第一章　绪论

1.1　引　　言

数学物理方程（简称数理方程）是指在物理学、力学等自然科学及工程技术中所提出的偏微分方程（有时也包含某些常微分方程、积分方程及微分积分方程）.它是数学物理研究的基本内容.

早期建立的数学物理方程有根据牛顿引力理论而推导出的描述引力势的拉普拉斯方程和泊松方程.在连续介质力学中,从质量、动量、能量守恒定律出发，建立了流体力学中的纳维-斯托克斯方程组（有黏性）和欧拉方程组（无黏性）以及弹性力学中的圣维南方程组等.另外，像描述波的传播的波动方程；描述传热和扩散现象的热传导方程都是古典的数学物理方程.

自 19世纪开始，相继出现了大量新的数学物理方程，其中最基本的有描述电磁场变化的麦克斯韦方程组，描述微观粒子的薛定谔方程，广义相对论中确定引力场的爱因斯坦方程和在基本粒子研究中有重大作用的杨-米尔斯方程等.人们在研究光辐射、中子迁移以及气体分子运动的过程中，推导出了辐射迁移方程，中子迁移方程和玻尔兹曼方程，它们都是微分积分方程.在进一步研究带电粒子在磁场中的运动时，建立了流体力学方程的耦合.而研究具有扩散现象的化学反应导致了反应扩散方程（是偏微分方程组）的建立.

对于建立的数学物理方程，需要作出各种附有具体条件而构成典型问题的解，然后根据实际测量结果来检验和修正相应的物理理论.通过求解数理方程，使人们对自然现象获得更加深刻的认识，并能预见新的现象.

数学物理方程中有许多是线性方程，与其对应的已经给出很多求准确解的方法，如特征线方法、分离变量法、格林函数法、积分变换法及复变函数法等.解有时能用各种初等函数和超越的特殊函数来表示，但这些仅限于少数较特殊的情况.更多的数学物理方程是非线性方程或方程组，其求解方法一般都很复杂,且只有少数问题有精确解.而得到准确解的有效方法之一是利用问题的对称性,例如球对称性、轴对称性与相似性(量纲分析)等来求解,这可以减少自变数(或降低维数),进而化为常微分方程去求特解.对于大量的不能获取准确解的问题，通常设法求出近似解，例如摄动法就是一个重要方法.而伴随电子计算机迅速发展起来的差分法与有限元法等数值解法是求解数学物理方

程的十分有效的方法．近年来，与孤立子、杨-米尔斯方程等近代理论的研究密切相联，正在发展求解非线性方程的新方法．

随着现代科学和技术的进步，将会不断涌现新的数学物理方程，而其产生和应用的范围已经并且更多地超出了传统的物理学、力学、天文学等领域例如，在化学、生命科学、经济学等自然科学和社会科学各个领域，以及在资源勘探与开发、大型建筑与水利工程、金属冶炼工程、通信工程、新能源开发、大气物理、气象预报、航天工程、遥感技术、控制与识别、医疗诊断与材料无损探伤、遗传工程等极广泛的工程技术各个领域都涉及到数学物理方程的理论问题及其重要应用．

1.2 基本概念和定义

当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外，还含有未知函数的一个或多个偏导数时，称为偏微分方程．一般说来，它可以写成包含几个自变量 $x, y, \cdots$ 和这些变量的未知函数 u 及其偏导数 $u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ 的方程的形式

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots) = 0 \tag{1.2.1}$$

这里，方程 (1.2.1) 是在自变量 $x, y, \cdots$ 的 n 维空间 R^n 中的一个适当的区域 D 内进行考察的．我们要求能找出在 D 内恒满足方程 (1.2.1) 的那些函数 $u = u(x, y, \cdots)$．如果这种函数存在，那么称它们为方程 (1.2.1) 的解．从这些可能的解中，我们要选出一个满足某些合适的附加条件的特解来．

例如，

$$\begin{aligned} &uu_{xy} + u_x = y, \\ &u_{xx} + 2yu_{xy} + 3xu_{yy} = 4\sin x, \\ &(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1, \\ &u_{xx} - u_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

都是偏微分方程．容易验证下列两个函数：

$$u(x, y) = (x + y)^3,$$
$$u(x, y) = \sin(x - y)$$

都是(1.2.2)的最后一个方程的解．

出现在方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶．例如，方程

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} = e^y$$

是一个二阶偏微分方程，而方程

$$u_{xxy} + xu_{yy} + 8u = 7y$$

是一个三阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数来说都是线性的，且方程中的系数都仅依赖于自变量，那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程.如果一个偏微分方程对未知函数的最高阶导数来说是线性的，那么就称为拟线性偏微分方程.例如,方程

$$yu_{xx} + 2xyu_{yy} + u = 1$$

是一个二阶线性偏微分方程，而方程

$$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y$$

是一个二阶拟线性偏微分方程.一个偏微分方程不是线性方程，就称为非线性偏微分方程

在本书中，我们将主要研究二阶线性偏微分方程，因为它们在数学物理问题中经常出现.最一般的 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \qquad (1.2.3)$$

其中不失一般性,可假设 $A_{ij} = A_{ji}$,且可假设 A_{ij}, B_i, F 和 G 都是 n 个自变量 x_i 的函数.

如果 G 恒等于零，方程称为齐次方程；否则方程就称为非齐次方程.

n 阶常微分方程的通解是依赖于 n 个任意常数的一族函数.就偏微分方程来说，它的通解将依赖于任意函数而不是任意常数.为了说明这件事，我们考察二阶方程

$$u_{xy} = 0.$$

如果我们把这个方程对 y 积分,而把 x 认为是固定的，就得到

$$u_x(x,y) = f(x).$$

再把 y 认为是固定的,对 x 求第二次积分,得

$$u(x,y) = g(x) + h(y),$$

其中 $g(x)$和 $h(y)$都是任意函数.

假定 u 是三个变量 x, y 和 z 的函数,那么对于方程

$$u_{yy} = 2,$$

我们可以得到通解

$$u(x,y,z) = y^2 + yf(x,z) + g(x,z),$$

其中 f 和 g 都是两个变量 x 与 z 的任意函数.

我们回想在常微分方程情况下，首先的任务是确定一个通解，然后根据给定的条件求出任意常数的值来确定特解. 但是，对偏微分方程来说，从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解，可能和求通解一样困难，甚至比求通解更困难. 这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数；我们要从通解中确定满足附加条件的特解，不是仅仅要确定任意常数，而是要确定这些任意函数.

对于 n 阶线性齐次常微分方程来说，n 个线性无关的解的线性组合仍是一个解. 不幸的是就偏微分方程来说，这样的结论一般是不成立的. 这是由于每一个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间. 例如，偏微分方程

$$u_x - u_y = 0 \tag{1.2.4}$$

经过变量变换

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases}$$

能化成方程

$$2u_\eta = 0,$$

它的通解是

$$u(x,y) = f(x+y),$$

其中 f 是处处可微的任意函数. 由此可见下列函数：

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)^n, \\ \sin n(x+y), \\ \cos n(x+y), \\ \exp n(x+y) \end{array}\right. \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

中的每一个函数都是方程(1.2.4)的一个解，而且这些函数显然是线性无关的. 像方程(1.2.4)这样一个简单的方程就有无限多个解，它们的线性组合是否为解是要进一步加以讨论的. 因此在研究偏微分方程时，必须克服这种困难. 于是，我们一般宁愿直接来确定满足给定的附加条件的特解.

1.3 线性算子

本节将简单地讨论在偏微分方程的理论中经常遇到的线性算子.

算子是一种数学法则，把它作用在一个函数上时，便产生另外一个函数. 例如，在下列表达式中：

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$M[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$L=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3}{\partial y^3}$与 $M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$都称为微分算子.也有一些其他类型的算子,例如

$$P[u]=\int_a^b u(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau,\quad a,b\text{ 都是常数},$$

$$Q[u]=u(x,c)+u_x(x,c),\quad c\text{是常数},$$

其中算子 P 是一个积分算子,而算子 Q 是一个把两个自变量 x 和 y 的函数 u 变为一个自变量 x 的函数 $Q[u]$的算子.

两个微分算子称为是等价的，是指把每一个算子作用在函数 u 上时,会产生同样的结果，记为 $A=B$. 此时对函数 n 有

$$A[u]=B[u],\tag{1.3.1}$$

其中 u 必须是充分可微的函数.

两个微分算子的和定义为

$$(A+B)[u]=A[u]+B[u],\tag{1.3.2}$$

其中 u 为函数.

两个算子 A 与 B 的积是这样一个算子，它作用于函数 u 的结果与算子 A 及 B 依次作用在 u 上的结果是相同的，即

$$AB[u]=A(B[u]).\tag{1.3.3}$$

微分算子满足下列定律：

(1)加法交换律：

$$A+B=B+A\ ;\tag{1.3.4}$$

(2)加法结合律：

$$(A+B)+C=A+(B+C)\ ;\tag{1.3.5}$$

(3)乘法结合律：

$$(AB)C=A(BC)\ ;\tag{1.3.6}$$

(4)乘法对加法的分配律：

$$A(B+C)=AB+AC\ ;\tag{1.3.7}$$

(5)乘法交换律：

$$AB=BA\ ,\tag{1.3.8}$$

但乘法交换律仅对常系数微分算子成立.

【例 1.2.1】 设 $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y},\quad B=\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y},$

因而

$$B[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$AB[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$BA[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

于是，当 $x\neq 0$ 时，$AB[u]\neq BA[u]$.

我们定义具有下列性质的算子为线性算子：

(1)常数 c 可以从算子中提取出来：

$$L[cu]=cL[u].$$

(2)算子作用于两个函数之和所得的结果等于算子分别作用于两个函数所得结果之和：

$$L[u+v]=L[u]+L[v].$$

性质(1)与(2)可以组合起来表示为

$$L[au+bv]=aL[u]+bL[v].\tag{1.3.9}$$

其中 a 与 b 都是常数.

现在让我们来考察二阶线性偏微分方程.就两个自变量来说，这种方程的形式为

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y).\tag{1.3.10}$$

其中系数 A,B,C,D,E,F 都是变量 x 与 y 的函数，$G(x,y)$是非齐次项.

如果取线性微分算子 L 为

$$L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F,$$

那么偏微分方程(1.3.10)可以写成下列形式：

$$L[u]=G.\tag{1.3.11}$$

我们经常略去方括号，把上式简写为

$$Lu=G.$$

习　题

对于下列各偏微分方程，试确定它是线性的、拟线性的还是非线性的.如果是线性

的，说明它是齐次的还是非齐次的，并确定它的阶：

(a) $u_{xx}+xu_y=y$;

(b) $uu_x-2xyu_y=0$;

(c) $u_x^2+uu_y=1$;

(d) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$;

(e) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$;

(f) $u_{xxx}+u_{xyy}+\lg u=0$;

(g) $u_{xx}^2+u_x^2+\sin u=e^y$.

2. 验证下面两个函数：

$$u(x,y)=x^2-y^2,$$
$$u(x,y)=e^x\sin y$$

都是方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

的解.

3. 证明 $u=f(xy)$满足方程

$$xu_x-yu_y=0,$$

其中 f是任意的可微函数，并由此验证函数 $\sin(xy),\cos(xy),\lg(xy),e^{xy}$ 和$(xy)^3$ 都是解.

4. 证明 $u=f(x)g(y)$满足方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0,$$

其中 f和 g 都是任意的二次可微函数.

5. 试确定下列方程的通解：

$$u_{yy}+u=0.$$

6. 令 $u_x=v$，求下列方程的通解：

$$u_{xy}+u_x=0.$$

7. 设解的形式为 $u(x,y)=f(\lambda x+y)$,其中 λ 是一个待定的参数.求下列方程的通解：

$$u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0.$$

第二章　数学模型与定解问题

2.1　典型方程

三类基本的二阶偏微分方程是：

(a) 波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(b) 热传导方程

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(c)拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

许多数学物理问题都可归结为解偏微分方程的问题，特别是可归结为解上面所列举的三个偏微分方程的问题.我们将开始研究这些方程，首先仔细考察表示这些物理问题的数学模型.

2.2　弦的振动

在数学物理中最重要的问题之一是拉紧的弦的振动问题.由于它较简单，且经常出现在许多数学物理的分支中，所以在偏微分方程理论中把它作为一个典型的例子.

让我们考察一长为 l 的两端固定的拉紧的弦.我们的问题是要确定弦的运动方程，用它来描述在给定初始扰动后任一时刻 t 的弦的位移 $u(x,t)$.

为了能得出一个较简单的方程，我们作下面的一些假设：

(1) 弦是柔软与有弹性的，即它不能抵抗弯矩，因此在任何时刻弦的张力总是沿着弦的切线方向；

(2) 弦的每一段都不伸长，因此根据胡克(Hooke)定律,张力是常数；

(3) 弦的重量与其张力相比很小；

(4) 弦的偏移与其长度相比很小；

(5) 位移后的弦在任一点上的斜率与 1 相比很小；

(6)弦只有横振动.

我们考察弦上一微小元素.设 T 是如图 2.1 所示的两端点上的张力.作

用在弦的这一微小元素上的垂直方向的力是

$$T\sin\beta - T\sin\alpha.$$

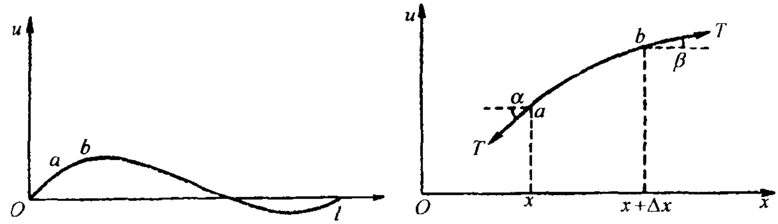

图 2.1

根据牛顿第二运动定律，合力等于质量乘以加速度.因此

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt} \tag{2.2.1}$$

其中 ρ 是弦的密度,Δs 是这一小段位移后的弦的弧长.因为位移后的弦的斜率很小,所以有

$$\Delta s \approx \Delta x.$$

因为角 α 和 β 都很小,所以

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha, \quad \sin\beta \approx \tan\beta.$$

于是等式(2.2.1)变成

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt}. \tag{2.2.2}$$

但是,由微积分学我们知道,在时刻 t 有

$$\tan\alpha \approx (u_x)|_x$$

及

$$\tan\beta \approx (u_x)|_{x+\Delta x}.$$

于是等式(2.2.2)可以写成

$$\frac{1}{\Delta x}[(u_x)|_{x+\Delta x} - (u_x)|_x] = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

令 Δx 趋于零取极限,得

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{2.2.3}$$

其中 $c^2 = T/\rho$.方程(2.2.3)称为一维波动方程.

如果在弦的每单位长度上有外力 F 作用着，方程(2.2.3)具有下列形式：

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \tag{2.2.4}$$

其中 $f=F/\rho$，而外力可以是压力、重力、阻力以及其他力等.

2.3 膜的振动

膜振动方程在数学物理的许多问题中出现.在我们导出膜振动方程前，像在弦振动的情形中一样，我们作下列一些简化的假设：

(1) 膜是柔软与有弹性的，即它不能抵抗弯矩，因此在任何时刻它的张力总是在膜的切平面内；

(2) 膜的每一块元素都没有伸张变形，因此根据胡克定律，张力是常数；

(3) 膜的重量与膜的张力相比很小；

(4) 膜的偏移与膜的最小直径相比很小；

(5) 位移后的膜在任一点上的斜率与 1 相比很小；

(6) 膜只有横振动.

我们考察膜的一块微小元素.因为偏移和斜率都很小，这块元素的面积近似地等于 $\Delta x\Delta y$.如果 T 是每单位长度上的张力，则作用在这块元素各边上的力是 $T\Delta x$ 和 $T\Delta y$(见图 2.2).

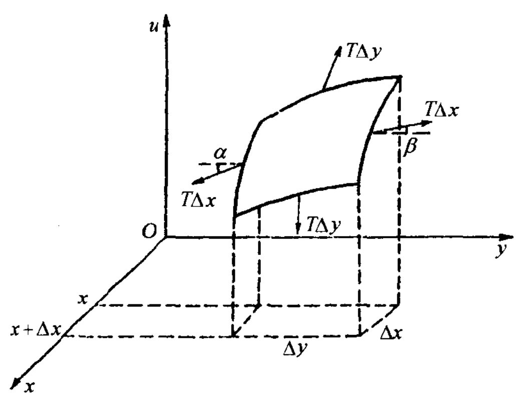

图 2.2

作用在膜的这块元素上的垂直方向的力是

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma.$$

因为斜率很小，所以上述这些角的正弦都分别近似地等于它们的正切.于是合力变为

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma).$$

根据牛顿第二运动定律，合力等于质量乘以加速度．因此

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma) = \rho\Delta A u_{tt}. \tag{2.3.1}$$

其中 ρ 是每单位面积膜的质量，$\Delta A \approx \Delta x\Delta y$ 是这块元素的面积，u_{tt} 在所考察的区域中的某一点上取值但由微积分学可知

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &\approx u_y(x_1, y),\\
\tan\beta &\approx u_y(x_2, y + \Delta y),\\
\tan\delta &\approx u_x(x, y_1),\\
\tan\gamma &\approx u_x(x + \Delta x, y_2),
\end{aligned}$$

其中 x_1 与 x_2 是 x 在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的值，y_1 与 y_2 是 y 在 y 和 $y+\Delta y$ 之间的值．把这些值代入式(2.3.1)，得

$$\begin{aligned}
&T\Delta x[u_y(x_2, y+\Delta y) - u_y(x_1, y)]\\
&\qquad + T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)]\\
&= \rho\Delta x\Delta y u_{tt}.
\end{aligned}$$

把上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$，得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_y(x_2, y+\Delta y) - u_y(x_1, y)}{\Delta y} + \frac{u_x(x+\Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)}{\Delta x}\right] = u_{tt}. \tag{2.3.2}$$

令 $\Delta x, \Delta y$ 都趋于零取极限，得到

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{2.3.3}$$

其中 $c^2 = T/\rho$．这个方程称为二维波动方程．

如果在膜的每单位面积上有外力 F 作用着，方程(2.3.3)就具有下列形式：

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f, \tag{2.3.4}$$

其中 $f = E/\rho$.

2.4 在弹性介质中的波

如果在一弹性介质中的一点处发生一个小扰动，那么周围的质点就会产生运动，这时介质处于应变状态之中．我们考察沿所有方向扩展的这样一种运动状态．假设介质的位移是微小的，而且我们不讨论介质作为一个整体来说的平移或旋转．

假设我们所研究的物体是均匀的和各向同性的．令 ΔV 是物体的一块微

小体积元素，且作用在这块体积元素表面上的应力是 $\tau_{xx},\tau_{yy},\tau_{zz},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yx},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{zy}$. 开头三个应力称为正应力，而其余的应力称为剪应力（见图 2.3).

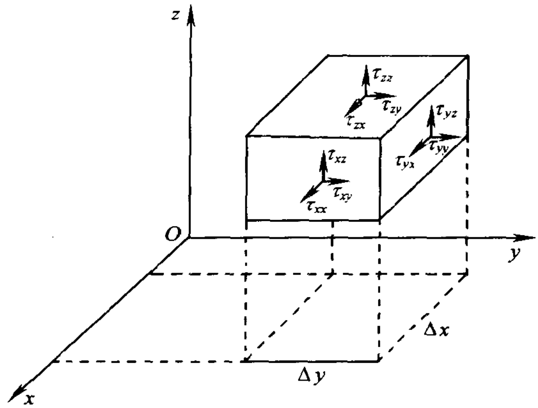

图 2.3

我们将假设应力张量 τ_{ij}是对称的①,即

$$\tau_{ij}=\tau_{ji},\quad i\neq j,\qquad i,j=x,y,z. \tag{2.4.1}$$

忽略体力,那么在 x 方向上作用在这块体积元素上的所有力的总和是

$$[(\tau_{xx})|_{x+\Delta x}-(\tau_{xx})|_{x}]\Delta y\Delta z+[(\tau_{xy})|_{y+\Delta y}-(\tau_{xy})|_{y}]\Delta z\Delta x$$
$$+[(\tau_{xz})|_{z+\Delta z}-(\tau_{xz})|_{z}]\Delta x\Delta y.$$

根据牛顿第二运动定律，合力等于质量乘以加速度. 于是得到

$$[(\tau_{xx})|_{x+\Delta x}-(\tau_{xx})|_{x}]\Delta y\Delta z+[(\tau_{xy})|_{y+\Delta y}-(\tau_{xy})|_{y}]\Delta z\Delta x$$
$$+[(\tau_{xz})|_{z+\Delta z}-(\tau_{xz})|_{z}]\Delta x\Delta y=\rho\Delta x\Delta y\Delta z u_{tt}, \tag{2.4.2}$$

其中 ρ 是物体的密度, u 是在 x 方向上的位移分量. 因此令 ΔV 趋于零取极限,得

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.4.3}$$

类似地可得下列两个相应于 y 方向和 z 方向的方程：

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.4.4}$$

① 即体积元素的转动平衡条件.

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.4.5}$$

其中 v 和 w 分别是 y 方向和 z 方向上的位移分量.

现在我们可以定义线应变为

$$\begin{cases}\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z},\\ \varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x},\\ \varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial w}{\partial z},\varepsilon_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y},\end{cases} \tag{2.4.6}$$

其中 $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$ 表示正应变,ε_{yz}, ε_{zx}, ε_{xy}表示剪应变.

就各向同性的物体来说，广义胡克定律具有下列形式：

$$\begin{cases}\tau_{xx}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{xx}, & \tau_{yz}=\mu\varepsilon_{yz},\\ \tau_{yy}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{yy}, & \tau_{zx}=\mu\varepsilon_{zx},\\ \tau_{zz}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{zz}, & \tau_{xy}=\mu\varepsilon_{xy},\end{cases} \tag{2.4.7}$$

其中 $\theta=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$, λ 和 μ 是拉美常数.

用位移表示应力，得到

$$\begin{cases}\tau_{xx}=\lambda\theta+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x},\\ \tau_{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \tau_{xz}=\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right).\end{cases} \tag{2.4.8}$$

对方程组(2.4.8)求微分,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+2\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{cases} \tag{2.4.9}$$

把方程组(2.4.9)代入等式(2.4.3)可得

$$\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)\\ &\qquad+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

注意到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

并引入记号

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

符号 Δ 或∇^2 称为拉普拉斯算子．因此方程(2.4.10)变为

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\mu\nabla^2\mu=\rho\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}. \tag{2.4.11}$$

同样可以得到下面另外两个方程：

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.4.12}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{2.4.13}$$

把上述运动方程写成矢量形式

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}. \tag{2.4.14}$$

其中 $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$, $\theta=\operatorname{div}\boldsymbol{u}$.

(i) 如 果 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$,那么一般方程变为

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}$$

或

$$\boldsymbol{u}_{tt}=c^2\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{2.4.15}$$

其中 $c=\sqrt{\mu/\rho}$是波的传播速度．

这是一种等体积波传播的情形，因为对以这个速度运动的波来说，体积膨胀 θ 为零．有时这种波称为畸变波，因为波的传播速度依赖于 μ 和 ρ,而剪切弹性模量 μ 是表示体积元素的畸变与旋转特性的．

(ii) 当 $\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=0$ 时,由恒等式

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\nabla^2\boldsymbol{u}$$

得出

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{u}.$$

于是一般方程变为

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}$$

或

$$\boldsymbol{u}_{tt}=c^2\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{2.4.16}$$

其中波的传播速度是

$$c=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

这是一种无旋或膨胀波传播的情形，因为 $\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=0$ 描写无旋运动. 方程(2.4.15)与(2.4.16)称为三维波动方程

一般来说，波动方程可以写为

$$u_{tt}=c^2\nabla^2 u \quad (2.4.17)$$

其中拉普拉斯算子可以是一维、二维或三维的. 波动方程之所以重要，是由于这类方程在许多物理问题中出现；例如，在空间中的声波，在导体中的电振动和杆的扭转振动等问题中.

2.5 在固体中的热传导

考察一闭曲面 B^* 所包围的区域 D^*，令 $u(x,y,z,t)$ 是在时刻 t 的点 (x,y,z) 处的温度. 如果温度不是常数，那么热量由高温处流向低温处. 由傅里叶定律，热流的变化率与温度梯度成正比. 因此在各向同性的物体中，热流速度是

$$\boldsymbol{v}=-K\mathrm{grad}u \quad (2.5.1)$$

其中 K 是常数，称为物体的导热率.

设 D 是 D^* 内任一由闭曲面 B 所包围的区域，则在单位时间中流出 D 的总热量是

$$\iint_B v_n \mathrm{d}s,$$

其中 $v_n=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 B 的单位外法线 $\boldsymbol{n}$ 方向上的分量. 因此利用高斯定理(即散度定理),得

$$\begin{aligned}\iint_B v_n \mathrm{d}s &= \iiint_D \mathrm{div}(-K\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= -K\iiint_D \nabla^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \quad (2.5.2)\end{aligned}$$

但是在 D 内的总热量已知为

$$\iiint_D \sigma\rho u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad (2.5.3)$$

其中 ρ 是物质的密度,σ 是比热. 假设求微分与求积分的运算是可以交换的，则在 D 内热量减少的变化率是

$$-\iiint_D \sigma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \quad (2.5.4)$$

由于在 D 内的热量减少的变化率必须等于在单位时间内流出 D 的总热量,就

得到

$$-\iiint_D \sigma\rho u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -K\iiint_D \nabla^2 u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或

$$\iiint_D [\sigma\rho u_t - K\nabla^2 u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0, \tag{2.5.5}$$

其中 D 是D^* 内的任一区域．我们假设上述积分中的被积函数是连续的．如果假定被积函数在 D 内某点(x_0, y_0, z_0)处不等于零，则由连续性，可得被积函数在一个包围点(x_0, y_0, z_0) 的小区域上恒不等于零．继续用这一方式扩充到包括 D 的区域，因此积分必不等于零，与(2.5.5)式矛盾．于是被积函数处处为零，即

$$u_t = k\nabla^2 u . \tag{2.5.6}$$

其中 $k = K/\sigma\rho$. 这个方程称为热传导方程．

这种类型的方程出现在各种数学物理问题之中；例如，在扩散物质的浓度，在一长沟中的潮汐波的运动与电缆的传输等问题中．

2.6 引 力 势

在本节我们将导出在偏微分方程理论中最著名的一个方程——拉普拉斯方程．

如图 2.4 所示，我们考察在点 P 和 Q 处质量为 m 和 M 的两个质点．设 r 是两质点间的距离．于是根据牛顿的万有引力定律，引力与两质点质量的乘积成正比，与两质点间距离的平方成反比，因此它可表示为下列形式：

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \tag{2.6.1}$$

其中 G 是引力常数．

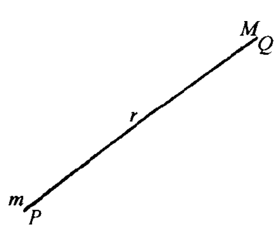

图 2.4

在势论中通常选择这样的力的单位使 $G=1$. 于是 F 变成

$$F = \frac{mM}{r^2}. \tag{2.6.2}$$

如果用 $\boldsymbol{r}$ 表示矢量 PQ，则在点 P 处质量为 m 的质点对点 Q 处的每单位质量的质点的作用力可写成

$$\boldsymbol{F} = \frac{-m\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right), \tag{2.6.3}$$

它称为这个力所产生的引力场的强度.

假定一单位质量的质点受到点 P 处质量为 m 的质点的吸引,由无穷远处移动到 Q ,则力 F 所作的功是

$$\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{r} \nabla\left(\frac{m}{r}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{m}{r}. \tag{2.6.4}$$

这个功的负值称为由点 P 处质点的吸引而产生的在点 Q 处的势，它可表示为

$$V = -\frac{m}{r}. \tag{2.6.5}$$

因此在点 Q 处的引力场的强度是

$$\boldsymbol{F} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right) = -\nabla V. \tag{2.6.6}$$

我们现在考察 n 个质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的质点,它们与点 Q 的距离分别是 $r_1, r_2, \cdots, r_n$.那么由于这个质点系对点 Q 处每单位质量的质点的吸引力是

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \nabla \frac{m_k}{r_k} = \nabla \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{r_k}. \tag{2.6.7}$$

由这些作用在单位质量的质点上的力所作的功是

$$\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{r_k} = -V. \tag{2.6.8}$$

这个势满足

$$\nabla^2 V = -\nabla^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{r_k} = -\sum_{k=1}^{n} \nabla^2 \frac{m_k}{r_k} = 0, \quad r_k \neq 0. \tag{2.6.9}$$

如果在某一体积 R 内质量是连续分布的,如图 2.5 所示，那么我们可得

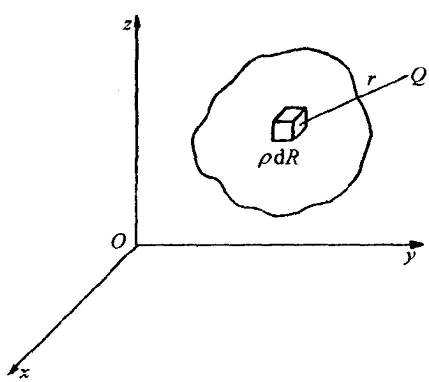

图 2.5