

中国计算机软件专业技术  
资格和水平考试自学丛书

# 基 础 数 学

张立昂 编著

清华大学出版社

## 内 容 提 要

本书是“中国计算机软件专业技术资格和水平考试自学丛书”之一,包括三部分內容:解析几何、微积分和线性代数。本书着重叙述基本概念、主要定理和性质、运算规律以及应用,并通过例题介绍常用的解题方法。

本书适用于考生复习,可供考生和其它人员自学或参考,也可作为理工科及经济管理类各专业的基礎数学教材。

(京)新登字 158 号

### 基 础 数 学

张立昂 编著

责任编辑 尹芳平

清华大学出版社出版

北京 清华园

× × × × 印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

开本: 787× 1092 1/16 印张: 17 字数: 408 千字

1993 年 11 月第一版 1993 年 11 月第一次印刷

印数: 0001—8000

ISBN 7-302-01330-6/TP·515

定价: 12.20 元

# 前 言

本书是根据“中国计算机软件专业技术资格和水平考试考试大纲”的要求编写的,是“中国计算机软件专业技术资格和水平考试自学丛书”之一。本书共包括三部分内容:解析几何(第3、4、5章)、微积分(第6章至第13章)和线性代数(第2章、第14章至第18章)。

本书着重叙述基本概念、主要定理和性质、运算规律以及应用,并通过例题介绍常用的解题方法,而略去理论性较强的定理证明。作为一本以帮助考生复习为主要目标的教材,本书力求简洁、精炼、准确,用较短的篇幅全面完整地介绍大纲规定的内容。同时,也考虑到其他可能的读者。本书仍是一本体系完整的教材,也可供任何具有高中文化程度的人员自学。就其内容而言,高等数学(通常指解析几何和微积分)和线性代数不但是计算机软件专业的基础数学,也是所有理工科专业和经济管理类专业的的基础数学,因此本书也可供从事这些专业的人员使用。由于笔者的水平所限,恐怕很难达到这些预想的要求,恳请读者批评指正。

编 者

1993年春于燕园

# 目 录

第 1 章 预备知识 .....	(1)
1.1 数轴与平面直角坐标系 .....	(1)
1.2 变量与函数 .....	(2)
1.3 函数的特性与函数图形 .....	(4)
1.4 几个记号和术语 .....	(5)
习题 1 .....	(7)
第 2 章 行列式 .....	(9)
2.1 行列式的定义及性质 .....	(9)
2.2 行列式的计算 .....	(12)
2.3 克莱姆法则 .....	(15)
2.4 消元法 .....	(17)
习题 2 .....	(20)
第 3 章 平面解析几何 .....	(23)
3.1 直线方程 .....	(23)
3.2 两条直线的关系 .....	(25)
3.3 二次曲线的标准方程及其性质 .....	(27)
3.3.1 椭圆 .....	(27)
3.3.2 双曲线 .....	(30)
3.3.3 抛物线 .....	(32)
3.4 坐标变换 .....	(34)
3.4.1 坐标平移 .....	(35)
3.4.2 坐标旋转 .....	(35)
3.4.3 二次曲线方程的化简 .....	(36)
3.5 极坐标 .....	(40)
3.6 参数方程 .....	(44)
习题 3 .....	(46)
第 4 章 向量代数 .....	(48)
4.1 空间直角坐标系 .....	(48)
4.2 向量及其运算 .....	(49)
4.2.1 向量加法 .....	(49)
4.2.2 数乘向量 .....	(49)
4.2.3 数量积 .....	(50)

4.2.4	向量积	(50)
4.2.5	混合积	(51)
4.3	向量及其运算的坐标表示	(51)
习题 4		(54)
<b>第 5 章</b>	<b>空间解析几何</b>	<b>(56)</b>
5.1	曲面方程和空间曲线方程	(56)
5.2	平面方程	(57)
5.2.1	平面方程	(57)
5.2.2	点到平面的距离	(59)
5.2.3	平面的夹角	(59)
5.3	空间直线的方程	(61)
5.4	直线与直线、直线与平面的关系	(63)
5.5	旋转曲面、柱面和锥面	(67)
5.5.1	旋转曲面	(67)
5.5.2	柱面	(69)
5.5.3	锥面	(70)
5.6	二次曲面	(72)
5.6.1	椭球面	(72)
5.6.2	抛物面	(73)
5.6.3	双曲面	(74)
5.7	空间曲线在坐标平面上的投影	(76)
习题 5		(77)
<b>第 6 章</b>	<b>极限</b>	<b>(79)</b>
6.1	数列的极限	(79)
6.2	函数的极限	(80)
6.3	无穷小量与无穷大量	(82)
6.4	函数的连续性	(84)
习题 6		(86)
<b>第 7 章</b>	<b>导数及其应用</b>	<b>(87)</b>
7.1	导数与微分的定义	(87)
7.2	导数的计算	(89)
7.3	高阶导数	(92)
7.4	中值定理与泰勒公式	(93)
7.5	洛必达法则	(95)
7.6	函数特性的判别	(97)
7.6.1	单调性与极值	(98)
7.6.2	凹凸性与拐点	(99)
7.6.3	渐近线	(100)
7.6.4	函数作图	(101)
7.7	最大值和最小值问题	(102)
习题 7		(103)

第 8 章	偏导数及其应用	(105)
8.1	多元函数的极限和连续性	(105)
8.2	偏导数	(105)
8.3	全微分	(109)
8.4	隐函数求导	(110)
8.5	方向导数与梯度	(112)
8.6	偏导数在几何方面的应用	(113)
8.6.1	空间曲线的切线和法平面	(113)
8.6.2	曲面的切平面和法线	(114)
8.7	多元函数的极值	(115)
8.7.1	多元函数的极值	(115)
8.7.2	条件极值	(116)
习题 8		(117)
第 9 章	不定积分	(119)
9.1	原函数与不定积分	(119)
9.2	不定积分的计算	(120)
9.2.1	基本积分表	(120)
9.2.2	第一类换元积分法	(120)
9.2.3	第二类换元积分法	(123)
9.2.4	分部积分法	(125)
9.3	有理函数的积分	(127)
9.3.1	有理函数的分解	(127)
9.3.2	有理函数的积分	(129)
9.3.3	三角函数有理式的积分	(130)
习题 9		(130)
第 10 章	定积分	(132)
10.1	定积分的概念	(132)
10.2	定积分的性质	(133)
10.3	定积分的计算	(134)
10.3.1	牛顿-莱布尼兹公式	(134)
10.3.2	定积分的换元积分法	(135)
10.3.3	定积分的分部积分法	(137)
10.4	定积分的应用	(139)
10.4.1	曲线的弧长	(139)
10.4.2	在物理学中的应用	(141)
10.4.3	函数平均值	(142)
10.5	广义积分	(143)
10.5.1	无穷区间上的广义积分	(143)
10.5.2	无界函数的广义积分	(144)
10.5.3	广义积分收敛性的判别方法	(145)
10.5.4	$\Gamma$ -函数与 $\psi$ -函数	(147)

习题 10 .....	(149)
<b>第 11 章 重积分</b> .....	(151)
11.1 二重积分的定义和性质 .....	(151)
11.2 二重积分的计算 .....	(153)
11.2.1 化成二次积分 .....	(153)
11.2.2 极坐标下的计算公式 .....	(155)
11.2.3 二重积分的换元公式 .....	(157)
11.3 三重积分的定义及计算 .....	(157)
11.3.1 三重积分的定义 .....	(157)
11.3.2 化成三次积分 .....	(158)
11.3.3 柱坐标下的计算公式 .....	(159)
11.3.4 球坐标下的计算公式 .....	(160)
11.3.5 三重积分的换元公式 .....	(161)
11.4 重积分的应用 .....	(162)
11.4.1 平面图形的面积 .....	(162)
11.4.2 立体体积 .....	(164)
11.4.3 曲面面积 .....	(166)
11.4.4 质量与质心 .....	(168)
习题 11 .....	(168)
<b>第 12 章 级数</b> .....	(170)
12.1 常数项级数 .....	(170)
12.1.1 常数项级数的概念及基本性质 .....	(171)
12.1.2 正项级数 .....	(171)
12.1.3 交错级数 .....	(173)
12.2 幂级数 .....	(173)
12.2.1 函数项级数 .....	(173)
12.2.2 幂级数及其收敛性 .....	(174)
12.2.3 幂级数的运算 .....	(175)
12.3 函数的幂级数展开 .....	(176)
12.4 傅里叶级数 .....	(178)
12.4.1 函数的傅里叶级数 .....	(178)
12.4.2 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数 .....	(180)
12.4.3 非周期函数的傅里叶级数 .....	(181)
12.5 傅里叶级数的复数形式 .....	(182)
12.5.1 欧拉公式 .....	(182)
12.5.2 傅里叶级数的复数形式 .....	(184)
习题 12 .....	(185)
<b>第 13 章 常微分方程</b> .....	(187)
13.1 微分方程的基本概念 .....	(187)
13.2 一阶微分方程 .....	(188)
13.2.1 可分离变量的微分方程 .....	(188)

13.2.2	齐次方程	(189)
13.2.3	一阶线性微分方程	(190)
13.2.4	伯努利方程	(192)
13.2.5	全微分方程	(193)
13.3	可降阶的高阶微分方程	(195)
13.3.1	$y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程	(195)
13.3.2	$F(x, y, y') = 0$ 型微分方程	(195)
13.3.3	$F(y, y', y'') = 0$ 型微分方程	(196)
13.4	常系数线性微分方程	(197)
13.4.1	线性微分方程的解的结构	(197)
13.4.2	二阶常系数齐次线性微分方程	(198)
13.4.3	二阶常系数非齐次线性微分方程	(199)
13.4.4	$n$ 阶常系数线性微分方程	(201)
13.5	欧拉方程	(202)
13.6	应用举例	(203)
	习题 13	(210)
<b>第 14 章</b>	<b>矩阵</b>	(212)
14.1	矩阵的概念及运算	(212)
14.1.1	矩阵的概念	(212)
14.1.2	矩阵的加法	(213)
14.1.3	数乘矩阵	(213)
14.1.4	矩阵的乘法	(214)
14.1.5	转置矩阵	(216)
14.1.6	$n$ 阶矩阵的行列式	(217)
14.2	逆矩阵	(217)
14.3	初等变换与初等矩阵	(219)
14.3.1	初等变换与初等矩阵	(219)
14.3.2	用初等变换求逆	(220)
14.3.3	矩阵的等价关系	(222)
14.4	分块矩阵	(222)
	习题 14	(225)
<b>第 15 章</b>	<b>线性方程组</b>	(227)
15.1	$n$ 维向量	(227)
15.2	线性相关性	(228)
15.3	矩阵的秩	(232)
15.4	线性方程组的一般理论	(234)
	习题 15	(238)
<b>第 16 章</b>	<b>矩阵的标准形</b>	(240)
16.1	矩阵的特征值和特征向量	(240)
16.2	化矩阵为对角形	(242)
16.3	实对称矩阵的对角化	(243)

16.3.1	向量的内积	(243)
16.3.2	施密特(Schmidt)正交化方法	(244)
16.3.3	正交矩阵	(245)
16.3.4	化实对称矩阵为对角形	(246)
习题 16		(247)
<b>第 17 章 n 维向量空间与线性变换</b>		(248)
17.1	基与坐标	(248)
17.2	子空间	(250)
17.3	线性变换	(251)
17.3.1	线性变换的定义	(251)
17.3.2	线性变换的矩阵表示	(252)
17.3.3	线性变换的特征值和特征向量	(254)
习题 17		(255)
<b>第 18 章 二次型</b>		(256)
18.1	二次型的矩阵表示	(256)
18.2	标准形	(257)
18.3	规范形	(260)
18.4	正定二次型和正定矩阵	(261)
习题 18		(263)
习题答案		(264)

# 第 1 章 预 备 知 识

## 1.1 数轴与平面直角坐标系

在一条直线上取定一点  $O$  和单位长度, 并指明直线的正方向, 这样就得到一条数轴, 点  $O$  称作数轴的原点。数轴上的一点  $M$  和一个实数  $x$  对应: 点  $M$  到  $O$  的距离等于  $x$  的绝对值。当  $M$  在点  $O$  的正方向一侧时,  $x > 0$ ; 相反地,  $x < 0$ 。  $x$  称作点  $M$  的坐标。原点  $O$  的坐标为  $0$ 。这样, 数轴上的点与实数之间建立了一一对应的关系。点  $M$  也称作点  $x$ 。

在平面上取两条相互垂直的数轴, 它们有共同的原点(交点)和相同的单位长度, 这样就得到一个平面直角坐标系。通常, 一条轴是水平的, 正方向从左向右, 称作横轴或  $x$  轴; 另一条是铅直的, 从下向上, 称作纵轴或  $y$  轴。这个坐标系记作坐标系  $Oxy$ 。由于  $x$  轴的正方向按右手姆指向上时四指弯曲的方向(即逆时针方向)旋转  $90^\circ$  后与  $y$  轴的正方向重合, 故称这样的坐标系为右手系。

给定平面直角坐标系, 设  $M$  是平面上的一点。过点  $M$  作  $x$  轴的垂线, 垂线与  $x$  轴的交点称作点  $M$  在  $x$  轴上的投影。投影的坐标  $x$  称作点  $M$  的横坐标或  $x$  坐标。类似地, 点  $M$  在  $y$  轴上的投影的坐标  $y$  称作  $M$  的纵坐标或  $y$  坐标。这对有序数  $(x, y)$  称作点  $M$  的坐标。这样, 在平面上的点与实数对  $(x, y)$  之间建立了一一对应的关系。今后, 点  $M$  也可称作点  $(x, y)$ , 或点  $M(x, y)$ 。见图 1.1。

平面直角坐标系把平面划分成四个象限, 各象限内点的坐标的符号如图 1.2 所示。  $x$  轴上的点的坐标为  $(x, 0)$ ,  $y$  轴上的点的坐标为  $(0, y)$ , 原点的坐标为  $(0, 0)$ 。

两点的距离 设两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ 。由勾股定理(图 1.3),  $A$ 、 $B$  之间的距离为  $|AB|$

图 1.1

$\sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ , 即

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1)$$

定比分点 设  $A$ 、 $B$  是数轴上的两点, 记

$$|AB| = \begin{cases} |AB| & \text{若 } A \text{ 到 } B \text{ 的方向与数轴同向} \\ 0 & \text{若 } A \text{ 与 } B \text{ 重合} \\ -|AB| & \text{若 } A \text{ 到 } B \text{ 的方向与数轴反向} \end{cases}$$

把  $|AB|$  称作有向线段  $\overline{AB}$  的长。设  $A$  的坐标为  $x_1$ ,  $B$  的坐标为  $x_2$ , 则  $\overline{AB} = x_2 - x_1$ 。

图 1.2

图 1.3

给定数  $\lambda$  ( $\lambda \neq -1$ ), 在数轴上求一点  $M$ , 使  $\frac{AM}{MB} = \lambda$ , 设  $M$  的坐标为  $x$ , 则  $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ , 解得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (1.2)$$

点  $M$  称作有向线段  $\overline{AB}$  的比为  $\lambda$  的定比分点。当  $\lambda > 0$  时,  $M$  在  $A, B$  的连线上, 称作内分点; 当  $-1 < \lambda < 0$  时,  $M$  在  $\overline{BA}$  的沿长线上; 当  $\lambda < -1$  时,  $M$  在  $\overline{AB}$  的沿长线上。当  $\lambda < 0$  时,  $M$  称作外分点。取  $\lambda = 1$ , 得到线段  $AB$  中点的坐标  $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 。

设点  $A, B$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 求有向线段  $\overline{AB}$  (此时认为  $A, B$  所在的直线是一数轴) 的定比分点  $M$  的坐标。设  $A, B, M$  在  $x$  轴上的投影为  $A_1, B_1, M_1$ 。由图 1.4,

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB}$$

即  $M_1$  是  $A_1B_1$  的具有相同比值的定比分点。 $A, B, M$  在  $y$  轴上的投影也与此类似。故  $M$  的坐标为

图 1.4

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (1.3)$$

取  $\lambda = 1$ , 得到线段  $AB$  中点的坐标  $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ 。

## 1.2 变量与函数

在某个过程或所研究的问题中, 数值不变的量称作常量, 可以取不同数值的量称作变

量。任何变量,总有一定的变化范围。当变量的变化是连续的时候,常用区间来表示变量的变化范围。

设  $a < b$ , 满足不等式  $a \leq x \leq b$  的实数  $x$  的全体记作  $[a, b]$ , 称作闭区间  $ab$ 。它对应于数轴上以  $a$  和  $b$  为端点、包含  $a$  和  $b$  在内的线段上的所有的点。而满足不等式  $a < x < b$  的实数  $x$  的全体记作  $(a, b)$ , 称作开区间  $ab$ 。它也对应于数轴上以  $a$  和  $b$  为端点的线段, 但不包含端点  $a$  和  $b$  在内。类似地, 还有半开半闭区间  $(a, b]$  和  $[a, b)$ , 它们分别表示满足不等式  $a < x \leq b$  和  $a \leq x < b$  的实数  $x$  的全体。当不需要强调是否包含端点时, 简称作区间, 并记作  $(a, b)$ 。

如果区间的一端可以无限延伸, 则称作无限区间或无穷区间。例如, 满足不等式  $x \geq a$  的实数  $x$  的全体记作  $[a, +\infty)$ 。相应地, 这时也可把不等式写成  $a \leq x < +\infty$ , 在数轴上, 它是  $a$  (包含  $a$  在内) 右边所有的点。这里  $\infty$  是一个符号, 读作“无穷大”,  $+\infty$  读作“正无穷大”。类似地, 还有  $(-\infty, a]$ ,  $(-\infty, a)$ , 它们分别表示满足不等式  $x > a$  ( $a < x < +\infty$ ),  $x \geq a$  ( $-\infty < x \leq a$ ),  $x < a$  ( $-\infty < x < a$ ) 的实数  $x$  的全体。而实数全体(整个数轴)可表示成  $-\infty < x < +\infty$ , 记作  $(-\infty, +\infty)$ 。这里  $-\infty$  读作“负无穷大”。

在所研究的问题中, 往往有几个变量, 它们不是彼此孤立的, 而是按照一定的规律相互联系着。设  $x$  和  $y$  是两个变量, 如果对于  $x$  在允许的变化范围内的每一个值,  $y$  都有确定的值与之对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ 。 $x$  称作自变量,  $y$  称作因变量,  $f$  称作函数记号。自变量  $x$  允许变化的范围称作函数的定义域, 记作  $\text{dom } f$ 。 $y$  的取值范围称作函数的值域, 记作  $\text{ran } f$ 。如果对于每一个  $x \in \text{dom } f$ ,  $f(x)$  都是唯一的一个值, 则称  $f(x)$  是单值函数, 否则称作多值函数。通常所说的函数多半都是指单值函数。对于多值函数, 往往把它们分解成多个单值函数来研究。

设  $y = f(x)$ 。如果反过来把  $y$  作为自变量,  $x$  作为因变量, 由关系  $y = f(x)$  所确定的函数  $x = \varphi(y)$  称作函数  $f(x)$  的反函数。即, 对每一个  $y \in \text{ran } f$ , 对应的  $x = \varphi(y)$  满足条件  $f(\varphi(y)) = y$ 。 $f(x)$  的反函数记作  $f^{-1}(y)$ 。例如,  $y = \sqrt{x-1}$  的定义域是  $[1, +\infty)$ , 值域是  $[0, +\infty)$ 。 $x = y^2 + 1$  ( $y \geq 0$ ) 是它的反函数。

设  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$ , 那么  $z$  也是  $x$  的函数, 称作由  $y = f(x)$  和  $z = g(y)$  复合而成的函数, 简称复合函数, 记作  $z = g(f(x))$ 。 $y$  称作中间变量。例如,  $y = \sqrt{x-1}$  可以看作由  $u = x-1$  和  $y = \sqrt{u}$  复合而成的复合函数。

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常数称作基本初等函数。由基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的函数称作初等函数。初等函数是最经常使用的函数。

函数的概念可以推广到二个和二个以上自变量的情况。设  $x, y, z$  是三个变量, 如果对于某个范围内的每一对  $(x, y)$  都有确定的  $z$  值与之对应, 则称  $z$  是  $x, y$  的二元函数, 记作  $z = f(x, y)$ 。 $x, y$  称作自变量,  $z$  称作因变量。 $(x, y)$  允许的取值范围称作函数  $f(x, y)$  的定义域。 $(x, y)$  可以看作平面上的点, 因而二元函数又可以看作平面上的点的函数。二元函数的定义域是平面上的一个区域。

类似地, 还可以有三元函数、四元函数、……, 以及一般地,  $n$  元函数。二元和二元以上

的函数统称为多元函数。

### 1.3 函数的特性与函数图形

如果曲线  $C$  上的点的坐标  $(x, y)$  都满足函数关系  $y = f(x)$ , 并且所有满足函数关系  $y = f(x)$  的点  $(x, y)$  都在  $C$  上, 则称曲线  $C$  是函数  $y = f(x)$  的图形。

**有界性** 设函数  $f(x)$  在  $L$  上有定义 ( $L$  可以是  $f(x)$  的定义域, 也可以是定义域的一部分)。如果存在  $M$  使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in L$$

则称函数  $f(x)$  在  $L$  上有界; 否则称  $f(x)$  在  $L$  上无界。如果  $f(x)$  在  $L$  上有界, 则  $f(x)$  的图形在  $L$  上夹在两条平行于  $x$  轴的直线之间

(图 1.5)。例如,  $\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 因为对所有的  $x$ , 恒有  $|\sin x| \leq 1$ 。而  $\operatorname{tg} x$  在

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上无界。

**单调性** 设函数在区间  $(a, b)$  上有定义, 这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ 。如果  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1 < x_2$ , 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加 (单调减少)。

如果对  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1 < x_2$ , 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内严格单调增加 (严格单调减少)。单调增加的函数和单调减少的函数统称单调函数。

如果函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调, 则称  $(a, b)$  是  $f(x)$  的单调区间。例如,  $x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上是严格单调减少的, 在  $[0, +\infty)$  上是严格单调增加的。当函数严格单调增加 (单调增加) 时, 函数曲线从左到右是上升的 (非降的), 见图 1.6(a); 当函数严格单调减少 (单调减少) 时, 函数曲线从左到右是下降的 (非升的), 见图 1.6(b)。

图 1.5

图 1.6

**奇偶性** 如果对于定义域内的每一个  $x$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  是偶函数。如果对于定义域内的每一个  $x$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  是奇函数。例如,  $x^2$ ,

$\cos x$  是偶函数,  $x^3$ ,  $\sin x$  是奇函数。而  $e^x$ ,  $x^2 + 1$  既不是偶函数, 也不是奇函数。

偶函数的图形是关于  $y$  轴对称的, 见图 1.7(a); 奇函数的图形是关于原点对称的, 见图 1.7(b)。

图 1.7

**周期性** 如果存在不为零的  $l$  使得, 对于定义域内的每一个  $x$  都有  $f(x+l) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  是周期函数。这样的  $l$  中的最小正数称作  $f(x)$  的周期。例如,  $\sin x$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数。对任意的整数  $k$ , 以  $l$  为周期的周期函数的图形在  $[kl, (k+1)l]$  上的形状是一样的, 如图 1.8 所示。

图 1.8

**反函数的图形** 设  $y = f(x)$  是  $f(x)$  的反函数。在同一个坐标系  $oxy$  中, 显然  $y = f(x)$  和  $x = f^{-1}(y)$  的图形是同一条曲线。若反函数也以  $x$  作自变量, 即写成  $y = f^{-1}(x)$ , 试问  $y = f^{-1}(x)$  和  $y = f(x)$  的图形有什么关系? 由于  $b = f(a)$  当且仅当  $a = f^{-1}(b)$ , 故  $(a, b)$  在曲线  $y = f(x)$  上当且仅当  $(b, a)$  在  $y = f^{-1}(x)$  上。而  $(a, b)$  与  $(b, a)$  是关于第 一象限和第 三象限的角平分线对称的两点, 因此  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图形是关于这条直线对称的, 如图 1.9 所示。

图 1.9

## 1.4 几个记号和术语

### 1. 属于号

如果  $a$  是集合  $A$  的元素, 则记作  $a \in A$ , 读作“ $a$  属于  $A$ ”。例如, 如果  $0 \leq x \leq 1$ , 那么  $x$  是闭区间  $[0, 1]$  上的一个点, 可记作  $x \in [0, 1]$ 。类似地,  $x \in (0, 1)$  表示  $0 < x < 1$ 。若  $D$  是一个平面区域, 则  $(x, y) \in D$  表示  $(x, y)$  是  $D$  内的一点。

## 2. 连加号 与连乘号

若干个数的和  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  可记作  $\sum_{i=1}^n a_i$ , 即

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1.4)$$

叫做连加号或求和号,  $a_i$  表示一般项或通项, 连加号上下的“ $i=1$ ”和“ $n$ ”表示  $i$  的取值范围, 即对  $i=1, 2, \dots, n$  求和。例如

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

(1.4) 式中的  $i$  称作求和指标, 和式与指标的记法无关。如(1.4)式又可记作  $\sum_{j=1}^n a_j$ , 即

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j$$

显然

$$\sum_{i=1}^n (ka_i) = k \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

设有  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ), 将它们排成一个矩形阵列

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

那么

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} \quad (1.5)$$

是阵列中第  $i$  行的  $n$  个数之和。在这个式子中求和指标是  $j$ ,  $i$  不是求和指标、而是某个固定的值。对于不同的  $i$ , (1.5) 式表示阵列中不同行的和。类似地, 阵列中第  $j$  列的  $m$  个数之和为

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{mj}$$

而

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n})$$

$$+ \dots + (a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn}) \quad (1.6)$$

它是这  $m \times n$  个数的和。这是二重求和,用两个连续的连加号表示。(1.6)式是先对阵列的每一行求和,得到  $m$  个数,再把这  $m$  个数加起来。当然,也可以先对阵列的每一列求和,得到  $n$  个数,再把这  $n$  个数加起来。这时应写成下述二重求和的形式:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{mj}) \\ &= (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{m2}) \\ &\quad + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn}) \end{aligned}$$

这个和式仍等于这  $m \times n$  个数的和,故

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad (1.7)$$

连乘号  $\prod$  的用法与  $\sum$  类似,  $a_i = a_1 a_2 \dots a_n$ ,

例如  $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ ,  $\prod_{i=1}^n (1+x_i) = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)$ 。

### 3. 充分必要条件

设  $A$  和  $B$  是两个命题。如果  $A$  成立,则  $B$  也成立,那么称  $B$  是  $A$  的必要条件, $A$  是  $B$  的充分条件。如果  $B$  既是  $A$  的充分条件、又是  $A$  的必要条件,那么称  $B$  是  $A$  的充分必要条件。例如,若  $x > 1$ ,则  $x^2 > 1$ 。因此,“ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的充分条件,“ $x^2 > 1$ ”是“ $x > 1$ ”的必要条件。但“ $x > 1$ ”不是“ $x^2 > 1$ ”的必要条件,“ $x^2 > 1$ ”也不是“ $x > 1$ ”的充分条件。“ $x^2 > 1$  且  $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的充分必要条件。

根据定义,若  $A$  是  $B$  的充分条件,则  $B$  是  $A$  的必要条件;若  $A$  是  $B$  的必要条件,则  $B$  是  $A$  的充分条件;若  $A$  是  $B$  的充分必要条件,则  $B$  也是  $A$  的充分必要条件。显然,“ $A$  的充分必要条件是  $B$ ”相当于“当  $A$  成立时  $B$  成立,并且当  $B$  成立时  $A$  成立”,后一句话可以说成“ $A$  成立当且仅当  $B$  成立”,或更简单地说“ $A$  当且仅当  $B$ ”。例如, $x^2 > 0$  当且仅当  $x \neq 0$ 。

## 习 题 1

- 求点  $A(4, 7)$  关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点的对称点的坐标。
- 证明点  $(a, b)$  关于第 一象限和第 三象限的角平分线的对称点是  $(b, a)$ ; 关于第 二象限和第 四象限的角平分线的对称点是  $(-b, -a)$ 。
- 求下列两点之间的距离:
  - $(1, -2)$  和  $(-2, 2)$ ; (2)  $(-6, 3)$  和  $(0, -5)$ 。
- 求与  $A(2, 2)$ ,  $B(-5, 1)$  和  $C(3, -5)$  三点距离相等的点。
- 已知  $A(3, 8)$ ,  $B(6, 2)$ , 求有向线段  $\overline{AB}$  的比值为  $\lambda$  的定比分点,其中  $\lambda$  的值为:
  - 0.5; (2) 2; (3) -0.5; (4) -2。
- 设  $M_1$  和  $M_2$  将线段  $AB$  等分成三段,其中  $A(-1, 0)$ ,  $B(5, 6)$ , 求  $M_1$  和  $M_2$  的坐标。
- 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

试求: (1)  $f(1), f(0), f(-1)$ ; (2)  $f(x+1), f(x^2)$ ; (3)  $f(x)$  的反函数及其定义域。

8. 讨论下述函数的奇偶性:

(1)  $y = x \sin x$ ;                      (2)  $y = e^x - e^{-x}$ ;

(3)  $y = x - \frac{1}{x}$ ;                      (4)  $y = x + \cos x$ 。

9. 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出其周期:

(1)  $y = \sin x \cos x$ ;              (2)  $y = x \sin x$ ;

(3)  $y = \ln(\lg x + 1)$ ;              (4)  $y = \sin x^2$ 。