)/365^n = \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

n 个人中有相同生日的概率为

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

1.4 圆周排列

上面讨论的排列是排列成一列, 如若排列在一个圆周上, 则称为圆周排列, 或简称为圆排列.

从 n 个对象中取 r 个沿一圆周排列的排列数用 Q_r^n 表示, 或表以 $Q(n, r)$.

圆排列与排列的不同之处在于圆周排列头尾相邻. 比如 4 个元素 a, b, c, d 可以有不同的 4 种排列:

$$abcd, \quad dabc, \quad cdab, \quad bcda$$

但在圆排列中则是一回事, 属于同一个圆周排列.

从 n 中取 r 个作圆排列的排列数 Q_r^n 与 P_r^n 的关系是

$$Q_r^n = P_r^n / r$$

这个道理很明显, 取 r 个作排列结果, 与圆排列比较重复了 r 次同理.

$$Q_n^n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

例 1.19 5 颗红色的珠子, 3 颗蓝色的珠子装在圆板的四周, 试问有多少种方案? 若蓝色珠子不相邻又有多少种排列方案? 蓝色珠子在一起又如何?

如若不加限制, 则有 $Q_8^8 = 7!$ 种排列方案.

若要求蓝色珠子在一起, 其实把它们看做是一个元素进行圆

排列 则为

$$Q_6^6 = 5!$$

最后讨论蓝色珠子不相邻的情况. 5 颗红色珠子的圆排列有 $4!$ 种, 第 1 个蓝色珠子有 5 种选择的可能 (见图 1.9) 第 2 个蓝色珠子为了避免与第 1 个蓝色珠子相邻, 只能有 4 种选择, 第 3 个蓝色珠子只有 3 种可能, 故有

$$4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$$

例 1.20 5 对夫妇出席一宴会, 围一圆桌坐下, 试问有几种不同的方案? 若要求每对夫妻相邻又有多少种方案.

5 对夫妻 10 个人围圆桌而坐, 则此问题相当于求

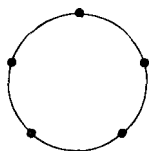


图 1.9

$$Q_{10}^{10} = 9! = 362880$$

若加上限制条件: 夫妻相邻而坐, 则可以考虑为 5 个元素的圆排列, 排列数为 $4!$. 但两位夫妇可以交换座位, 故根据乘法法则, 总方案数为

$$2^5 \cdot 4! = 32 \times 24 = 768$$

1.5 组合

当从 n 个元素中取出 r 个而不考虑它的顺序时, 称为从 n 中取 r 的组合. 其数目记为 $C(n, r)$, C_r^n 或 $\binom{n}{r}$.

例如, 从 100 名成员中选出 20 名成员编成组, 不考虑先后顺序, 则是一个组合问题. 如若从 100 名成员中选出 20 名依顺序排队, 则是排列问题.

从 $\{A, B, C, D\}$ 中取 3 个进行组合, 则有以下几种组合形式:

$$\{A, B, C\} \{A, B, D\} \{A, C, D\} \{B, C, D\}$$

对上面 4 组中的每组再作排列，例如对 $\{A, B, C\}$ 作排列得到：

$ABC \ ACB \ BAC \ BCA \ CAB \ CBA$

同理，对 $\{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}$ 也作排列可得：

$ABD \ ADB \ BAD \ BDA \ DAB \ DBA$

$ACD \ ADC \ CAD \ CDA \ DAC \ DCA$

$BCD \ BDC \ CBD \ CDB \ DBC \ DCB$

连同 $\{A, B, C\}$ 的排列，构成从 4 个元素 $\{A, B, C, D\}$ 中取 3 个元素进行排列的全体。

组合问题可以看做是：球有标志 $1, 2, \dots, n$ ，盒子则没有区别，从 n 个球中取 r 个放到 r 个盒子里，每个盒子一个，便得到 n 取 r 的组合。

若在每一种组合结果的基础上再对盒子进行排列，便得到 n 取 r 的排列。所以有，

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$

或

$$P_r^n = C_r^n \cdot r!$$

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

例 1.21 从 1 到 300 间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，试问有几种方案？

通过分析可以发现，3 个数之和被 3 除尽是有规律的，将 1 到 300 的数分成 3 组：

$$A = \{1, 4, 7, \dots, 298\}$$

$$B = \{2, 5, 8, \dots, 299\}$$

$$C = \{3, 6, 9, \dots, 300\}$$

下面两种情况是被 3 除尽的可能情况：

(1) 3 个数同属于 A 或 B 或 C 。

(2) 3 个数分别属于 A, B, C 。