第一章　随机事件与概率

物体中的分子运动是随机运动，它遵循统计规律.这种运动形态体现了微观运动的一个重要属性.本课程通过分子的运动及其相互作用，介绍微观物理的入门知识，以及微观现象与宏观现象之间的关系.为使读者能理解分子运动的特点及其描述方法，本章介绍“概率”的基本概念与运算规则，作为本课程的准备知识.

在学习本章以前，最好先复习中学数学中关于“排列组合”的部分.如有可能，还应复习关于“集合”的基本概念.

§1.1　概率的基本性质

1.1.1　概率的统计意义

物理学中有两类不同的事件.众所周知,若已知一物体的质量、初速度和所受的外力，必能依据运动定律精确地确定其运动情况.这类事件叫做必然事件.力学、电磁学等讨论的都是必然事件的规律.

然而，自然界的过程是复杂的，存在诸多事先无法预计的情况.例如在室内以一定的速度抛出一个羽毛球，它会有确定的落地点吗？按抛体运动的公式计算，应能精确地确定它唯一的落地点.但实际情况并非如此，在羽毛球运行的过程中，气流的强度和方向都是无法预测的，因而在球落地以前落点是无法确定的.即使在同一位置，以相同的初始条件反复抛球，每次的落点也不会精确地重复.这类事件叫做随机事件.

随机事件也是有规律的事件，但描述的方法有所不同.以上述抛球事件为例，经过多次抛球之后，人们可以说不可能落到抛射的反方向，还可以说落在某一区域的可能性大.事实上,人们已经常用‘可能性’来描述随机事件的发生.不仅如此，人们已用数值来度量可能性.例如,说某射击运动员命中飞碟有“九成把握”或‘90%的命中率”,也就是说命中的可能性为 0.9.在使用这样的语言时，人们或许没有认真思考过，但至少是经过长期观察后的直觉.如果教练员说“命中率为 90%”，则是根据多次训练的记录算出来的.

概率是对‘可能性’的定量表述.若一随机事件可能有 r 种互不相容的结果,在 n 次独立试验中,第 i 种结果出现 n_i 次.比值 n_i/n 反映了这一结果

需要全本请访问 www.ertongbook.com

出现的机会或可能性. 若在试验观测的次数增大时，n_i/n 趋于稳定值 p_i：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n}\longrightarrow p_i \tag{1.1}$$

p_i 就叫做第 i 种结果出现的概率. 概率曾叫或然率或几率.

上面所述的“独立试验”，是指任一次试验的结果，对其他各次试验产生何种结果没有任何影响. 以射击飞碟为例，若前一发不论是否命中，都不会因心理状态或环境变化影响运动员的下一次射击，则这种射击就是独立试验；否则是非独立的.

如上所述，欲确定一事件的某种结果出现的概率，要进行无穷多次试验，这当然是不可能的. 但只要试验次数足够大，n 和 n_i 都是大数则

$$\frac{n_i}{n}\approx p_i \tag{1.2}$$

而且 n 和 n_i 越大，上式也越准确. 在上面所述的例子中，如果教练员记录每次练习的成绩，根据长期的记录，得出命中率为 90% ,就是该运动员每次射击命中的概率近似为 0.9.

如果概率已知，现再做 n 次试验，能否事先知道第 i 种结果出现的次数呢？是否能由式 (1.2) 得

$$n_i = np_i \tag{1.3}$$

应该说 n_i 只是一种估计，叫做期望值. 实际情况不一定如此，人们不能事先准确地预言随机事件的结果. 但只要 n 足够大，实际的记录就接近于式 (1.3) 中的 n_i. 若 n 可视为无穷大,则式 (1.3)就有足够的准确性.

上面所说的‘可能的结果”,也包括必然的结果. 若第 i 种结果必然出现,则每次试验必得这种结果,即 $n_i=n$,故必有 $p_i=1$. 即，对于必然事件，其相应的结果出现的概率为 1.若第 i 种结果不可能出现，在 n 次试验中 n_i 恒为零,故必有 $p_i=0$. 即：若某种结果的出现是不可能的，则它出现的概率为零。从另一方面说，不可能的结果不出现，也是一种必然事件.

1.1.2 概率的基本性质

由于 n_i 是某种事件（结果）出现的次数，n_i 为非负数,则 $0\leqslant n_i\leqslant n$. 按式 (1.1)必有

$$0\leqslant p_i\leqslant 1 \tag{1.4}$$

这是概率的一项基本性质，它规定了概率的取值范围.

若一事件是若干互不相容的子事件的集合，该事件就叫做这些子事件之和. 例如在打靶时，命中 9 环或 10 环是两种互不相容的事件. 若规定

命中 9 环或 10 环皆为“优”,则命中 9 环或 10 环就是事件“优”的子事件,“优”是这两个子事件之和.

若一事件是第 i 种和第 j 种两子事件之和,在 n 次试验中,两子事件出现的次数分别为 n_i 和 n_j,则两子事件出现的概率分别为

$$p_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}, \qquad p_j = \lim_{n\to\infty} \frac{n_j}{n}$$

在 n 次试验中无论哪一子事件出现,都属于“和”事件出现,故“和”出现的次数为 n_i+n_j. 根据式(1.1),“和”出现的概率为

$$p_{i+j} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i + n_j}{n} = p_i + p_j \tag{1.5}$$

由上式不难看出:子事件和的概率,等于各子事件的概率之和.这是概率运算的一项基本规则.

在 n 次试验中,各种可能的事件出现次数的总和必等于 n:

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

r 种事件的概率和为

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i}{n}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \tag{1.6}$$

即:全部可能的事件的概率和必等于 1.这是概率的又一基本性质.

上面的命题也可表述为:若把各种可能的事件视为一个集合,则该集合为必然事件,其概率必为 1. 以射击问题为例,若把所有的弹着点视为一个集合,该集合可称为“有弹着点”.显然,每次射击必“有弹着点”,这集合是必然事件.

若只研究第 i 种事件,其他各事件之和叫做逆事件,或第 i 种事件“不出现”.根据式(1.6),若逆事件出现的概率为 q_i,则必有

$$q_i = 1 - p_i \tag{1.7}$$

例如,若命中 10 环的概率为 0.7,则不命中 10 环的概率为

$$q_i = 1 - 0.7 = 0.3$$

1.1.3 概率的古典定义

上一节介绍了概率的统计意义,但人们实际上不能做到通过无穷多次试验来确定发生某一事件的概率.然而,人们可以依据经验和推理判断

两不同事件发生的可能性是否相等.“等可能性”的事件必以相等的概率发生.这里说的经验，是指人们对客观事物作了大量观测得到的结论.如果一随机事件可划分为多个以等概率出现的子事件之和，则就可以判断有关的事件发生的概率.这种方法可表述为：若一随机事件的全部可能的结果，是 N 个互不相容的等可能性的子事件之和，这种子事件叫做基本事件，每一基本事件发生的概率必为 $1/N$.若事件 A 是指定的 n_A 个基本事件之和，则发生 A 事件的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{N} \tag{1.8}$$

这种说法叫做概率的古典定义.

用概率的古典定义研究随机事件，首先要合理地划分基本事件.例如在研究容器中低压强气体分子的空间分布时，可以设想把容器划分为 V 个等体积的宏观单元(图 1-1)，把一个指定的分子出现在一个指定的单元中视为一种基本事件，则这个分子出现在任一单元中是 V 个基本事件之和.经过长期的观察，容器中的气体分子总是趋向均匀分布的.人们有理由相信，一个指定的分子以相等的概率出现在任一单元的概率皆为 $1/V$.

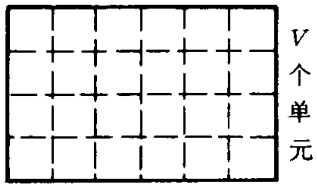


图 1-1 划分容器

作出这种判断还在于低压强气体的分子密度是很小的，且分子的体积很小.不论指定单元中有多少分子，都不会影响其他分子进入该单元或自该单元逸出，并认为气体分子之间及分子与器壁之间，除完全弹性碰撞之外没有其他相互作用.气体分子因碰撞而作随机运动.一个指定的分子可以出现在任何一个单元中，任何一个单元对这个分子都没有特殊性.因而出现在任何一个单元中的概率为 $1/V$.

可以设想，若在容器中划出一个包含 V_n 个单元的空间区域（图 1-2)，按概率的古典定义一个指定的分子出现在该区域中的概率为

$$P(V_n)=\frac{V_n}{V}$$

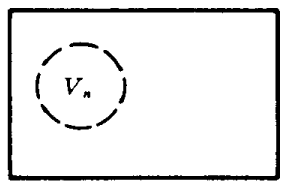


图 1-2 容器中的一个空间区域

上述的气体模型实际上就是理想气体模型.实验证明，低压强气体的分子运动状态，很接近于由理想的独立分子（粒子）组成的、理想气体的运动状态.

例 1 在容器中有 N 个理想气体分子，设想把容器划分为等容积的两部分

(图 1-3),求有且仅有 μ 个分子出现在左边的概率.



图 1-3 均分的容器

解 因左、右两边容积相等，每个分子以等可能性出现在左边或右边，且不影响其他分子出现在哪一边.N 个分子的分布共有 2^N 种可能的组合。每个分子对任何一种组合都没有特殊的选择性.因此，每一种组合都是等可能性的基本事件.即：基本事件的总数为 2^N.

本题讨论"μ 个分子出现在左边"的情况，是从 N 个分子中任选 μ 个分子置于左边.这一事件包含了 C_N^μ 种基本事件：

$$C_N^\mu = \frac{N!}{(N-\mu)!\mu!}$$

根据概率的古典定义,μ 个分子出现在左边的概率为

$$P(\mu) = \frac{N!}{2^N(N-\mu)!\mu!} \tag{1.9}$$

§ 1.2 事件组的概率

1.2.1 相关事件的概率

在一种随机事件相继发生的过程中，A,B 两事件出现的概率，可以与先发生 A 还是先发生 B 有关.这种事件叫做相关事件.若先发生 B 事件的概率为 $P(B)$,在发生 B 事件后 A 事件可以发生也可以不发生.在已发生 B 事件后,再发生 A 事件的概率,叫做在 B 事件已发生的条件下，A 事件发生的概率，记为 $P(A|B)$.可以证明：出现先发生 B 事件再发生 A 事件这种事件组的概率为

$$P(B,A) = P(B)P(A|B) \tag{1.10a}$$

若先发生事件 A 的概率为 $P(A)$,在 A 事件发生后发生 B 事件的概率为 $P(B|A)$,则出现先发生 A 事件再发生 B 事件这种事件组的概率为

$$P(A,B) = P(A)P(B|A) \tag{1.10b}$$

应该注意，在一个过程中间一个指定的事件出现的概率，是可能与前面发生什么事件有关的.这样两个前后发生的事件叫做相关事件.$P(A|B)$ 和 $P(B|A)$ 是在前面已发生事件 B 或 A 的条件下，再发生事件 A 或 B 的概率，叫做条件概率.$P(A|B)$ 或 $P(B|A)$与上面所说的 $P(A)$ 或 $P(B)$常是不同的，二者之间的差异反映了前后两事件的某种内在联系.下面举例说明这个概念.

例 2 在暗箱中有触觉不能分辨的红球 4个和黑球 6 个.现依次取出两球，问：先取出红球、后取出黑球这一事件组出现的概率是多少？

需要全本请访问 www.ertongbook.com

解　因 10个球都是触觉不可分辨的，每个球被取出的概率皆相等，可以认为每一个球是一个基本事件.现以 R 事件表示红球被取出，B 事件表示黑球被取出.

在第一次取球时，基本事件总数为 10,属于 R 事件的基本事件数为 4. 因此，第一次取得红球的概率为

$$P(R) = 4/10 = 2/5$$

在取出一红球后，基本事件数改变为 9,属于 B 事件的基本事件数为 6. 因此,在取出一红球的条件下，再取得黑球的概率为

$$P(B|R) = 6/9 = 2/3$$

按照式(1.10)先取得红球后取得黑球这一事件组出现的概率为

$$P(R,B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

这个例题说明，在取出一球后已改变了基本事件总数. 第一次取出的是红球还是黑球，又改变了属于 R 和 B 的基本事件数. 因此,第二次取得红球或黑球的概率，与第一次取出什么球有关.

当然，也有另一种过程. 在过程中事件 A 出现的概率与前面是否发生事件 B 无关,则有

$$P(A|B) = P(A) \tag{1.11a}$$

式(1.10a)变为

$$P(B,A) = P(B)P(A) \tag{1.11b}$$

若在过程中间,B 事件出现的概率，也与前面是否发生 A 事件无关,则有

$$P(B|A) = P(B) \tag{1.12a}$$

式(1.10b)变为

$$P(A,B) = P(A)P(B) \tag{1.12b}$$

在过程中，若一事件发生的概率与前面发生的事件无关，就叫做独立事件. 式(1.11b)和式(1.12b) 是独立事件组成的事件组出现的概率.

例 3　对于例 2 的暗箱，在取出一球作记录后放回箱中再取一球. 问：依次取得红球和黑球这一事件组出现的概率是多少？

解　按规定的操作过程，在每一次取球时，箱中总有 4个红球和 6个黑球，与上一次取得什么球无关. 无论取得红球还是黑球，都是独立事件. 按命题所述的条件

$$P(R) = 4/10 = 2/5, \qquad P(B) = 6/10 = 3/5$$

“先取得红球后取得黑球”是两独立事件组成的事件组. 出现这一事件的概率为

$$P(R,B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

例 4　若在真空容器中，平行等距地设置多层栅网（图 1-4）,一个分子垂直地射向栅网. 已知分子在穿过某一层栅网时，与栅网发生碰撞的概率为常数 p. 求分子能

不经过碰撞而穿过 μ层栅网的概率.

解　分子与任一层栅网发生碰撞的概率为常数，与以前不经碰撞而经过多少层栅网无关.分子在经过第 i 层栅网时，是否发生碰撞是一种独立的随机事件. 已知与任一层栅网碰撞的概率为 p，则不经碰撞而穿过栅网的概率为

$$q = 1 - p$$

连续 μ 次不经碰撞而穿过栅网的概率为

$$P(\mu) = \underbrace{q \cdot q \cdots q}_{\mu\text{个}q} = q^{\mu} = \mathrm{e}^{\mu \ln q} \tag{1.13}$$

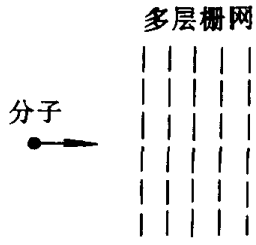


图 1-4　例 4

1.2.2　独立试验序列问题

“独立试验序列”是一种有普遍意义的物理问题的模型. 下面先通过一个例子，说明何谓“独立试验序列”.

在图 1-5 中,粒子(分子、原子)源不断向右发射粒子,形成射向小孔的粒子束. 每一个粒子能否穿过小孔，是独立的随机事件，与其他粒子是否穿过小孔无关. 若源依次射出 n 个粒子，每个粒子穿过小孔的概率为 p 求有 μ 个粒子穿过小孔的概率.

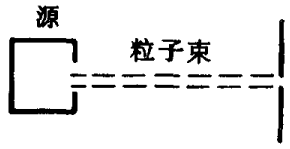


图 1-5　粒子束装置

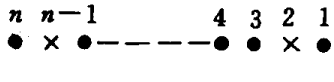


图 1-6　独立试验序列的图示

n 个粒子逐一穿过或不穿过小孔，组成在一个过程中依次发生 n 次独立事件. 这种过程可以用图 1-6 表示，图中用“·”表示穿过小孔的粒子,用“×”表示不能穿过小孔的粒子. 每个粒子穿过小孔的概率为 p,则不能穿过小孔的概率为 q:

$$q = 1 - p$$

有 μ 个粒子穿过小孔，即在图 1-6 中的 n 个位置上有 μ 个“·”和 $(n-\mu)$ 个“×”. 这种事件组可以认为在 n 个位置上,任选 μ 个规定为“·”,都是满足命题规定的事件组. 因此,“μ 个粒子穿过小孔”包含 C_n^{μ} 个事件组. 或者说命题规定的事件,是 C_n^{μ} 个事件组之和.

按照事件组的概率计算方法，出现一种 μ 个粒子穿过小孔的概率为

$$p(\mu) = p \cdot q \cdot \cdots \cdot pqp$$

不论出现哪一种情况,$P(\mu)$总是 μ 个 p 和 $(n-\mu)$ 个 q 之积. 即：

$$p(\mu) = p^{\mu} q^{(n-\mu)}$$

即在 C_n^μ 个事件组中，每一个事件组出现的概率都是相等的. 因此，有 μ 个粒子穿过小孔的概率为

$$P(\mu) = C_n^\mu p(\mu) = \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{(n-\mu)} \tag{1.14}$$

这类问题可提炼为一种模型. 它可表述为：对一种随机现象作 n 次独立试验，每次试验只计指定的事件发生与否. 已知在每次试验时发生指定事件的概率为 p，求在 n 次试验中有 μ 次发生指定事件的概率.

这一模型概括了许多物理问题，具有重要的意义. 例如：在体积为 V 的容器中有 n 个气体分子，求在指定的区域中有 μ 个分子的概率. 在这个问题中，任一分子是否在指定的区域中，可视为一次独立试验的结果. 因此，这一问题也是求在 n 次独立试验中，有 μ 次出现指定事件的概率.

式 (1.14) 是独立试验序列的解. 但在物理问题中，n 和 μ 都是大数，例如单位体积中的分子数. n 和 μ 的阶乘很难计算. 为便于计算，斯特林导出了一种近似计算公式：若 n 为很大的正整数，则有

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n} \tag{1.15}$$

该式叫做斯特林公式，其特点是 n 越大则该式越精确. 利用斯特林公式，可将式(1.14)化为

$$P(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right] \tag{1.16}$$

这是物理学中的常用公式.

§1.3 宏观物理量的统计意义

1.3.1 统计平均值（期望值）

虽然许多宏观现象都与随机运动有关，但人们还是可以用某些数值表示的物理量来描述有关的现象. 例如：在一个体积为 V 的容器中有 n 个气体分子，问在任一单位体积中有多少气体分子？人们会毫不迟疑地回答有 n/V 个分子，这不仅是简单的算术问题，而且也是与人们的感受相符的. 宏观物理学也不反对这种说法.

但是，气体的分子是作随机运动的粒子. 在任一指定的单位体积中，并没有确定不变的分子数. 式 (1.14) 说明，单位体积中的分子数可以为 $0,1,2,\cdots,n$，共有 $n+1$ 种可能的情况，只是每种情况出现的机会（概率）不同. 设想进行理想的快速测量，在该区域中分子数还来不及发生变化时，就已能测出该区域中的分子数. 那么，这 $(n+1)$ 种情况都是可能的结

果. 宏观物理学中所说的“单位体积中的分子数”又有什么意义呢？

实际上，用任何仪器测量物理量时，都要经历一段仪器响应被测物理量的时间，叫做测量时间. 在测量时间中，被测量可以经历大量的随机变化的状态. 仪器给出的测量值，常是在测量时间内出现的、各种随机状态的平均值. 在科学实验中，总是力图在保持实验条件相同的条件下作多次测量，并以平均值表示测得的物理量.

通过日益精确的测量发现，对任何物理量作多次测量，常不能得到一种测量值. 若对物理量 x 作 N 次测量，可以得到 ν 种不同的测量值. 若测量值为 $x_i(i=1,2,\cdots,\nu)$ 出现 n_i 次，则 x 的算术平均值为

$$\overline{x(N)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\nu}n_ix_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{\nu}n_i=N\right) \tag{1.17}$$

科学实验发现，N 次测量得到的算术平均值也不是确定的. 在保持实验条件不变的情况下，若增加测量次数 N，观察到的不同的测量值类别(ν)也越多，但平均值却趋近一个确定的极限值。

通过大量精密的实验认识到，宏观物理现象中总蕴含了两种属性：一种可以用具有确定性的物理量表征；另一种只能用随机变化的物理量表征. 若设想作无穷多次测量 $(N\to\infty)$，$\overline{x(N)}$ 应趋近稳定的 $\bar{x}$，即

$$\lim_{N\to\infty}x(N)\longrightarrow\bar{x} \tag{1.18}$$

x 就是表征宏观物理现象中，具有确定性规律的、这一属性的物理量.

在 $N\to\infty$ 时，式(1.17)右边的 n_i/N 趋近于测量值 x_i 出现的概率 p_i，即

$$\bar{x}=\sum p_ix_i \qquad \left(\sum p_i=1\right) \tag{1.19}$$

$\bar{x}$ 叫做物理量的统计平均值，又叫做期望值从理论上说，统计平均值不能通过有限次测量得到，但只要 N 足够大，则 $x(N)$ 是 $\bar{x}$ 在一定的精确度范围内的近似值. 通常所说的宏观物理量，常是指统计平均值或其近似值。

1.3.2 相对于统计平均值的涨落

前面已经说明，某次测量得到的物理量 x_i 不同于统计平均值 $\bar{x}$. x_i 相对于 $\bar{x}$ 的偏离量为

$$\Delta x_i=x_i-\bar{x} \tag{1.20}$$

由于 x_i 是以一定的概率出现的大小不同的随机量，Δx_i 也是相应的随机量. 全体可能的 Δx_i，表现了物理现象中随机变化的属性，也是一种重要

的物理量.在物理学中，希望能用一个数值，表征由全体 Δx_i 表现出来的物理属性.

因 Δx_i 与 x_i 对应，Δx_i 与 x_i 以相同的概率出现.所以 Δx_i 的统计平均值为

$$\overline{\Delta x_i} = \sum p_i(x_i - \bar{x}) = \sum p_i x_i - \left(\sum p_i\right)\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$
$$\left(\sum p_i = 1\right)$$

$\Delta x_i = 0$，说明 Δx_i 是大小不等的正数和负数，也说明 x_i 有时比 $\bar{x}$ 大、有时比 $\bar{x}$ 小.实际的物理量总是以它的统计平均值为中心，作随机的起伏变化.这种现象叫做涨落.涨落表现出物理现象中随机变化的属性，体现了另一种规律.

在认识到涨落的意义后，当然希望能用数值来表征涨落.由于相对于统计平均值 $\bar{x}$ 的偏离量，可为大小不等的正数或负数，在物理学中，用 $(\Delta x_i)^2$ 的统计平均值表示涨落的大小，叫做物理量 x 的方差.记为 $(\Delta x)^2$.方差的定义是

$$(\Delta x)^2 = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \sum p_i(x_i - \bar{x})^2 \tag{1.21a}$$

将上式展开得

$$(\Delta x)^2 = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2 = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2$$
$$= x_i^2 - 2\bar{x}\,\bar{x} + (\bar{x})^2 = x_i^2 - (\bar{x})^2 \tag{1.21b}$$

即：方差是物理量的平方的统计平均值，与该物理量的统计平均值的平方之差.

方差是表征涨落大小的物理量，而且也常有直观的物理意义.例如，若 x_i 是静止的容器内气体分子的速度，则因气体的质心是静止的，分子的平均速度为 $0(\bar{x}=0)$. x_i^2 则是正比于分子动能的物理量.按照式(1.21b)，气体速度的涨落（方差）正比于分子的平均动能.换句话说，与气体分子的随机速度有关的涨落，决定于分子的平均动能.

为了便于将物理量的涨落，与其自身的统计平均值比较，常用标准差表示涨落.标准差是方差的平方根（记为 δ），它与相应的物理量有相同的量纲：

$$\delta = \sqrt{(\Delta x)^2} \tag{1.22}$$

为表示 δ 与 $\bar{x}$ 的相对大小，定义相对标准差 σ：

$$\sigma = \frac{\delta}{|\bar{x}|} \tag{1.23}$$

*1.3.3 几条运算规则

为了有助于简单的运算，下面介绍几条有关的运算规则.在这里不从数学上给予证明，仅使读者有直观的、定性的理解.

(1) 若 x,y 是独立的随机变量，则

$$x+y=\bar{x}+\bar{y} \tag{1.24}$$

即：独立的随机变量和的统计平均值，等于各变量的统计平均值之和.

(2) 若 x,y 是独立的随机变量，则

$$x\cdot y=\bar{x}\cdot\bar{y} \tag{1.25}$$

即：独立的随机变量积的统计平均值，等于各变量的统计平均值之积.

(3) 若 x,y 是独立的随机变量，则

$$[\Delta(x+y)]^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \tag{1.26}$$

即：独立的随机变量和的方差，等于各随机变量方差之和.

思 考 题

1.1 已知一运动员射击飞碟的命中率为 80%.问：是否每射击 5 次必命中 4 次？是否会全命中或全不命中？

1.2 扼要地描述下列物体中的随机运动：

(1) 一瓶静置的氧气； (2) 一块静置的钢块.

1.3 在地面观察，上题中的两种物体是静止的还是运动的？它们有动量吗？有动能吗？

1.4 何谓事件和？何谓事件和出现的概率？试以下页习题 1.4 为例，说明事件和的概念.

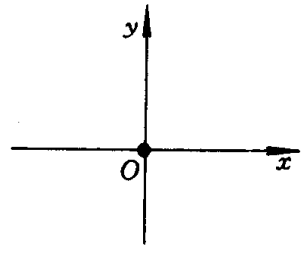
1.5 何谓相关事件？何谓独立事件？

1.6 已知一人射击飞碟的命中率为 80%,若该人连续射击 5 次,求：

(1) 有 4 次命中的概率；

(2) 5 次全中或全不中的概率.

1.7 一微粒在 Oxy 面上作二维随机位移，每秒以等概率在 x 轴方向位移 ±1 单位；同时以等概率在 y 轴方向位移 ±1 单位.若微粒自原点出发（见附图),问 经过 4 s 微粒出现在什么坐标处的概率最大？



思考题 1.7图

1.8 同上题，若在初始时刻原点附近有大量作随机运动的微粒，问：随着时间推移将观察到什么现象？在日常生活中，你是否感觉到有这类现象？

需要全本请访问 www.ertongbook.com

1.9 若在容积为 V 的容器中有大量的气体分子，试依据式（1.16)定性地说明,出现在任一小体积单元中的分子数密度，以在平均分子数密度附近的可能性最大.

1.10 在一个密闭的容器中，气体的分子数密度和压强是否总是均匀的？可能出现什么现象？

习　　题

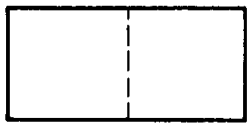
1.1 举例说明何谓必然事件，何谓随机事件.

1.2 扼要地说明概率的基本性质.

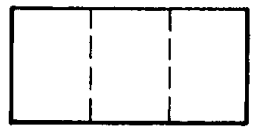
1.3 附图是一个密闭的容器，设想将它划分为容积相等的两部分.若容器中只有 4 个气体分子，问：

(1) 分子在容器中的分布有哪几种可能的情况？每一种情况出现的概率多大？

(2) 哪种情况出现的概率最大？



习题 1.3图



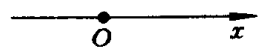
习题 1.4 图

1.4 若将一密闭的容器划分为等容积的三部分（见附图）.若容器中只有 6个气体分子，考察出现在中间部分的分子数.问：

(1) 可能出现哪几种情况？每一种情况出现的概率多大？

(2) 哪种情况出现的概率最大？

1.5 一微粒在 x 轴上作随机的位移，每次以等概率左移一单位或右移一单位.若微粒自原点 O 出发(见附图),经过 10次位移,问：



习题 1.5 图

(1) 回到原点的概率多大？

(2) 坐标为 ± 4 单位的概率多大？

1.6 若放射性原子的衰变是独立的，经长期观察知，在 1 s时间内每 N(大数)个原子中有 n_0 个原子衰变.

(1) 求一个原子在 1 s时间内衰变的概率；

(2) 求 N 个原子在 1 s时间内,有 μ 个原子发生衰变的概率.

1.7 若在气体中，一个分子在 τ 时间内与其他分子发生碰撞的概率为 p,求一个分子经过 $n\tau$ 时间 (n 为正整数) 不与其他分子碰撞的概率.

1.8 求习题 1.4 中，出现在容器中间部分的分子数的统计平均值、方差、标准差和相对标准差.

1.9 求习题 1.5 中的微粒位移的统计平均值、方差和标准差.

1.10 扼要地说明，你曾经观察过或感觉到哪些涨落现象.

第二章　物体的三种基本状态

§2.1　物体的状态

2.1.1　物质的聚集态

通常所说的物体，是由大量分子、原子、离子等微观粒子聚集组成的.由于微观粒子的相互作用及运动状态不同，组成不同的聚集状态，常见的状态有固态、液态和气态三种.通常按状态不同,把物体叫做固体、液体和气体.

固体有相对稳定的体积与形状.在固体中，微观粒子间的距离在10^{-10} m量级，粒子间有较强的相互作用，微观粒子能够相互约束，保持有相对稳定和有序的结构.

液体有相对稳定的体积，但无确定的形状.在液体中，由于粒子有较大的动能，粒子间虽仍有较强的相互作用，但不能约束成稳定的有序结构，很容易在外力作用下变形和流动.固态和液态合称凝聚态.

通常说的气体,是由呈电中性的分子(原子)组成的,分子间距离常远大于10^{-9} m量级.在这种距离上，分子间的微观作用力可忽略不计.使气体呈现为由大量独立的粒子组成的粒子系.由于微观的作用力已没有显著的作用，气体没有确定的体积和形状.如果没有外部给予的约束（例如重力或容器的器壁），气体将向周围弥散，分布到可能达到的空间.这种现象说明，气体中的分子是向各方向运动的粒子.

聚集在一个空间区域中的气体分子，由于运动也有机会使分子间距离小到有明显的微观作用，但这种相互作用的时间极短，且遵循动量守恒定律和机械能守恒定律，犹如宏观物体碰撞一样.通常把这种相互作用叫做‘碰撞’.碰撞是一种动量和能量传递过程.大量频繁的碰撞，使分子以各种可能的速率，向各可能的方向运动.人们不能依据宏观规律，预言每个分子将如何运动.现已认识到，这是一种遵循统计规律的随机运动.

从某种意义上说，气体分子的随机运动，反映了微观粒子间随机碰撞的特征.在固体和液体中，微观粒子间有相对稳定和持续的相互作用，但微观粒子也是运动的粒子，也有随机的相互碰撞.就这一点而言，可以通过对气体的研究，从一个方面认识固体和液体中的微观粒子的运动.

2.1.2 相

在物体中，分子结构类型均匀的部分叫做一种状态或一种“相”.粗略地说,固态、液态、气态是三种不同的相,叫做固相、液相、气相.随着认识的深入，人们认识到一种物质的固态，可能有几种不同结构的晶体，也就是可能有几种不同的相.例如碳可以有金刚石和石墨两种不同的相.在深低温的条件下，一些物质呈现超导性，这种状态叫做超导相.

一种物质可以有多种不同的相，不同相是性质不同的状态.物质可以从一相变为另一相，这种变化叫相变.相变是物理性质的质变，相变有明显的过程与特征.一般地说，在相变过程中，物体要吸收或释放热量，叫做相变潜热.例如将某种晶体均匀地加热，当其温度升到某临界值 T_0 后,温度不再升高(图 2-1).以后,只是不断吸收热量,在这过程中晶体逐渐熔解,直到完全熔解为液相.在完全熔解后,若继续加热,则其温度又可继续升高.

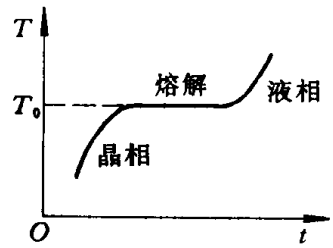


图 2-1 晶体的熔解过程

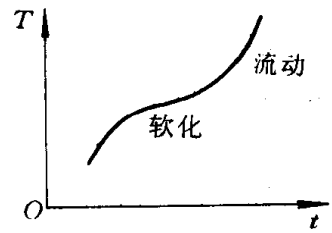


图 2-2 非晶体的升温过程

还有一些通常所说的“固体”是非晶体，例如玻璃和各种玻璃状物质，以及大多数的高分子聚合物.这类‘固体’也可以通过加温变为能流动的液体,但是它们没有相应的熔解过程,只是不断软化,连续地变为流体(图 2-2).这种非晶态固体，类似于粘滞性很强的液体.此外，它们的分子排列也没有确定的规则.在聚合物中，单构物（简单的化合物）的分子聚合成群,甚至由数千或更多的单构物分子结合成链式大分子,相应的‘固体’乃是这种大分子组成的“线团”.

对于这类非晶态“固体”，它由不能流动变为能流动并不是物理中的相变.所以，物理学中所说的固体，通常是指晶体而言.

2.1.3 平衡态与温度

“温度”的概念来源于人们对冷热的感受.人们很早就认识到，温度的作用遍及生物、化学、物理等各领域，也发现物体的各种性质几乎都与温度有关,例如体积、密度、弹性模量、电阻率等.到 17 世纪为止,人们除了

说温度是冷热的程度之外，还不能给它以确切的定义，但已开始制造定量测量温度的仪器——温度计.最早的温度计是把一定量的酒精密封在玻璃管内，用酒精的体积来指示温度，它是费第南第二于 1660 年制造的.以后逐渐发展了用不同物质和不同原理制成的温度计.在现代，已广泛使用热敏电阻温度计、热电偶温度计、pn 结温度计等.

经过长期的实践人们认识到，任何两个物体经长时间接触后，二者的温度相等.如果这两个物体一个是温度计，另一个是被测物体，就可以由温度计的刻度，给出被测物体的温度数值.用不同物质和不同原理制成的温度计，也可以通过长时间接触，给出相同的刻度.人们相信,不论温度计的原理是否相同，只要经过比对校准，它们就是有相同数值刻度的测温仪器.

在人们的经验中感受到，两个物体接触后一般有相互传热的作用过程.如果没有外界的影响，经过长时间从宏观上看，似乎这种相互作用逐渐消逝，两物体呈现为有均匀的温度，且可以在长时间保持不再变化.这一经验告诉人们，不论物体的组成有何不同，都有一种由冷热程度表现出来的状态.在没有外界的影响时，不同状态的物体接触，可通过相互作用而有相同的状态，叫做热平衡态，简称平衡态①.若两物体达到热平衡，则两物体的温度相等.若一物体各部分皆处于热平衡状态，则在该物体中各处的温度相等，该物体的整体状态可以用温度来表示.

在历史上，热学起始于对宏观热现象的研究，宏观热学的研究很难揭示温度表示什么状态.到 19 世纪 60 年代，开始通过研究物体中的分子运动，说明宏观的热学现象.逐渐提出温度表示的状态，是与物体的微观结构及微观粒子的运动有关的状态.

1909 年，喀拉氏根据热学和分子物理学的进展，将对温度的认识归结为温度定理：对于每一均匀系（相），其平衡态由变量 $x_1,\cdots,x_n$(泛指各种物理量)描写,必有一态函数 $T=f(x_1,\cdots,x_n)$存在,叫做该均匀系的温度；任何与该均匀系互为热平衡的均匀系，都有各自的温度函数，在平衡时这些温度的数值相等.

喀拉氏把温度定义为态函数，其实质是说明，表征热平衡的温度反映了物体的微观状态，这种微观状态，必通过该物体的各种宏观物理量显示出来.喀拉氏只是说明温度是一种反映物体的微观状态的物理量，还可以有其他描述微观状态的物理量，也叫做态函数.

①广义的平衡应包括力学平衡、化学平衡、相变平衡、热平衡等.这里只是指热平衡而言.

在喀拉氏提出温度定理以前，已建立了热力学第一定律和第二定律.由于“温度”是热学的最基本的概念，后来有人把温度定理叫做热力学第零定律.

2.1.4 阿伏伽德罗常量与宏观物理量

通常所说的物体（电磁场除外）总是由大量的分子组成.国际单位制规定，以摩尔(mol）为物质量的单位，其定义是每摩尔物质含有 N_A 个分子：

$$N_A = 6.022\,045 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \qquad (2.1)$$

N_A 叫做阿伏伽德罗常量.不难想到，实际的物体常是数量巨大的粒子组成的粒子系.例如在 1个标准大气压和 0℃ 的条件下，$1\ \mathrm{mm}^3$ 的气体中约有 2.7×10^{16}个分子.

不论在什么状态下，分子总是在运动而且是作随机运动，每一分子不可能都处在相同的状态下.那么，物体中可能有“物理性质均匀的部分”吗？在物体中,每个分子的状态都在作不规则的(随机的)变化.那么,物体的状态可能“长时间不发生变化”吗？应该注意，前面所说的均匀系和平衡系，是宏观物理学的概念，也是以实验测量为依据的.

设想用水银(酒精)温度计测量室温.不论毛细管下面的“泡”有多小，与它“接触”的总是大量的分子.温度计的指示，不是少数分子的作用，而是大量分子作用的平均值.或者说，温度计的指示，已十分接近于该区域内的统计平均值.宏观物理量的测量仪器，不可能探测某一个分子的作用①，总是探测一个小体积中大量分子作用的平均值，这就是宏观物理量.

前面所说的均匀，是指不同位置的、小体积中的平均值（统计平均值）是均匀的；平衡是指统计平均值平衡.这不意味着没有涨落，也不排除有较大的标准差.宏观物理所说的物体中“某处”,并不是指一个“几何点”,而是指一个在宏观看来很小的体积，这其中又包含了大量的分子.这种小体积通常叫做“宏观小、微观大”.作为处理问题的一种模型，这个小体积中物理量的平均值，也可以当作该处（或点）的宏观物理量.

但是，上述概念也不总是成立的.例如在超高真空的容器中或太空中，气体分子的数密度很小.很难说某时刻在宏观小体积中测量到的物理量，是接近于统计平均值.

①用现代的扫描隧道显微镜，已能观察固体表面单个原子的运动.

§2.2 气体中的分子运动

2.2.1 理想气体的状态方程

关于气体的实验定律，在热学和分子物理学的发展上有重要的作用.玻意耳(Boyle)在 1662 年，马略特(Mariotte)在 1679 年，先后独立地发现了如下的实验定律.

在气体的质量 M 与温度 t 不变时,其压强 p 与体积 V 之乘积保持不变.即 pV 是质量和温度的函数：

$$pV = f(M,t) \tag{2.2}$$

经过了一百多年，查理(Charles)于 1787 年、盖吕萨克（Gay-Lussac）于 1802 年分别得到实验定律

$$pV = g(M)(\alpha + t) \tag{2.3}$$

式中的 t 是摄氏温度.对多种气体测量的结果，发现 α 几乎与气体的化学组分无关,即

$$\alpha = 273.15℃ \tag{2.4}$$

以后的实验证明，式(2.3)中的 $g(M)$，只与气体的摩尔数 ν 成正比，与气体的质量没有直接的关系.即 式(2.3)可表为

$$pV = \nu R(\alpha + t) \tag{2.5}$$

式中的 R 是普适常量，叫做气体常量.根据式(2.5) 可以重新标定温度，把温度规定为

$$T = \alpha + t$$

T 叫做绝对温度，它的单位叫做开尔文，简称开（记为 K).在引进绝对温度后，式(2.5)可表为

$$pV = \nu RT \tag{2.6}$$

式(2.6)对各种气体皆适用（近似地），说明各种实际气体的物理规律,具有很强的共性.不同气体的差别，首先是化学组分不同.若不涉及化学变化，则是分子大小与结构的不同、分子内部的相互作用不同，及分子间相互作用力不同.舍弃这些特殊性质，各种气体的共同属性是：所有分子的体积和，与容器的容积相比是微不足道的；分子间的距离常较大，电磁的和万有引力的相互作用可以忽略不计.式(2.6)舍弃了不同气体的特殊属性，概括了气体共有的普遍属性.

气体的规律有如此强的共性.为了形象地描述这种共性，提出“理想气体”模型。理想气体被设想为：分子是体积为零的质点；除完全弹性碰撞

需要全本请访问 www.ertongbook.com