四川省高校面向 21 世纪科研项目系列教材之一
四川省重点建设课程　数学建模基础课教程

规 划 论

(第二版)

编著　何　聪
主审　晏能中

四川大学出版社
2005 年 · 成都

责任编辑:周树琴
责任校对:周路路
封面设计:罗　光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目（CIP）数据

规划论/ 何聪编著 .—成都: 四川大学出版社,
2001.9
ISBN 7-5614-2214-8

Ⅰ.规... Ⅱ.何... Ⅲ.规划论 Ⅳ.0221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066516 号

书　名　规划论

编　著　何　聪　主审　晏能中
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印　刷　华西医科大学印刷厂
发　行　新华书店经销
开　本　787mm×1■092mm　1/16
印　张　12.75
字　数　300 千字
版　次　2005 年 9 月第 2 版
印　次　2005 年 9 月第 2 次印刷
印　数　1001～2500 册
定　价　26.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电话:5412526/5414115/5412212　邮编:610064
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回印刷厂调换。

前　言

半个多世纪以来，由于工业、农业、科学技术的迅猛发展，在现代化的生产管理、工程技术、科学实验、财政经济、军事作战等方面常遇到怎样合理运用现有人力、物力、财力、资金、资源以及如何筹划和组织管理、安排的问题。为了解决这样的问题，在数学中，逐步形成和发展成了一门新兴的数学分支——运筹学。

运筹学有很多分支，其中有规划论、排队论、博弈论等，本书主要介绍规划论。由于电脑技术的迅速发展，使计算机能处理成千上万个未知数的约束条件和决策变量的规划问题，从而导致规划论的适用领域更为广泛，从最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域它都可以发挥作用，成了现代化科学管理的重要手段之一。

规划论主要分为六部分内容：线性规划、目标规划、动态规划、整数规划、0-1规划、非线性规划。线性规划是解决单目标的规划问题，对多目标的规划问题用目标规划来处理，对多阶段的动态规划问题就用动态规划来处理。求其最优解，是整数解的线性规划问题，称为整数规划。在整数规划中，其决策变量限制为0或1时，这一类线性规划称为0-1规划，整数规划是近二十年才发展起来的规划论的一个分支。在规划论中，其数学模型的目标函数或约束条件是非线性的，称这一类规划问题为非线性规划。解非线性规划问题，不像解线性规划问题那样有一般的单纯形方法，只能对不同的非线性规划问题寻求不同的方法去解决。这就是我们常遇着的优化问题。在生产经营管理活动中，常用它来解决实际问题。因此，规划论在实际应用方面很广泛，也为管理者所重视。

近年来，世界各国的理工科高等学校都非常重视运筹学的建设和教学，因为它是开展大学生数学建模竞赛的一门基础课程。在数学建模题目中，用规划论解决的竞赛题目出现的次数很多，因此对参加全国大学生数学建模竞赛的数学系学生开设规划论是必要的，而且更重要的是规划论的知识和解决实际问题的方法已渗透到中学数学中。从1993年起高考试题就出现规划论问题，比如1993年的水池最低造价问题，1994年的最佳近似值问题，1995年的物价问题，1996年的资源问题，1997年的运输成本问题，1999年、2000年的优化问题等。因此加强数学系规划论课程的建设和教学，对促进数学系和中学数学教学改革，培养合格的中学师资及参加一年一次的全国数学建模竞赛都是大有益处的。这也是我们写这本《规划论》

和开设这门课程的目的所在。

本书在编写过程中，注意了教材的系统性、思想性、科学性、通俗性、应用性，注意了讲清基础知识、基本理论和基本方法，特别注意了理论联系实际和少而精的原则。

规划论是四川省重点建设课程，也是四川省高校“面向21世纪数学系教学内容和课程改革研究”科研项目的重要研究内容。此书既是四川省高校“面向21世纪数学系教学内容和课程改革研究”科研项目编著的系列教材之一，也是数学建模课程建设的任务之一。《规划论》由达县师范高等专科学校数学系何聪编著，晏能中教授主审。在编写过程中得到了达县师范高等专科学校校领导以及教务处、数学系等的大力支持。由于编著者水平有限，书中错误难免，欢迎指正！

编审者

2001. 6

再 版 前 言

《规划论》一书自 2001 年出版以来，已有四年了。此书作为四川省高校面向 21 世纪科研项目系列教材之一，四川省重点建设课程，数学建模的基础课教程已被读者广泛认同。一些学校把它作为必修课或选修课开设，一些学校把它作为数学建模的培训教材，均产生了好的效果。达县师范高等专科学校是把《规划论》作为学生必修课开设的学校之一，近年来学生在全国大学生数学建模竞赛中连续几年取得好成绩，2001 年获国家一等奖 1 个，省三等奖 1 个，2002 年获国家二等奖 1 个，省三等奖 1 个，2003 年获国家二等奖 2 个，省一等奖 2 个，2004 年获国家二等奖 1 个，省一等奖 2 个，省二等奖 1 个。

本次再版，除对第一版印刷中的一些错误作了更正，还增加了一些实例和有效方法，使此书的内容更贴近生产、生活实际。

本书如有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

作　者

2005 年 8 月

第一章　线　性　规　划

1939 年,苏联数学家康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时,提出了线性规划的数学模型,并给出了“解乘数法”的求解方法。由于当时未被重视,直到 1960 年康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后,才受到国内外的重视,为此,康托洛维奇获得诺贝尔奖金。美国人丹捷格(G.B.Dantzig)在 1947 年发表了求解线性规划的单纯形法,使线性规划在理论上日趋成熟,在实用上日益广泛深入。本章分线性规划问题的数学模型、线性规划问题的标准形、线性规划问题解的意义及性质、线性规划的图解法、线性规划的单纯形方法等十二节。

第一节　线性规划问题的数学模型

在现代化的生产经营管理活动中,常遇到这样两类问题:一是确定的任务,如何用最少的人力、物力、财力去完成它;二是资源(人力、物力、财力)一定,如何用现有的资源去完成最大的任务。这两类问题的条件可用一次方程或一次不等式表示,取得最大值(或最小值)的目标函数也是一次的,因此把解决这样两类问题的一门学科称为线性规划。

线性规划的应用范围有以下八类。

一、关于物资调运问题

例如:A_1,A_2,A_3 三个煤矿和 B_1,B_2,B_3 三个工厂其产煤量和需煤量及运输单价见表 1.1 - 1(表中 x_{ij} 表示 A_i 矿供应 B_j 厂的煤量)和表 1.1 - 2(c_{ij} 表示 A_i 煤矿运往 B_j 厂的单价)。如

表 1.1 - 1　　　　(单位:万吨)

煤矿 \ ij \ 工厂	B_1	B_2	B_3	产　量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	15
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	25
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	50
需要量	20	45	25	90

何调运,使运费最低?

这个问题用数学语言表述出来就是:

表 1.1 - 2　　　　　　　　(单位:元/ 吨)

ij 工厂 / 煤矿	B_1	B_2	B_3
A_1	8	6	7
A_2	2	7	5
A_3	3	4	8

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25, \\ x_{ij} \geq 0 (i = 1,2,3; j = 1,2,3), \end{cases} \qquad (1)$$

$$S = 8x_{11} + 6x_{12} + 7x_{13} + 2x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 3x_{31} + 4x_{32} + 8x_{33}。$$

于是问题就转化为:求出未知量 x_{ij} ($i = 1,2,3; j = 1,2,3$) 并且使得函数 S 最小。由于问题的条件是一次方程,取得最小值的函数也是一次的,因此这个问题,我们就称为线性规划问题。

像这样一类物资调运的线性规划问题的一般叙述是:

设某种物资有 m 个产地:$A_1, A_2, \cdots, A_m$;n 个销地:$B_1, B_2, \cdots, B_n$;产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$;销量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。从 A_i 到 B_j 的运输单价为 c_{ij} ($i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n$) 而且总产量与总销量刚好平衡,即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。如何调运使总运费最低?其产需平衡运输单价见表 1.1 - 3(x_{ij} 表示 A_i 供应 B_j 的物资量)。

表 1.1 - 3

产需平衡及运输单价 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量(a_i)
A_1	11 11	12 12	…	1n 1n	a_1
A_2	21 21	22 22	…	2n 2n	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	m1 m1	m2 m2	…	mn mn	a_m
销量(b_j)	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

根据产需平衡、运输单价表得出此类问题的数学模型为

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0 (i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n), \end{cases} \tag{2}$$

并且使总运价

$$S = c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \cdots + c_{mn} x_{mn} \tag{3}$$

取最小值。

(2) 式常称约束条件, (3) 式线性函数 S 称为目标函数, 其中 a_i, b_j, c_{ij} $(i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n)$ 是给定的常数。

用和号表示出来:

目标函数
$$\min S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

约束条件
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots, n), \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n)。 \end{cases}$$

二、关于作物布局问题

例如:某人承包了 100 hm^2 旱地,计划播种大豆 20 hm^2,玉米 40 hm^2,红苕 40 hm^2,播种在三种不同的土壤里,试问如何安排,使总产量最高?其单位面积产量(kg/hm^2)和播种面积 x_{ij},如表 1.1-4。

表 1.1-4

面积和单产) 土壤 作物	B_1(黑土)	B_2(湿地)	B_3(浅丘土)	播种面积
A_1(大豆)	11 1650)	12 1500)	13 750)	20
A_2(玉米)	21 2625)	22 2250)	23 1500)	40
A_3(红苕)	31 3000)	32 0)	33 2250)	40
土地面积	60	30	10	100

注:产量为 0 表示不宜种植这种植物。

根据表 1.1 - 4,其数学模型为

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=20, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=40, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=60, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=30, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=10, \\ x_{ij}\geq 0 \qquad (i=1,2,3;\ j=1,2,3); \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \max\ S = {} & 1650x_{11}+1500x_{12}+750x_{13}+2625x_{21}+2250x_{22} \\ & +1500x_{23}+3000x_{31}+0x_{32}+2250x_{33}\text{。} \end{aligned} \tag{5}$$

这就是求一组 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{33}$ 满足约束条件(4),并使目标函数 S 取得最大值。

关于作物布局的一般平衡表(见表 1.1 - 5,表中 x_{ij} 表示 A_i 种作物在 B_j 种土壤里的播种面积,c_{ij} 表示 A_i 种作物在 B_j 种土壤里的单位面积产量) 和数学模型,就是求一组 x_{ij} 的值满足

表 1.1 - 5

单产和面积 土壤 作物	B_1	B_2	…	B_n	播种面积
A_1	^{11} $_{11}$	^{12} $_{12}$	…	^{1n} $_{1n}$	a_1
A_2	^{21} $_{21}$	^{22} $_{22}$	…	^{2n} $_{2n}$	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	^{m1} $_{m1}$	^{m2} $_{m2}$	…	^{mn} $_{mn}$	a_m
土地面积	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

约束方程组

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij}\geq 0\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots n), \end{cases} \tag{6}$$

并且使目标函数

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \text{取得极大值。}$$

三、关于劳动力组合问题

例如:某农业生产承包组有甲等劳力 20 人、乙等劳力 15 人、丙等劳力 25 人、丁等劳力 20 人,要分配他们去干割麦、浇水、送肥三种农活。各种劳力干不同农活的效率(指每人每天干多少活)是不相同的,见表 1.1 - 6(表中的 x_{ij} 是 A_i 种劳力干 B_j 种农活的人数,表中数字表示对应 A_i 劳力干 B_j 种农活的效率,公顷/ 人天)。试作出劳力调配方案,使得完成的任务越多越好。

表 1.1 - 6

效率 农活 劳动力	B_1(割麦)(hm^2)	B_2(浇水)(hm^2)	B_3(送肥)(hm^2)	人数
A_1(甲等)	11 .0/ 15	12 .5/ 15	13 .0/ 15	20
A_2(乙等)	21 . 0/ 15	22 .3/ 15	23 .8/ 15	15
A_3(丙等)	31 . 5/ 15	32 .4/ 15	33 .3/ 15	25
A_4(丁等)	41 .5/ 15	42 .2/ 15	43 .2/ 15	20
完成地积	至少 40/ 15	至少 20/ 15	至少 20/ 15	

这是一类劳力组合问题,其数学模型为

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=20, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=15, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=25, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=20, \\ 3.0x_{11}+2.0x_{21}+2.5x_{31}+1.5x_{41}\geq 40, \\ 0.5x_{12}+0.3x_{22}+0.4x_{32}+0.2x_{42}\geq 20, \\ 1.0x_{13}+0.8x_{23}+0.3x_{33}+0.2x_{43}\geq 20, \\ x_{ij}\geq 0,\ x_{ij}\in Z(i=1,2,3,4;j=1,2,3), \end{cases} \tag{7}$$

$$\max S=\frac{1}{15}(3.0x_{11}+0.5x_{12}+1.0x_{13}+2.0x_{21}+0.3x_{22}+0.8x_{23}$$
$$+2.5x_{31}+0.4x_{32}+0.3x_{33}+1.5x_{41}+0.2x_{42}+0.2x_{43}),$$

这就是求一组 x_{ij} 满足约束条件(7),并使 S 取得最大值。

关于这一类劳力组合线性规划问题的一般劳力调配表(见表 1.1 - 7,表中 x_{ij} 表示 A_i 种劳力干 B_j 种工作的人数,p_{ij} 表示 A_i 种劳力干 B_j 种工作的效率)和数学模型是:

表 1.1 - 7

ij 和 ■i■j 工种 劳力	B_1	B_2	…	B_n	人数
A_1	$^{11}_{11}$	$^{12}_{12}$	…	$^{1n}_{1n}$	a_1
A_2	$^{21}_{21}$	$^{22}_{22}$	…	$^{2n}_{2n}$	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	$^{m1}_{m1}$	$^{m2}_{m2}$	…	$^{mn}_{mn}$	a_m
任务	至少 b_1	至少 b_2	…	至少 b_n	

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,(i = 1,2,\cdots,m), \\ \sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij} \geq b_j\,(j = 1,2,\cdots,n), \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z(i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)。\end{cases} \tag{8}$$

$$\max S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}。$$

求出一组 x_{ij} 满足约束条件(8),并使 S 取得最大值。

四、关于节约用料问题

例如:某化肥厂有 A_1,A_2,A_3,A_4 四种原料,可以生产 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 六种不同的化肥。这个工厂的各种原料存量、制造每种化肥 1 t 的用量,以及各种化肥的价值如表 1.1 - 8,从表中可以看出制造 B_1 种化肥 1 t 需用 A_1 种原料 1 t,A_2 种原料 2 t,其它类推,试就现存原料安排生产,使这个工厂的生产总值达到最大。

表 1.1 - 8

用料量 t) 化肥 原料	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	存量
A_1	1	1	1	3	3	3	850
A_2	2			5			700
A_3		2			5		100
A_4			3			8	900
价值(元/ 吨)	40	28	32	72	64	60	

设各种化肥的吨产量分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$。

根据原料存量、用量和产品价值表,可得该问题的线性规划的数学模型:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 \leq 850, \\ 2x_1 + 5x_4 \leq 700, \\ 2x_2 + 5x_5 \leq 100, \\ 3x_3 + 8x_6 \leq 900, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6), \end{cases} \tag{9}$$

$$\max S = 40x_1 + 28x_2 + 32x_3 + 72x_4 + 64x_5 + 60x_6。$$

此线性规划就是求一组 $x_j (j = 1, \cdots, 6)$ 满足约束条件(9),并且使得 S 取最大值。

五、关 于 下 料 问 题

例如:10 m 长的钢条做原料,截取 3 m、4 m 长的甲乙两种钢条各 100 根,问怎样截法最合算?

不难想到钢条有下列三种下料方式:(1) 截取 3 m、3 m、3 m 的三段,残留 1 m;(2) 截取 3 m、3 m、4 m 的三段,无残留;(3) 截取 4 m、4 m 的两段,残留 2 m。

假定按照(1)截法,可取 x_1 根钢条;假定按照(2)截法,可取 x_2 根钢条;假定按照(3)截法,可取 x_3 根钢条。

依题意可得线性规划问题的数学模型:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 100, \\ x_2 + 2x_3 = 100, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z (j = 1,2,3), \end{cases} \tag{10}$$

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3。$$

此问题,就是求一组数 $x_j (j = 1,2,3)$ 满足约束条件(10)并且使 S 最小。

此问题的一般情况是:有一批原材料需要下 m 种零件:$A_1, A_2, \cdots, A_m$,在一件原料上有 n 种不同的下料方式:$B_1, B_2, \cdots, B_n$,每种下料方式可得零件的个数 c_{ij} (c_{ij} 表示 B_j 下料方式可得零件 A_i 的个数)。每种零件的需要量为 a_i(表示零件 A_i 的需要量)。问根据表 1.1 - 9 怎样下料,才最节约?

表 1.1 - 9

下料方式 / 各方式下的零件数 / 零件名称	B_1	B_2	…	B_n	零件需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m

依题意设 B_j 种下料的原材料数为 x_j，其数学模型为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geq a_i, \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geq 0,\ x_j \in Z \ (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{11}$$

$$\min S = \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

即求一组 $x_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件(11)，并且使得 S 取最小值。

六、关于降低成本问题

例如：有 A_1, A_2, A_3 三种不同类型的铸件，需送去四个不同的工厂 B_1, B_2, B_3, B_4 进行加工。根据表 1.1 - 10(x_{ij} 表示 B_j 厂加工铸件 A_i 的件数，括号中的数字表示加工成本)给出的条件，寻求总加工费用最低的加工方案。

表 1.1 - 10

加工数及成本(元) 工厂 / 铸件类型	B_1	B_2	B_3	B_4	需加工数
A_1	x_{11} (4)	x_{12} (5)	x_{13} (6)	x_{14} (4)	300
A_2	x_{21} (8)	x_{22} (7)	x_{23} (8)	x_{24} (9)	300
A_3	x_{31} (4)	x_{32} (5)	x_{33} (4)	x_{34} (6)	300
能加工数	400	300	200	100	

寻求总加工费用最低的方案，就是求一组变量 $x_{ij}(i = 1,2,3, j = 1,2,3,4)$ 的值满足

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 300, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 400, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 300, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 200, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 100, \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z \ (i = 1,2,3, j = 1,2,3,4), \end{cases}$$

并且使目标函数

$S = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} + 8x_{21} + 7x_{22} + 8x_{23} + 9x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$ 的值最小。

此问题与前面关于劳力组合问题、节约用料问题类似，它们的共同特点都是降低成本，因此其数学模型都是相似的。

七、关于车船调度问题

设某汽车运输公司有批货运任务(见表 1.1 - 11)，它的发货单位是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，收货单

位是 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。由 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 到 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的货运量是 c_{ij}，运距是 d_{ij}。问题是要根据给定的货运任务，作出合理的运输计划，使运输成本尽可能降低。

表 1.1 - 11

运量、距离 / 收货单位 / 发货单位	B_1	B_2	…	B_n	发货量
A_1	c_{11} d_{11}	c_{12} d_{12}	…	c_{1n} d_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}$
A_2	c_{21} d_{21}	c_{22} d_{22}	…	c_{2n} d_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} c_{2j}$
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} d_{m1}	c_{m2} d_{m2}	…	c_{mn} d_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} c_{mj}$
收货量	$\sum_{i=1}^{m} c_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} c_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{m} c_{in}$	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$

这类问题称为车船的调度问题。这类问题的特点是：发货单位必须开进空车，才能把货物运出去，而收货单位在卸货后，就要开空车走。这样对于空车来说，发货单位是收车点，收货单位是发车点，它们的收车数和发车数分别是发货单位的发货量和收货单位的收货量。在车船调度问题中，降低成本的办法主要是减少空车行驶里程。因此车船调度问题，关键是怎样调度空车，即在发货点、收货点固定的道路上寻求合理的运输路线。

设 x_{ij} 代表从发车点 B_j 至收车点 A_i 的空车量，其空车调度平衡表见表 1.1 - 12。

表 1.1 - 12

车数 / 发车点 / 收车点	B_1	B_2	…	B_n	收车数
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{mj}$
发车数	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	

根据货运任务表和空车调度平衡表，在车船调度问题中，就是求出一组数 $x_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 满足约束条件

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, & (i = 1, 2, \cdots, m) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}, & (j = 1, 2, \cdots, n) \\
x_{ij} \geq 0, & (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)
\end{cases}
\tag{12}
$$

使目标函数(总的空车里程) $S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$ 取最小值。

八、关于场库设置问题

场库设置问题,也是一类运输问题,共同点都是寻求运输力最省,但不同的是场库设置问题是寻找某些点(收车点或发车点) 的合理位置,从而使运输力最省,运输问题是在收点和发点确定后,找出最短运输路线,从而使运输力最省。

例 1　设甲、乙、丙、丁四块地的面积分别为 6 hm^2、5 hm^2、4 hm^2、3 hm^2,地块之间的距离如图 1.1 - 1。现准备设立一个堆肥点,问堆肥点应设在何处,使运输力最省。

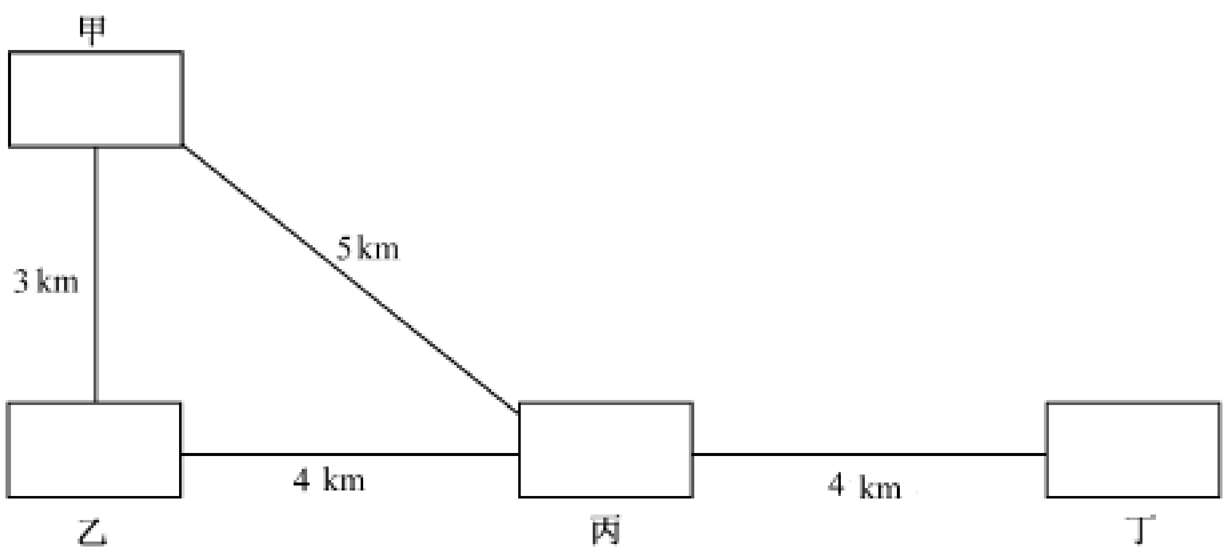

图 1.1 - 1

这里的路线和到达点(收点) 都是固定了的,目的是求运输力最省的出发点。

例 2　有麦田 A,B,C,D,E 五块,它们的产量、交通路线和相邻麦田间的距离见图 1.1 - 2,求打麦场的最佳位置。

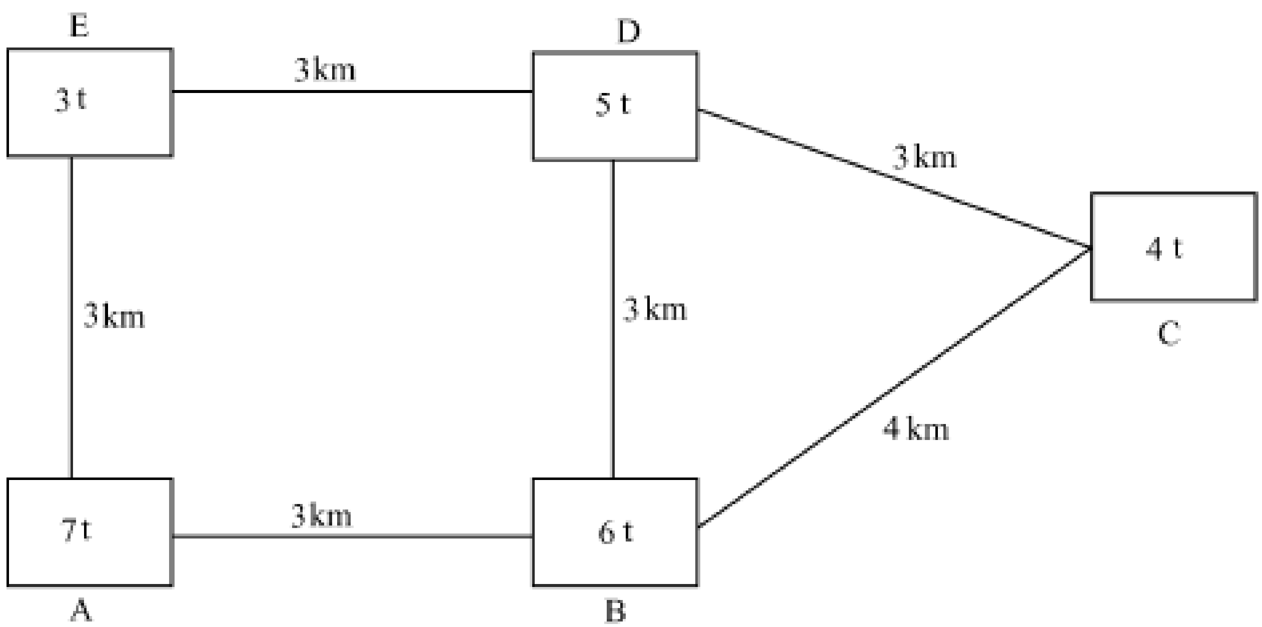

图 1.1 - 2

这里的路线和发点是固定的,目的是求出运输力最省的收点。可见场库设置问题与运输问题的数学模型是一致的。

前面讲了线性规划在八个方面的应用,这八个类型的数学模型都有一个共同特点,就是寻求一组值 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件,并使目标函数值最优(最小值或最大值)。根据此特点,可以写出线性规划的数学模型的一般形式:

$$\max\ (\min)\ S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{13}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=,\geq)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=,\geq)\, b_2, \\ \cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=,\geq)\, b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)。\end{cases} \begin{matrix} \\ (14) \\ \\ \\ (15) \end{matrix}$$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为决策变量,在具体的线性规划问题中,就是一个方案。$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,$b_i(i=1,2,\cdots,m)$,$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 均为常数。(13) 称为目标函数,(14)、(15) 称为约束条件,其中(14) 也称资源约束,(15) 也称决策约束。

为了寻求各类线性规划的一般解法,下节将研究线性规划问题的标准形式。

习 题 一

写出下列线性规划的数学模型(不用求解)。

1. 有甲、乙两个煤矿,每月产煤分别不少于 60 t 和 100 t,它们负担三个村的用煤任务,这三个村每月分别用煤 45 t、75 t、40 t,甲矿离三个村的距离分别为 10 km、5 km、6 km。乙矿离三个村的距离分别为 4 km、8 km、15 km。这两个煤矿如何分配供煤,才使运量最小?

2. 某厂用三台机床 A_1,A_2,A_3 加工两种零件 B_1 和 B_2 的个数分别为 50 个和 70 个,各机床必须加工零件数 A_1 为 40 个,A_2 为 35 个,A_3 为 45 个,各种机床加工各种零件的加工费见表 1.1 - 13。如何分配这三台机床加工这两种零件的任务,才使总的加工费最少?

表 1.1 - 13

加工费(元/个) \ 零件 \ 机床	B_1	B_2	至少加工件数
A_1	4	3	40
A_2	3	5	35
A_3	2	2	45
需加工零件个数	50	70	

3. 某木材加工厂生产圆桌和衣柜两种产品,现有两种木料,甲种木料 72 m^3,乙种木料 56 m^3,设生产每种产品都需要用两种木料,其每种木料数量见表 1.1 - 14,生产一张圆桌可获利润 8 元,生产一个衣柜可获利润 10 元,圆桌和衣柜应各生产多少,才获利最多?

表 1.1 - 14

木料 / 立方米/件 / 产品	甲	乙	利　润
圆　桌	0.18	0.28	8(元/件)
衣　柜	0.08	0.28	10(元/件)
数量(m^3)	72	56	

4. 用长度为500 cm的木料,截成长度分别为98 cm和78 cm两种毛坯,要求共截出98 cm的毛坯10 000根,78 cm的20 000根,怎样截法,才使所用原料最少?

5. 某养鸡场有10 000只鸡,用动物饲料和谷物饲料混合喂养,每天每只鸡平均吃混合饲料500 g,其中动物饲料占的比例不得少于1/5,动物饲料每500 g售价1元,谷物饲料每500 g售价0.8元。饲料公司每周只保证供应谷物饲料25 000 kg,问饲料怎样混合,才使成本最低?

6. 某产品质量为75 kg,用 A, B 两种原料制成,每单位 A 种原料成本2元,每单位 B 种原料成本8元,该产品至少需要含14单位 B 种原料,最多含20单位 A 种原料,每单位 A 种原料质量为2.5 kg,每单位 B 种原料质量为5 kg,为使成本最小,该产品中 A, B 两种原料应各占多少?

7. 某饲养场饲养动物出售,设每头动物每天至少需700 g蛋白质、30 g矿物质、100 mg维生素。现有五种饲料可供选用,各种饲料每千克营养成分含量及单价见表1.1 - 15。要求确定既满足动物生长的营养需要,又使费用最省的饲料选用方案。

表 1.1 - 15

饲　料	蛋白质(g)	矿物质(g)	维生素(mg)	价格(元/千克)
1	3.0	1.0	0.5	0.2
2	2.0	0.5	1.0	0.7
3	1.0	0.2	0.2	0.4
4	6.0	2.0	2.0	0.3
5	18.0	0.5	0.8	0.8

8. 一贸易公司专门经营某种杂粮的批发业务。公司现有库容量为250 t的仓库。一月一日,公司拥有库存50 t杂粮,并有资金20 000元。估计第一季度杂粮价格见表1.1 - 16。如买进的杂粮当月到货,但需到下月才能卖出,且规定"货到付款"。公司希望本季末库存为100 t,应采取什么样的买进与卖出的策略使三个月总的获利最大?

表 1.1 - 16

	进货价(元/千克)	出货价(元/千克)
一月	2.85	3.10
二月	3.05	3.25
三月	2.90	2.95

9. 某农场有100 hm^2 土地及15 000元资金可用于发展生产。农场劳动力情况为秋冬季3 500人日,春夏季4 000人日,如劳动力本身用不了时可外出干活,春夏季收入为2.1元/人日,秋冬季收入为1.8元/人日。该农场种植三种作物:大豆、玉米、小麦,并饲养奶牛和鸡。种