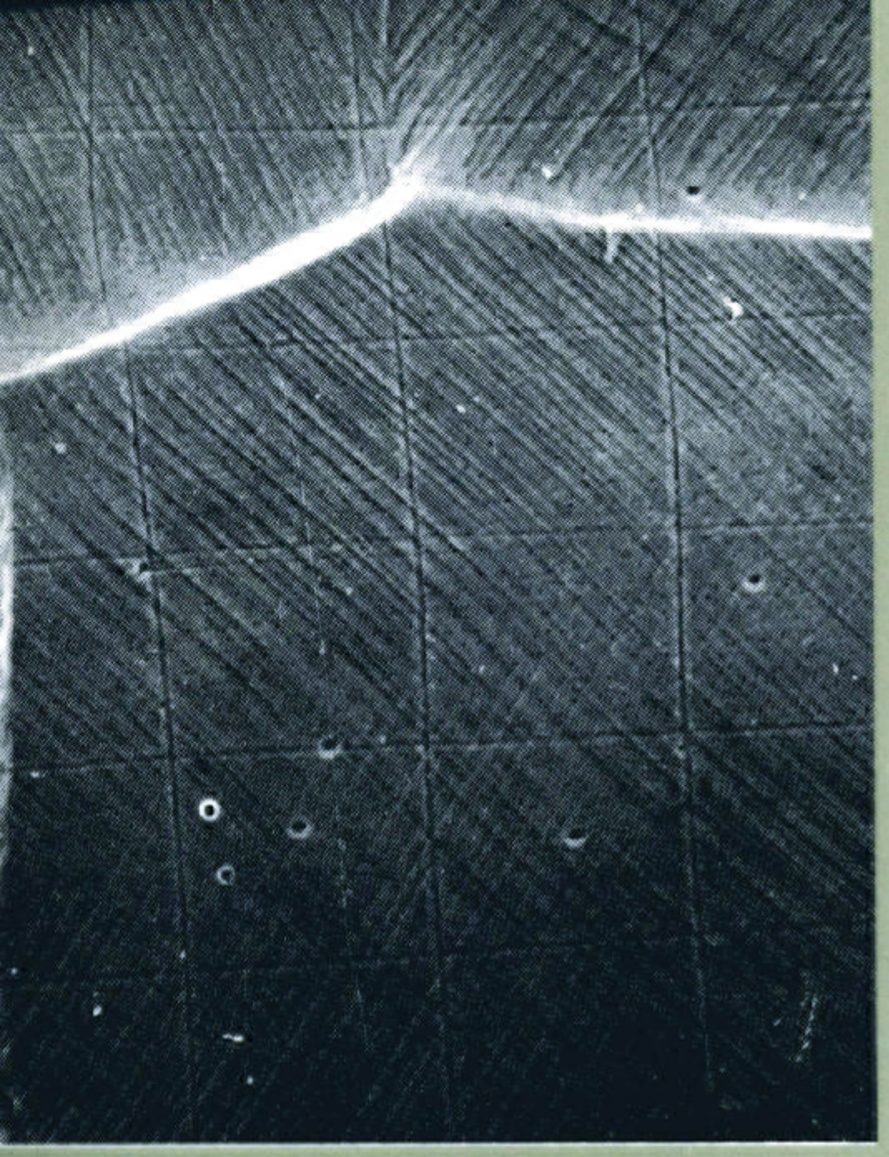
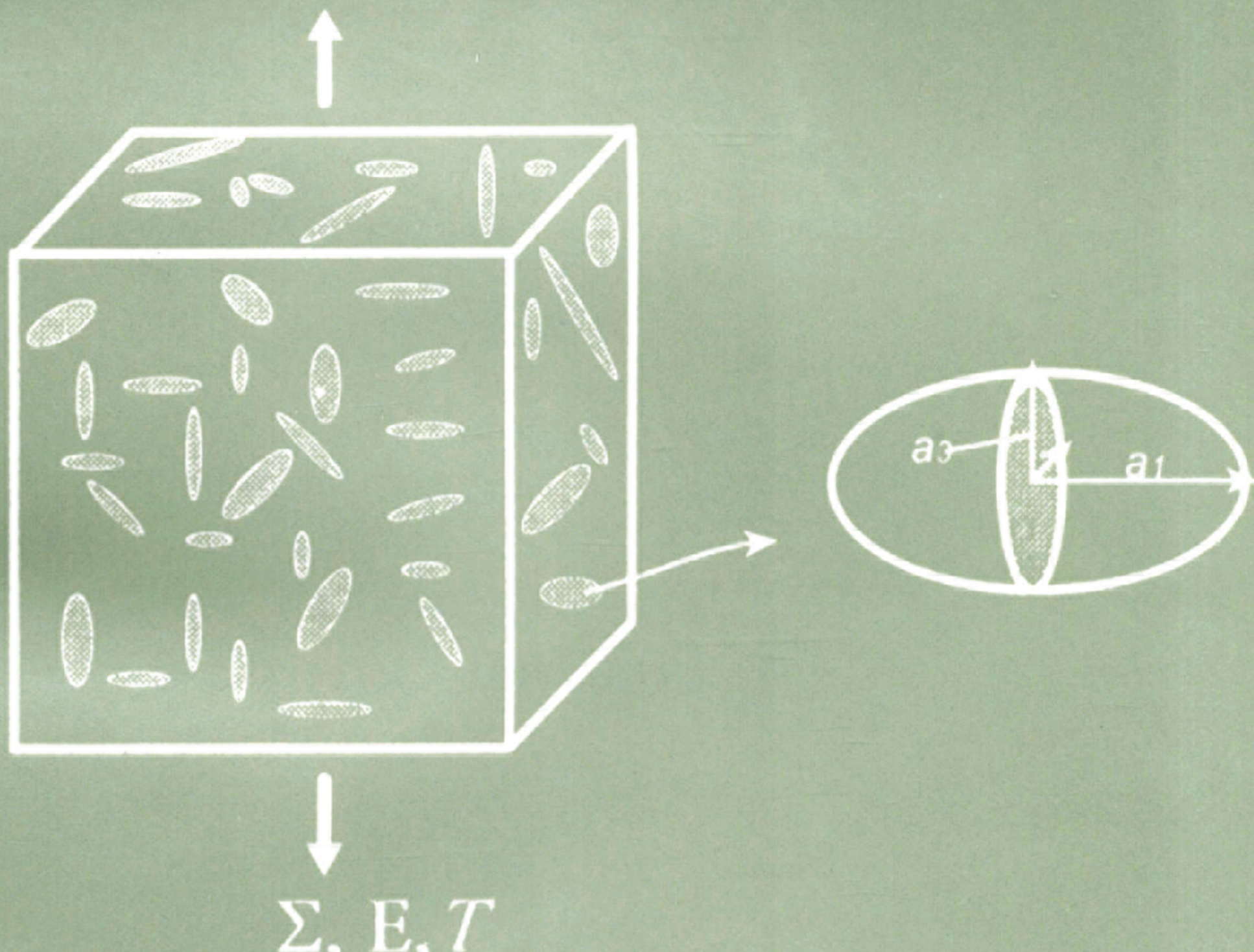


固体力学发展趋势

黄克智　徐秉业　主编





北京理工大学出版社



需要全本请访问 www.ertongbook.com

固体力学发展趋势

黄克智　徐秉业　主编

北京理工大学出版社

固体力学发展趋势

黄克智　徐秉业　主编

*

北京理工大学出版社出版发行
（北京市海淀区白石桥路 7 号）
（邮政编码 100081）
各地新华书店经售
北京地质印刷厂印刷

*

850×1168 毫米　32 开本　10.75 印张　274 千字
1995 年 7 月第一版　1995 年 7 月第一次印刷
ISBN 7－81013－993－2/TH・76
印数：1－1100 册　定价：12.00 元

※ 图书印装有误，可随时与我社退换 ※

序　言

本文集是在国家科学基金委员会数理科学部、国家教委科技委力学学科组和中国力学学会固体力学专业委员会委托下于1990年11月25～26日与1992年12月22～23日召开的两次固体力学发展趋势研讨会的基础上，由有关专家分工撰写的综述报告的汇集。我们希望本文集不但对我国自然科学基金的资助导向起参考作用，而且也能帮助我国固体力学工作者了解国内外学科发展动态与趋势。

感谢自然科学基金委员会、北京理工大学赵学仁副校长及出版社支持本文集的出版。

黄克智　徐秉业

1994年3月18日

目　录

计算固体力学发展中的若干问题 …… (1)
连续介质力学中的某些基本问题 …… (22)
固体动力学近况 …… (33)
固体动力学中的反问题 …… (55)
当前断裂力学发展的几个问题 …… (74)
材料的不稳定性 …… (95)
固体力学发展的某些新趋势 …… (108)
界面断裂力学主要进展 …… (136)
复合材料细观力学的研究概况 …… (162)
细观损伤理论进展 …… (180)
计算细观力学进展 …… (196)
细观实验力学近况概述 …… (216)
相变固体力学的研究与展望 …… (235)
分形最新进展与力学中的分形 …… (254)
固体力学在工程中的应用 …… (271)
固体动力学在地震工程中的应用 …… (289)
机械/结构动力学进展及展望 …… (296)
固体力学的跨世纪发展 …… (318)
力学学科基金资助的几点情况 …… (331)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

计算固体力学发展中的若干问题

程耿东　李锡夔

（大连理工大学）

一、引　言

随着计算机软件和硬件技术的飞速发展，计算力学在近三十年中得到了迅速的发展，取得了可观的成就，产生了广泛而深远的影响。计算力学是计算机科学、计算数学和力学学科相互交叉、相互渗透的产物，它凭借计算机软硬件这一强大的工具，极大地提高了经典力学解决自然科学和工程科学中的力学问题的能力，成为数学工作者和力学工作者通向工程实践及相邻学科的一座桥梁。今天，无论在国际上还是在我国，计算力学都是力学学科的最重要的充满活力的分支之一。

一般认为，计算力学的发展始于有限元方法的出现。虽然在有限元方法出现以前已经有了很多求解偏(常)微分方程(组)的数值方法，但有限元法具有独特的优点。在有限元理论中，人们建立了统一的模型化、离散化、数值求解及编程实现的方法，可以用来求解不同形状、不同类型、不同边界条件及不同荷载下的物体的力学分析问题。早期的计算力学的研究开发工作主要集中于结构及固体的计算分析，随着计算力学研究工作的深入发展，以有限元方法为其代表的计算力学也逐渐向流体力学、气体力学扩展，但是，即使在今天，在流体力学和气体力学领域内的力学问题的分析也仍然经常采用有限差分法。对于那些研究对象是由一种介质组成、介质所占有的区域的形状和拓扑又比较简单的问题，有限差分法具

有一定的特点。

为了求得形状和拓扑复杂的结构或固体在静力、动力或温度荷载作用下的变形、应力和应变，人们现在已经离不开计算的手段。计算力学工作者虽然对于这些计算的结果感兴趣，但他们的工作更多地集中在如何建立高效的、足够精确的计算手段，特别是解决建立这些计算手段中的共性问题。在有限元方法及近年来发展较快的边界元方法，包括样条有限元法等有限元法的发展中，从结构和固体的离散化、单元列式、控制方程求解、计算结果解释到收敛理论都可以建立一套基本上不依赖于所研究的结构的类型及形状的统一的方法。正因为如此，这些方法成为计算力学研究的对象，而模型的建立、算法的构造及软件的开发则是这些方法研究中的共性问题，也是计算力学研究的重点。从这个意义上说，计算力学将固体力学、流体力学及气体力学等置于一个统一的框架中。下面我们将从模型、算法这两个方面来介绍计算固体力学近年来的若干进展并讨论今后的方向。计算力学软件开发是一个很大的题目，限于篇幅，本文就不再讨论。

二、计算固体力学中模型的建立

计算固体力学中的各类计算模型，都是从现实物理对象中抽象出来的，是计算力学中各类算法及软件开发的基础。建立适合于所求解问题的计算力学模型是成功地求解这类问题的关键，在计算模型构造上的突破会导致算法及软件的重大变化，也会导致问题求解的效率和精度的大幅度改进。下面我们列出在各种不同层次上的一些模型化问题，由于篇幅限制，这些问题肯定没有覆盖整个计算力学中的模型化问题。

（1）我们所研究的连续介质是有微结构的，现有的连续介质力学模型是通过各种近似将具有微结构的介质均匀化和连续化，而有限元方法和边界元方法等则是将连续介质离散化。另一种途

径则是直接将介质离散化，例如，Cundall，P. A 等在 70 年代末提出的离散单元法[1]，Kawai，T[2]钱令希[3]等提出的刚体有限元法，对于岩土力学、弹塑性问题分析，这些方法都取得一定的成功。

（2）有限元法将连续介质占据的区域离散化，边界元法则仅将连续介质所占区域的边界离散化，但后者要求知道所研究问题的基本解。有限元法现在已经被广泛接受，根据有限元法开发的一大批商用结构分析程序已经得到广泛的应用。边界元法因为网格剖分简单，计算工作量及对计算机内存容量的要求低，特别是易于和 CAD 造型软件接口，在某些问题中也是一个很好的方法，现在很多商用结构分析程序中也配备了采用边界元法求解的功能供用户选择。边界元法虽然也能求解物理和几何的非线性问题及动力响应问题，但由于获取基本解的困难，在这些问题中边界元法和有限元法相比也许会需要更多的工作，Atruri 等提出的域——边界单元法则是一种可能的途径。[4]

（3）对于给定的连续介质，如何选择变量空间及能量原理建立单元列式，对于提高有限元法（及边界元法）的求解效率和精度具有十分重要的意义。例如，采用位移作为基本变量及势能原理就可以得到位移元，采用二变量和三变量广义变分原理及适当选择应力、应变及位移等变量就可以得到杂交元及混合元；虽然有限元的构造和列式是一个从有限元方法问世以来就已经研究的问题，但发展低阶高精度单元的研究工作仍很活跃。早期的低阶单元，等参四节点四边形单元和等参八节点六面体单元，曾在结构分析程序中广泛使用，这是由于应用这些单元，有限元网格易于划分，单元拓扑表示简单，计算工作量较小。另外，在一些特殊的分析问题，如接触问题中，当应用接触算法表示结构边界的相互作用时，它们十分有效，而当利用高阶单元时，要用二次或三次插值表示离散接触点时收敛性存在困难。同时，在结构动力分析时，显式分析的中心差分使周期变短，而利用堆聚质量法时引起的误差使周期变长，这两个误差的效果可以部分抵消。使用低价单元时，堆聚质量法很

易实现，而二次、三次插值的高阶单元不具备这一性质。但是，传统的基于位移法的低阶元的致命弱点是计算精度差，特别对于弯曲问题或不可压缩材料(有限塑性或不可压缩弹性)存在严重的自锁，导致错误的分析结果。

目前发展低阶高精度元的途径可归纳为三类：不协调位移元、杂交应力元及混合应变元。希望低阶高精度元具备的性质是：当材料不可压缩时没有任何自锁现象；位移与应力精度都较好，特别地对于弯曲问题无剪切自锁的困难；通过分片试验；适用于材料及几何非线性问题；计算效率较高；在有限元全局网格下，单元公式只有位移自由度，易于拼装。为了克服位移不协调元通不过分片试验的缺点，Taylor，R. L[5]建议在单元积分中用 $J^*(0,0)/|J(0,0)|$ 代替 $J^{-1}=J^*(\xi,\eta)/|J|$，以满足分片试验；Sze，K. Y 建议[6] $J^*(\xi,\eta)$ 用 $J^*(0,0)$ 代替而 $|J|$ 保持不变以改善单元性态；吴长春[7]等建议用逻辑的方法来构造不协调位移模式，以满足分片试验；杂交应力元是以卞学璜的开创工作[8]开始的，但仍然在不断地改进，卞学璜、唐立民、Sze，K. Y 和陈万吉等[9~12]给出了性能良好的二维、三维低阶高精度元。但迄今为止，还极少看到杂交元在几何及材料非线性问题中的应用；混合应变元的代表性工作可见 Hughes[13]及 Simo[14]的工作，其中[14]的混合应变元不同于早先的其它混合应变元，它采用了胡—Washizu 三变量变分原理的 Galerkin 形式以及将应变场划分为由二部分组成：导自于假定位移场的协调应变部分和取作为独立变量的假定附加应变部分，在单元内部先对假定应力场施加相对于假定附加应变场的 L^2 正交化条件，以满足分片试验和在单元内部消去作为独立变量的假定应力场。进一步，将独立的附加应变自由度在单元一级凝聚掉，因此，得到的单元适合于位移法有限元程序中实现。这个单元已经被推广到几何非线性[15,16]，数值结果表明，这类混合应变元具有非常好的单元性质，满足前述的对低阶高精度单元的所有要求。乐观的看法认为低阶高精度单元的研究成果如果得以实现，可将传统

的位移法有限元程序效率提高一个量级。最近，人们从哈密尔顿体系出发，建立以位移型变量和力型变量的混合变量求解空间及相应的控制微分方程组，在此基础上的有限元列式有可能给出新的有限元及新的求解方法。

(4)众所周知，对于很多实际问题，人们对介质本构关系的了解远远落后于在算法构造及软件开发方面的成果。介质的力学性质模型化是经典固体力学讨论的一个基本课题。然而，借助离散化数值计算方法及高效计算机，今天人们对在各种环境因素(温度、流体、载荷)下复杂的非线性和依赖于时间和温度的材料行为均有可能设计出适当和精确的本构关系予以数值模拟，例如，对于饱和土壤在动力载荷下的本构关系的数值模拟[17~19]。近年来，材料科学和工程的发展为核工业、航空航天工业、火箭燃料、高爆固体炸药等高新技术领域提出了一批高性能新结构材料，如高填充高分子材料、超韧高分子合金以及以它们为基础的复合材料，人们对这些材料的本构关系的了解还很缺乏。这类材料的特点是具有相差很大的拉伸和压缩强度，材料力学性质十分依赖于温度的变化，在循环反复荷载条件下表现出相当显著的滞后现象和损伤效应以及对循环速率的敏感性。它们只有很低的屈服强度，然而直到材料呈现不稳定(软化)之前具有极高的硬化特性，人们因此需要深入研究材料伴随弹塑性变形的蠕变、损伤和裂缝发展过程以及材料在蠕变—弹塑性—损伤—温度场耦合过程下的本构关系。已有许多近期工作致力于发展这类本构关系。这些工作基于不可逆过程热动力学的连续损伤力学[20,21]，采用一个或若干个新内部变量描述损伤过程。在这些工作中，[22]发展了基于损伤力学的蠕变—疲劳相互作用本构模型，[23]发展了延性材料的塑性损伤模型，[24~27]建立了脆性材料的损伤—断裂模型，[28]讨论了各向异性材料的蠕变—损伤模型，[29,30]发展了一个基于应变或应力的统一的弹塑性(弹粘塑性)—损伤模型。建立这些模型时，基本的问题是如何用最少的内部变量来描述材料的损伤状态和如何在应力(应

变)空间中构造能精确地描写损伤演进过程的损伤曲面。

材料本构关系研究的另一个课题是与有限应变相关联的材料非线性本构方程的建立。现有的大多数有限应变塑性公式都是建立在应力应变本构关系的亚弹性(hypoelastic)形式材料描述基础上。然而这样的公式在纯弹性的周期变形下将导致物理上不能接受的非保守的残余应力结果,同时速率量时间积分的数值误差限制了积分步长[31]。因而基于超弹性(hyperelastic)的材料描述(应力全量由一个应变能函数的导数计算)的本构方程已愈来愈压倒优势地用于有限变形塑性[31~33,66]。对于不同非线性材料,需要分别建立新的基于超弹性材料描述的有限应变非线性本构方程。

如果我们假定在弹性阶段之后的材料微观裂缝和微观空洞的生成发展过程是近似地均匀的,那么跟随在其后的宏观裂缝的出现和发展过程则是局部的,并且应变和损伤的进一步演进将成为愈来愈局部化(在某些情况下材料将有局部软化),直到材料成为不稳定。通常的基于材料宏观模型化的连续损伤力学途径能够很好地描述前一过程,即均匀微观损伤阶段。然而,对于第二阶段,即断裂的模拟却遇到了很大的困难。在以应变和损伤发展局部化为特征的第二阶段中,荷载—位移曲线将高度依赖于宏观裂缝附近的网格密度和连接。这一病态现象是由于静力边值问题的椭圆性和动力初值边值问题的双曲性在宏观裂缝(材料完全损伤)处的丧失。[34]总结了从计算角度上用以解决这个问题的三个途径,并且讨论了在什么条件下这些改进的连续理论允许用以求解变形的局部化问题而不丧失问题的椭圆性(对静力问题)或双曲性(对动力问题)。然而问题的解决远没有达到完美的程度,主要的困难在于:为保证问题椭圆性的模型附加参数的确定;对各种材料在动力、有限应变塑性、损伤等复杂条件下自适应分析方法的建立以有效地(计算工作量和存储使用可以接受,计算精度高)捕捉住剪切带等局部化区域;对一些材料,如摩擦类材料,应变局部化分析的稳定性和唯一性在理论上还有一些没有解决的问题。目前还没有成熟

需要全本请访问 www.ertongbook.com

的数值上确定分叉点和保证最陡削的关键叉后分支上连续性的可靠算法。

当我们应用连续损伤力学概念建立复合材料的本构关系，会发现复合材料性质在细观上不是均匀连续的，因此必须对复合材料的每一个基本构成材料元素分别建立本构关系，也即细观本构模式[35]。例如，对于多层复合材料板，我们必须对单个的层片和两个相邻的层片之间的单个界面分别建立细观损伤模式，损伤状态沿一个层片的厚度是均匀的，一个界面的损伤状态可以不同于它的两个相邻层片。对于整个复合材料来说，这是一个半离散损伤模式。基于这一细观模型化概念，对于不同类型的复合材料分别建立和确定细观损伤模型的大量研究工作将是一个很有前景的研究方向。[36]提出了纤维多层复合板一个基本层片的损伤模式。细观损伤模型的一个主要困难是模型中参数的识别不能简单地利用通常的试验得到，此外困难也集中在如何定义用以描述依赖于时间的损伤状态的各材料损伤函数。细观损伤模型的另一个问题是计算工作可能耗费巨大，因此有必要研究更为简化的模型和方法。

(5)复杂形状固体和工程结构的分析，即使有了现成的计算力学软件也先要建立计算模型。计算模型的建立需要计算力学专家和特定工程领域或固体力学领域专家的合作，需要人们凭藉经验估计出在各种外部因素(荷载、温度、电磁场、流场等)作用下工程结构或固体内可能产生的位移、变形、应力或内力分布特征，然后做出合理的抽象和近似，选择合适的计算力学软件，选择合适的具有足够精度的计算模型、单元类型、网格布置及边界条件处理方法，并且对计算结构给予合理的解释。当应力场、位移场具有奇性而人们又对这些奇异特征感兴趣时，计算模型的建立离不开关于奇异特征的知识。在计算机使用和计算力学软件不断普及的情况下，人们寄希望于专家系统的研究工作以建立可以代替或者部分代替人类专家的有限元模型化咨询系统或全自动的有限元模型化系统[37]，延伸现有的前处理器或后处理器使它们智能化。对于某

一类非常特殊的结构类型，例如机翼或者机身[38]，这方面的研究工作已经取得一定的成功，但适用于更一般目的的有限元模型化专家系统还有待研究和开发。已有的研究工作表明[39,40]，有限元模型化的专家知识很难整理和获取，建立一个可靠的知识库除了需要专家的启发性知识外还需要涉及力学和计算数学学科的深层知识；专家系统中知识的表示方法和已有的有限元方法中的数据表示方法、CAD 系统的造型系统中模型的表示方法三者之间差异很大；由于这些困难，这方面的研究工作将需要艰苦的努力。有限单元法和边界元法中的网格划分则是属于一个低层次的模型化问题。近年来，网格生成和网格优化的研究特别活跃，因为在自由边界问题、裂缝扩展问题和结构优化等问题中，介质所占据的区域在不断地变动，而在应变局部化问题中为了精确和有效地捕捉住局部化区域，这些都需要不断地重新划分网格、调整网格的密度和网格的方向以提高计算结果的精度；在有限元自适应算法（下面将做进一步介绍）中网格也应当不断地修改；在将有限元法或边界元法集成到 CAD/CAM 系统中时，网格的自动生成成为集成化的关键。传统的生成网格的影射法及其它结构化网格生成方法虽然已经得到广泛的应用并在商品化程序中得到实现，但面对形状和拓扑复杂而又不断修改的区域，非结构化的网格生成或自由网格生成方法显得更有应用前景，其中用得最多的是 Delaunay 三角化方法[41]，在二维情形可自动生成高质量的三角形网格，在三维情形可自动生成高质量的四面体网格，网格的局部密度可以得到控制。此外，在推进网阵法的基础上发展的全自动生成三角形网格的研究工作的进展有力地支持了自适应有限元方法的发展[42]。但是，将平面和曲面区域全自动地剖分成四边形单元，将任意形状和拓扑的空间区域划分成六面体的研究工作还有待深入。非结构化网格生成方法的计算效率往往低于影射法等结构化方法，因此，将结构化方法和非结构化方法结合起来的混合法也是很有前景的方法。

（6）有限元方法和边界元方法是我们对结构和固体进行力学分析的工具，为了帮助设计人员科学地和高效地改进和优化设计，需要研究结构优化。结构优化中的结构尺寸优化，旨在选择桁架杆件的截面积、平面膜结构的厚度使重量或其它目标最优。经过近二十年的努力尺寸优化的研究工作已相对成熟。近年的热点是结构形状和拓扑的优化。在结构形状优化和拓扑优化研究中首先遇到的问题是模型化问题。已有的研究表明，应当区分分析模型、优化模型和几何模型[43]，还应当解决这三个模型的接口问题。简单地采用有限单元或边界元法中的节点坐标作为设计变量不仅大大增加了设计变量和约束的数目，增加了计算工作量，而且得到的优化设计常常无法加工，计算的精度也无法保证。在形状优化研究中，近年来提出的设计单元和参数化方法等使得形状优化方法向实用化方向跨出了一大步[44]。连续介质的拓扑优化中，人们提出的一种很有前途的方法是在连续介质中引入特定形式的微观结构，采用均匀化方法将微观结构中的尺寸变量和材料的宏观力学性质联系起来，从而将连续介质的拓扑优化转化为研究得相对成熟的尺寸优化[45]。这一拓扑优化的模型化方法近年来取得了相当迅速的发展，有可能把材料优化与结构优化统一在一个框架中。

三、计算固体力学中算法的研究

算法是计算力学研究的重点。计算力学工作者不断地从计算数学中学习和移植有用的算法，如求解线性方程组和线性特征值问题的各种算法。在此同时，计算力学工作者也不断地提出新的高效算法，其中以分片插值原理为基础的有限元法和边界元法是计算力学工作者所提出的算法中最为突出的，这一方法已经被广泛地应用于温度场、电场、磁场及其它物理问题的分析中。基于瑞雷商原理的求特征值问题的子空间迭代法及里兹向量法也是由计算力学工作者提出并在其它领域中得到广泛的应用。

一般认为，线性问题的算法已经相当成熟，但实际上近年来仍然有很多重要的进展，也还有很多问题需要研究，下面我们列举出几个这样的问题。

（1）自适应有限元方法的研究。有限元法的数学理论研究表明，对于适当地构造的单元，当有限元的网格无限加密时有限单元法的解收敛到原连续介质的准确解，但是对于一个特定的网格在缺乏准确解的情况下人们无法对这一网格下得到的有限元解的精度做出可靠且实用的估计，这曾经是有限元法应用于力学问题求解时的一个障碍。最近十多年所进行的自适应有限元方法研究在近年来取得了重要的进展[42]，在求得给定网格下的有限元位移解和应力解后，可以采用应力恢复方法得到有限元节点应力的改进值，然后借助于形函数插值求得应力分布的改进估计，或称为最佳猜测应力（在某种意义上）。理论研究表示，改进前的应力解和最佳猜测应力解的差可以用来估计有限元解的误差。在不同的应力恢复方法中现在已可指出效果较好的方法，例如对于三角形或四边形的线性单元，将在节点处的应力进行平均就是很有效的应力恢复法，对于高阶单元则需要复杂的方法。当依据上列方法求得的误差估计大于我们规定的误差允许值时，我们可以根据误差预测出结构中各个区域中有限单元的合理尺寸。然后直接采用全自动的有限单元网格器重新划分网格，重新求解整个问题。上列应力恢复、误差估计和重新划分网格的过程可以重复几次，直到得到满意的有限元解为止。对于平面问题的板壳问题的静力分析，自适应有限元法已经取得很多成果，人们期待着这一方法成为商用有限元软件的一部分。在结构优化、自由边界等问题中，区域的形状在不断地修改，采用不同的网格模拟形状不同的区域会产生很不相同的误差，因此给最佳区域形状的确定带来困难，自适应的有限元分析方法将有助于得到更为可靠的算法。

（2）解析方法和数值方法的结合。现代的高速计算机的出现和高效的计算力学软件使得人们可以在一小时内求解上百万个自

由度的问题，但是追求计算效率高、内外存要求低的方法仍然是计算力学算法研究的焦点。解析方法和数值方法的结合提供了一系列的高效算法。张佑祺等提出并深入研究的有限条方法就是这样的一种半解析方法[46]，早期的有限条方法成功地用来求解具有简支端或固定端的诸如板、折板、圆柱壳扁壳和箱形梁这一类棱柱形的薄壁结构。样条有限条法改进了有限条法，更易于适应任意类型的边界和内部支承条件，能够精确地处理集中荷载，可以得到低噪音的光滑解。有限条法也已经推广到材料非线性和几何非线性问题及分层介质的分析中。边界元法在某种意义上也可以看成数值方法和解析方法结合的方法。旋转体和旋转壳在非轴对称荷载下的分析可以采用半解析法。对于具有各种更为复杂对称性的结构，钟万勰等提出了采用群论方法求解[47]，静力分析和动力分析问题均可处理，具有不同对称性的子结构并且可以组装在一起，群论方法将所求解的问题分解为若干个子问题，这些子问题的自由度大大少于原问题的自由度，因此大大地减少了求解所需时间及内存容量。

(3) 壳体结构的几个维度的尺寸相差很大[48]，壳体的有限元计算仍然有很多困难，至今还缺乏低阶的、收敛的、可靠的单元能够满足壳体分析中存在的多种不同类型的渐近性质。

在深入研究线性问题的高效求解方法的同时，计算力学算法研究的热点是非线性问题，从工程科学和其它力学领域中提出的有待解决的问题大量的是非线性问题。非线性科学和非线性问题也是当前整个自然科学研究的热点。虽然研究最一般的非线性问题的解法是非常重要的课题，但计算力学中遇到的各种非线性问题往往具有各自的特点，而不同的非线性问题往往需要不同的高效算法，因而更为实际的研究工作是针对具体的一类非线性问题提出更为有效的算法，下面我们列出这样的几个问题。

(1) 结构优化旨在为工程界提供高效、科学的算法和工具，使得设计在满足各种约束条件下实现某种目标的最优化。如果约束

函数和目标函数都是设计变量的线性函数，相应的优化问题是个线性规划，可以采用单纯形法有效地求解。但是在大多数的结构优化问题中，目标函数或约束函数是设计变量的非线性函数，相应的数学问题是一个非线性规划。非线性规划是非常重要的一类非线性问题，虽然在数学规划理论中已经进行了大量的研究，结构优化的研究工作则注意到问题的特点，吸收了工程设计中准则法的基本思想，提出了一批以序列近似规划法为核心思想的有效算法[49]。在序列近似规划法中，通过适当地选择中间变量，在初始设计点附近将原来的非线性规划用一个线性规划或较简单的、可以有效求解的非线性规划来近似，采用数学规划中各种现成的算法求解这些近似的线性或非线性规划就可以求得原问题的近似解。从该近似解出发，利用在此解点的函数及其导数值我们又可构造新的近似规划，求解之后得到原问题的近似解，这一过程可以迭代地进行下去直到求得具有足够精度的解为止。中间变量的选择依赖于所优化的结构类型及选取的力学变量的力学特征，对于桁架、平面应力、膜结构的截面尺寸优化，取杆的截面积（或膜的厚度）的倒数作设计变量可以建立精度很高的近似约束，因此上列序列近似规划算法的效率很高，只须十次左右迭代就可达到工程设计所需精度。钱令希教授等[50]提出并广泛采用的序列二次规划也是一种序列近似规划，以序列二次规划为基本算法，结合局部约束局部处理、变量联结及主动约束集策略，发展了一套十分有效的结构优化算法和相应的结构优化软件，应用于工程优化设计[51]。

利用能量原理，很多非线性力学问题分析可以归结为非线性规划。弹塑性接触问题、材料满足非关联流动法则的弹塑性分析问题都可归结为参变量二次规划[52]。运用数学规划工具可以很有成效地求解一大类问题。

（2）计算塑性的一个主要课题是为各种塑性本构速率方程的求积发展可靠有效的算法。在过去十年中人们已普遍认识到在发展这类算法时必须注意如下因素：本构关系中各种公式的含义，具

需要全本请访问 www.ertongbook.com