高等学校教材

固体接触力学

西南交通大学　孔祥安　江晓禹　金学松　编
西南交通大学　　孙训方　　主审

中国铁道出版社
1999年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书主要介绍在平面和空间情况下的无摩擦接触理论、摩擦接触理论、材料非线性接触理论等。对于了解接触问题的数学模型的建立、基本假设、求解方法，以及所涉及到的特殊数学知识和一些工程上的应用也作了介绍。同时还介绍了弹性体滚动接触理论和轮轨接触、接触问题的变分原理和数值方法、接触问题解存在的唯一性等内容。

本书可作为高等学校力学(固体力学、工程力学、结构力学、土力学)、机械工程、机车车辆、土木工程等专业的高年级教材，也可作为相关专业的研究生教材和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

固体接触力学/孔祥安等编. —北京：中国铁道出版社，1999
高等学校教材

ISBN 7-113-03202-8

Ⅰ.固… Ⅱ.孔… Ⅲ.接触应力-高等学校-教材 Ⅳ.0343.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40055 号

书　　名：高等学校教材　**固体接触力学**
著作责任者：孔祥安　江晓禹　金学松
出版·发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：刘桂华
封面设计：马　利
印　　刷：北京彩桥印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　印张：10.5　字数：256 千
版　　本：1999 年 5 月第 1 版　　1999 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1—1000 册
书　　号：ISBN7-113-03202-8/O·63
定　　价：13.00 元

版权所有　盗印必究
凡购买铁道版的图书，如有缺页、倒页、脱页者，请与本社发行部调换。

前　言

固体接触力学，研究的是可变形固体相互接触时在接触区的作用状况，位移、应变和应力，以及由此引起的强度分析方面的问题。本书是编者在多年的教学经验的基础上编写成的，可作为高等学校力学、机械工程、机车车辆、土木工程等专业的高年级教材，相关专业的研究生教材和工程技术人员的参考书。不言而喻，接触力学对于这些学科是至关重要的，因为这些学科要面对现代科学技术提出的高载荷、高精度、高可靠性、恶劣工作条件、轻质与高强度等结构、材料和控制方面的要求。铁路有关专业对接触力学还有更迫切的要求，例如，轮轨间接触作用力是联系车辆和轨道的中心环节，起着传递牵引和制动力，导向和控制速度的重要作用。这些都表明，必须培养学生系统地掌握这些领域所涉及的现代接触力学和解决实际工程问题的能力。

本书共分 9 章，前 6 章着重介绍平面和空间情况下的无摩擦接触理论、摩擦接触理论、材料非线性接触理论等内容，包含了接触问题的基本假设、数学模型的建立、求解方法，以及所涉及到的特殊数学知识，也涉及到一些工程应用。后 3 章介绍了弹性体滚动接触理论和轮轨接触、接触问题的变分原理和数值方法、接触问题解的存在唯一性等内容，供进一步学习之用。全书约需 80 学时，其中前 6 章需 60 学时。

本书第 1、2、3、6、8 章为孔祥安执笔（其中研究生张焱完成了第 8 章部分内容的初稿），第 4、5、9 章为江晓禹执笔，第 7 章为金学松执笔。江晓禹绘制了大部分插图。全书最后由孔祥安统稿。。

限于作者水平，对书中不妥之处，祈望读者指正。

编　者

1998 年 9 月

于西南交通大学

目　录

第一章　绪　论 …… 1
1.1　接触现象和接触力学 …… 1
1.2　接触力学的研究方法 …… 2
1.3　本课程的主要内容 …… 4
第二章　线弹性体无摩擦点接触理论 …… 5
2.1　平面问题 …… 5
2.1.1　弹性力学平面问题的基本理论 …… 5
2.1.2　弹性半平面在边界上受法向集中载荷和分布载荷 …… 7
2.1.3　弹性半平面在边界上受切向集中载荷和分布载荷 …… 12
2.2　空间问题 …… 14
2.2.1　一般情况 …… 14
2.2.2　半空间在表面受法向力 …… 17
2.2.3　半空间在表面受切向集中力 …… 20
第三章　无限大线弹性体无摩擦接触理论 — Hertz 理论 …… 22
3.1　Hertz 理论的基本假设 …… 22
3.2　曲面在一点附近的性质 …… 22
3.3　两弹性体相接触的一般情况 …… 24
3.4　两弹性球体相接触 …… 27
3.5　两弹性圆柱体的接触 …… 28
3.6　接触区为圆形的一般情况 …… 30
第四章　位移控制的弹性体接触 …… 32
4.1　引　言 …… 32
4.2　平面压模问题 …… 32
4.2.1　平头压模竖直压入弹性半平面 …… 32
4.2.2　平头压模倾斜压入弹性半平面 …… 34
4.2.3　圆头压模竖直压入弹性半平面 …… 35
4.2.4　一般外形的平面压头 …… 36
4.3　空间压模问题 …… 37
4.3.1　圆柱形压模竖直压入弹性半空间 …… 37
4.3.2　球形压模压入弹性半空间 …… 40
4.3.3　某些其它的空间接触问题及解答 …… 41
第五章　弹性体的摩擦接触 …… 44
5.1　引　言 …… 44
5.2　半平面的完全粘着接触 …… 44

5.2.1 半平面接触的积分方程 …… 45
5.2.2 平面接触的复变函数方程组 …… 46
5.2.3 复变函数方程组的求解 …… 46
5.2.4 平头压模竖直压入半平面 …… 48
5.2.5 圆头压模竖直压入半平面 …… 49
5.3 极限摩擦下的平面接触 …… 51
5.4 有限摩擦下的平面接触 …… 53
第六章 弹塑性接触 …… 57
6.1 屈服判据 …… 57
6.1.1 Von-Mises 判据 …… 57
6.1.2 Tresca 判据 …… 58
6.1.3 最大偏应力判据 …… 58
6.2 弹性体接触的屈服点和屈服载荷 …… 58
6.3 弹塑性半空间的接触问题 …… 59
6.3.1 滑移线理论 …… 59
6.3.2 刚塑性半空间的无摩擦接触 …… 62
6.3.3 刚塑性半空间的摩擦接触 …… 64
6.4 考虑内摩擦的弹塑性半空间的接触问题 …… 67
6.4.1 考虑内摩擦的滑移线理论 …… 67
6.4.2 地基的无摩擦承载 …… 69
6.4.3 地基的摩擦承载 …… 71
第七章 滚动接触 …… 75
7.1 一般滚动接触问题的接触边界描述 …… 75
7.1.1 滚动接触物体的刚性运动和参考系的选择 …… 75
7.1.2 接触形成的边界条件 …… 76
7.2 二维滚动接触问题的解析解 …… 80
7.3 无自旋三维滚动接触问题的解析解 …… 84
7.3.1 弹性球滚动接触 …… 84
7.3.2 椭圆接触斑的三维滚动接触 …… 87
7.4 三维 Hertz 滚动接触的级数解 …… 93
7.4.1 引理和问题的提出 …… 94
7.4.2 关于 $E_{mn}^{h;pq}$ 的性质和计算 …… 97
7.4.3 具有 Hertz 压力情形的级数解 …… 102
7.4.4 负荷——位移方程系数应用例子 …… 105
7.4.5 三维滚动接触问题级数解的应用例子 …… 108
7.5 三维 Hertz 滚动接触的一种快速数值求解方法 …… 115
7.6 小自旋情形下三维非线性蠕滑率/力计算模型 …… 120
第八章 接触问题的变分原理和数值方法 …… 124
8.1 弹性接触的边界元柔度矩阵法 …… 124
8.1.1 边界元柔度方程组 …… 124

8.1.2 接触和摩擦本构关系 …… 125
8.1.3 参数线性互补规划问题 …… 126
8.1.4 全局特性 …… 128
8.2 弹塑性接触的边界元柔度矩阵法 …… 128
8.2.1 塑性流动和强化规则的数学规划表达 …… 128
8.2.2 边界元柔度矩阵 …… 130
8.2.3 屈服矩阵的显式表达 …… 134
8.3 罚函数法 …… 137
8.4 Lagrange 方法 …… 137
8.5 增广 Lagrange 方法 …… 138
8.5.1 摩擦接触的增广 Lagrange 方法 …… 138
8.5.2 含非线性本构方程的接触问题的增广 Lagrange 方法 …… 139
8.5.3 大滑动接触问题的增广 Lagrange 方法 …… 140
8.5.4 热力学接触问题的增广 Lagrange 方法 …… 141
8.6 摄动 Lagrange 法 …… 142
8.7 数学规划法 …… 143
8.8 边界变分法 …… 144
第九章 接触问题解的存在唯一性 …… 146
9.1 接触系统定义 …… 146
9.2 接触系统解答的势能最小 …… 147
9.3 接触系统解答的余能最大 …… 148
9.4 接触系统解答的唯一性 …… 149
附 录 …… 152
附录 1 与第二章有关的弹性力学基本方程 …… 152
附录 2 与第四章有关的 Chebyshev 多项式 …… 152
附录 3 第五章涉及的复变函数的基本知识 …… 155
附录 4 第八章涉及到的二次规划问题 …… 157

第一章 绪 论

1.1 接触现象和接触力学

现代意义的接触力学，可以追溯到1882年。这一年，接触力学的先驱Hertz在一家德文杂志发表了具有开创性的论文“论弹性固体的接触”[1]。

然而，一百多年来，接触力学最初的发展是缓慢的。自Hertz的第一篇论文发表以来，直到20世纪初，才有较多的接触力学方面的文献问世。这其中的原因，除生产和技术发展水平的制约外，更多的是受实验和计算手段的限制。促使人们对接触现象进行研究的经典领域主要有：火车轮轨接触，机车牵引动力和制动力的传递；各种动力机械中齿轮的运动和动力传递；滚动轴承的受力分析。

到了近代，现代工业不但对传统的动力传输构件的接触力学分析的精度和可靠性提出了更高的要求，还将研究领域扩大到诸如计算机磁头、微电子开关、功能复合材料界面强度等方面。

实际上，凡是有机械部分的工业设备中，几乎无一例外地存在固体的接触现象，需要用接触力学的方法加以研究。非但如此，在压力加工、材料成型工艺、摩阻材料等相关工业部门中，在用计算机辅助设计的方法进行与材料和结构有关的设计、加工、控制等过程中，接触力学的因素也逐渐成为人们应该考虑的重要内容。这就是说，接触力学作为跨学科研究的一部分，也日益显示出其重要性。

一般说来，所谓接触力学，是指研究可变形固体相互接触时在接触区的相互作用状况，所产生的位移、应变和应力，以及由此引起的强度分析方面问题的力学。

接触力学对于高等院校的力学、土木、机械等专业是至关重要的。这些学科，要面对现代科学技术提出的高载荷、高精度、高可靠性、恶劣工作条件、轻质与高强度等结构、材料和控制方面的要求，必须培养学生掌握这些领域所涉及的现代接触力学和解决实际工程问题的能力。

铁路有关专业对接触力学还有更迫切的要求。例如，轮轨间接触作用力是联系走行部分和轨道的中心环节，起着传递牵引和制动力，导向和控制速度的重要作用。电气化铁路所用的接触网材料必须在接触疲劳载荷下具有高疲劳寿命。快速和高速列车端部的结构和材料在碰撞冲击事故中应具有在接触变形过程中吸收大部分冲击能量的能力。这些都是与中国铁路21世纪长远发展目标中提速、高速、重载、安全可靠性和新型材料直接有关的。因此，向学生传授系统的而不是零散的、多学科交叉的而不是单学科的、现代的而不只是古典的接触力学知识，更是铁路有关专业的当务之急。

有关接触力学文献方面的现状是：

1. 散见于理论力学、弹性力学、机械设计和车辆动力学等课程中一些接触和接触力学的内容，只是零星的和最经典的。主要是刚体接触和半无限大弹性体的无摩擦接触(或称Hertz接触)。长期以来，人们之所以沿用古典的Hertz理论来处理复杂的工程问题，固然体现了该理论的奠基作用，同时也反映了由于缺乏实验和数值模拟手段而不得不把非线性问题作为线性，有限几何尺寸简化为无限大，动力问题处理为静态的现实。近年来，随着现代实验和计算科学的

迅速发展，古老的接触力学已经摆脱困境，走向突破。这表现在复杂本构关系的引入，有限元等数值方法的使用和摩擦学、材料学科间的渗透等。

2. 在 Hertz 有关接触力学的第一篇著作后的 100 年里，人们主要是在 Hertz 理论的基础上工作。20 世纪 40 年代，Muskhelishvili 在弹性体接触力学的数学理论方面有突出贡献[2,3]。1953 年，Galin 的“弹性理论中的接触问题”一书[4]总结了 Muskhelishvili 的工作。Gladwell 于 1980 年出版的著作“弹性力学经典理论中的接触问题”[5]主要考虑集中的或大范围的无摩擦接触或粘着接触。有关百年来接触力学理论成果的最完整的总结，是 1985 年 Johnson 的著作“接触力学”[6]。这本书也涉及一些弹塑性体和粘弹性体接触的内容。1988 年 Kikuchi 和 Oden 的“弹性体接触问题：变分不等式研究和有限元法”一书[7]是早期关于接触问题数值计算理论和方法的总结。1990 年 Kalker 的“三维弹性体的滚动接触”[8]是主要以铁路轮轨接触界面作用力为背景的有关滚动接触的专著。该书的主要成就，是总结和发展了适于工程应用的弹性体滚动接触的界面作用力及其时间变化率的各种简化表达式，以及相应的数值方法。应当指出，按照教材的要求，上述这些著作在既系统介绍理论基础，又反映当代接触力学全貌方面均显不足。

3. 最直接反映当代接触力学现状和发展动向的，是科技会议和杂志中的文献。除传统的强度分析外，这些文献可大致分为 4 类：接触力学的解析方法，接触力学的变分原理和数值方法，接触载荷下力的传递方式以及材料和结构的破坏机理和寿命预测，接触力学在新材料、新技术方面的应用。

1.2 接触力学的研究方法

按照接触区相对大小划分，接触现象可分为两类：非共形接触和共形接触。

所谓非共形接触，或称集中接触，是指两接触体的表面最初在一个点或一条线首先接触；在加载过程中逐渐产生一“接触区”，它的大小相对于两接触体的任何局部尺寸来说都一直保持为很小。在这种情况下，该接触区会产生局部的应力集中，并可与两接触基体中的应力状态分开进行单独研究。这方面的例子，可以举出两个弹性球体的接触、火车轮轨的非轮缘接触、齿轮的齿面接触等。如图 1－1 所示。

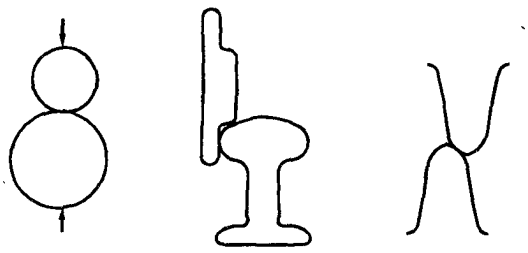


图 1－1 非共形接触

而共形接触则是指没有明显接触区的情况。如果说有的话，这一所谓的“接触区”的面积与两接触体的某一特征尺寸相比也是同数量级的。因而不可能单独对接触表面的应力进行研究，而必须与“基体”的应力分析一起作。垫圈配合、冲头冲压、压力加工、螺钉与螺母配合都是共形接触的例子。如图 1－2 所示。

非共形接触和共形接触的研究方法是不同的。共形接触实际上不是专门意义上的接触力学的研究内容。非共形接触由于有接触区，是接触力学研究的重点。

首先，非共形接触的接触区如果特别小，则作为理想情况可以视为一个点。对于这种“点接触”，只分析一个无限大的物体受点载荷，忽略另一物体是可行的。这就是弹性力学教科书中一般都会介绍的无限大弹性半空间或半平面边界上受集中力的情况。这时往往可以得到解析解。再由迭加原理，弹性半空间或半平面的无摩擦接触问题一般可以得到满意的解答。

几何形状规则的弹性体的无摩擦非共形接触问题的最完美的解析解当然是 Hertz 解。Hertz 解实际上是用半逆解法得到的。Hertz 正确地假定了两弹性球体的圆形接触面上正压力分布，得到满足所有定解条件的解答，并推广到表面光滑的两弹性体接触的一般情况。这时，在一定的简化条件下，接触面呈椭圆形。

工程中大量使用的 Hertz 解是一百多年前的结果。有时事先假设一个 Hertz 型正应力分布作用于要研究的物体上，从而只对一个物体进行研究，使问题得到简化。以 Hertz 理论为基础分析轮轨接触的 Kalker 的“简化理论”，更进一步把接触的本构关系简化为 $u=Lp$。这里 u、p 分别是表面点的位移和面力，L 称为柔度系数(无论在接触面任何点都取为常数)。即一点的位移只与本点载荷有关。在工程上，有时还得用这种看似过于简化的方法，如图 1－3 所示。

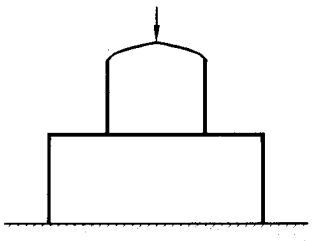


图 1－2　共形接触

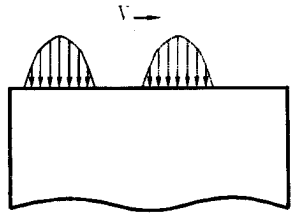


图 1－3　滚动接触中 Hertz 理论的应用

接触现象发生在两物体接触表面，当然就会有摩擦力。Hertz 理论是不考虑摩擦力的。考虑摩擦力的接触力学的研究要复杂得多，同时也使其水平上升到一个新的台阶。通常使用的摩擦定律是 Coulomb 定律，即 $F_{max}=\mu P$，这里 P 是正压力，F 是摩擦力，F_{max}是滑动时的摩擦力，μ 称为摩擦系数。摩擦系数与接触表面的几何、物理、化学和温度条件有关，一般由实验测定，且取为常数。图 1－4 所示为一典型的正压力和摩擦力的关系，中心部分是粘着区。

我们看到，Coulomb 摩擦力的计算也是局部的，即一点的摩擦力只与该点的正压力有关。

摩擦力当然和正压力有关。反过来原则上正压力大小也要受摩擦力影响。但在一般情况下，这一影响是很小的。因而仍然在很大程度上可以先用 Hertz 理论算出正压力，再由 Coulomb 摩擦定律求得摩擦力。

如果要考虑正压力受摩擦力的影响，问题就要复杂得多。即使对于半无限大体这样的简单情况，也难于得到解析解。

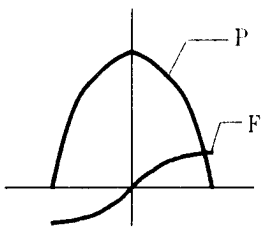


图 1－4　正压力和 Coulomb 摩擦力

在需要精确确定接触区及其应力状态时，必须使用有限差分、有限元或边界元等数值方法。这时，不必对几何形状作任何假设，可以完全按真实工况作计算。需要简化的，只在数值方法本身的技术处理上。使用数值方法时，接触问题的研究有三个非线性：

1. 接触边界条件的非线性。表现在接触区的范围事先未知，接触过程中可能变化。有摩擦情况下的接触状态(粘着、滑动)还待求。

2. 材料非线性。这一般来自应力集中产生的局部塑性变形。

3. 几何非线性。在应力集中情况下往往出现局部大变形。

即使只考虑其中一、两个非线性，接触力学的数值计算都要比相应的单体计算复杂得多。也就是在这些方面，接触问题的研究找到了与现代计算工程科学的很好的结合点。

当然，用数值方法研究共形接触，相对而言要简单一些。

如果摩擦状态不能用 Coulomb 的局部摩擦定律描述，则是非局部摩擦接触研究的内容。

由于接触边界条件的非线性和摩擦的存在，接触力学的变分原理也有其自身的特点。

1.3 本课程的主要内容

第一，介绍线弹性体无摩擦点接触理论，分平面问题和空间问题。

第二，介绍无限大弹性体无摩擦接触理论，即 Hertz 理论。首先讲述 Hertz 理论的基本假设，然后介绍球体、椭球体和一般旋转体的弹性接触，再推广到一般几何形状。对于在某一个方向上的恒等线载荷之类的情况，退化为二维问题。

第三，是位移控制的弹性体无摩擦接触问题，涉及到平面压模问题和空间压模问题。介绍了平头压模、圆头压模，以及一般外形压模竖直或倾斜压入弹性半平面和弹性半空间等接触问题及其求解方法。

第四，论述弹性体的摩擦接触问题。主要是介绍完全粘着的接触、极限摩擦接触和有限摩擦接触等问题。着重介绍了用复变函数求解这类摩擦接触问题的基本方法。

第五，论述材料非线性接触问题，主要是弹塑性接触。用特征线理论研究接触条件下的塑性区扩展规律，也涉及到一些工程的应用。

第六，是弹性体滚动接触理论和轮轨接触。首先建立滚动接触的几何模型，引入蠕滑率、自旋等概念。然后介绍滚动接触的边界条件、无滑动理论、非线性和有限摩擦滚动接触。最后将轮轨接触作为专题介绍。

第七，以接触问题的变分原理和数值方法为内容。在介绍各类变分原理之后，重点是工程上常用的有限元和边界元等数值方法。

第八，介绍了接触问题解的存在唯一性。

参 考 文 献

1 Hertz, H., Uber die berührung fester elastischer körper (论弹性固体的接触), J. Reine und Angewandte Mathematik, 92, 156-171, 1882

2 Muskhelishvili, V. I., Singular integral equations, Moscow, 1946

3 Muskhelishvili, V. I., The fundamental general problem of the theory of elasticity, 3rd Edition, Moscow, 1949

4 Galin, L. A., Contact problem in the theory of elasticity, Moscow, 1953

5 Gladwell, G. M. L., Contact problems in the classical theory of elasticity, Alphen ann den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980

6 Johnson, K. L., Contact mechanics, Cambridge University Press, 1985

7 Kikuchi, N. and Oden, J. T., Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1988

8 Kalker, J. J., Three-dimensional elastic bodies in rolling contact, Kluwer Academic Publishers, Netherland, 1990

第二章　线弹性体无摩擦点接触理论

2.1　平面问题

任何一个实际的弹性体都是空间物体，即有三维尺度。其所受的外力系一般也是空间力系。因此严格说来，弹性接触问题都是空间问题。但是，从弹性力学理论我们知道，如果弹性体的三个空间尺度具有数量级上的某种关系，比如一个方向比其它两个方向大(或小)许多，而且体力和承受的外载在这个方向上也是均匀的，那么就可以简化为平面问题[1]。接触问题也是一样的，有时人们所称的“半共形接触”，即旋转体接触时接触区的短轴很小而长轴很大的一类接触，就是这种情况。具体例子有：两个轴线平行的圆柱体的接触，无润滑滚柱轴承中的接触。当然，这里也可以划分出平面应力接触问题和平面应变接触问题。为了引用公式的方便，下面我们先来回顾一下弹性力学平面问题的基本理论。

2.1.1　弹性力学平面问题的基本理论

根据连续介质力学理论，应力和应变都是二阶张量。以下我们以 σ 记应力张量，以 ε 记应变张量。其分量表示为 σ_{ij} 和 ε_{ij}，即 σ 和 ε 在某一以 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为基底的直角坐标系的矩阵表达为

$$\left.\begin{aligned}[\sigma]_{(e_1,e_2,e_3)}=[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\\ [\varepsilon]_{(e_1,e_2,e_3)}=[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

对平面问题，公式(2－1)中的 e_3 和含下标 z 的分量将不出现。

以下在不致引起混淆时，我们将略去公式(2－1)中的下标 $\{e_1, e_2, e_3\}$。

1. 平衡微分方程

图 2－1 是空间问题建立平衡微分方程常用的图。对平面应力问题，坐标平面 xy 代表薄板。对平面应变问题，它代表长柱体的一个截面。

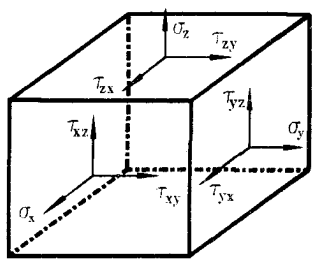


图 2－1　微元体和应力分量

首先由力矩的平衡得到剪应力互等的关系

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2-2}$$

由力的平衡就得到平面问题的平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=0 \tag{2-3}$$

这里采用 Einstein 求和约定，下标中的逗号表示对其后下标求导数，重复的下标表示求和。ρ

是质量密度，b_i 为 i 方向单位质量的体力。或写为显式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\rho X=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\rho Y=0\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

这里我们已不再区分 τ_{xy} 和 τ_{yx}。

2. 几何方程

计点在 x、y 方向的位移是 u 和 v，正应变为 ε_x 和 ε_y，剪应变为 γ_{xy}，可以得到平面问题的小变形下的几何方程

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

注意，平衡方程和几何方程都是和材料性质无关的。

3. 物理方程

平面应力问题中，各向同性线弹性材料的物理方程是

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

E、ν 是弹性模量和泊松比。对平面应变问题，公式(2－6)中的 E 和 ν 应分别换为 $E/(1-\nu^2)$ 和 $\nu/(1-\nu)$。

有时物理方程又称本构方程。

4. 边界条件

边界条件有位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件三种类型。

位移边界条件是指在物体的全部边界上点的位移已知

$$u=\bar{u},v=\bar{v} \tag{2-7}$$

$\bar{u}$、$\bar{v}$ 是边界上点的坐标的已知函数或常数。

应力边界条件是指作用在物体全部边界上的点的面力已知。由边界上微元的平衡条件(图 2－2)，可以得到联系边界点的应力分量与面力分量的应力边界条件的表达式

$$\sigma n=\bar{F} \tag{2-8}$$

这里 $\boldsymbol{n}=(l,\ m)$ 是微元斜边外法向单位矢量，$F=(\bar{X},\bar{Y})$ 是作用于斜边上的面力密度。公式(2－8)的显式是

$$\left.\begin{aligned}l\sigma_x+m\tau_{xy}=\bar{X}\\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=\bar{Y}\end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

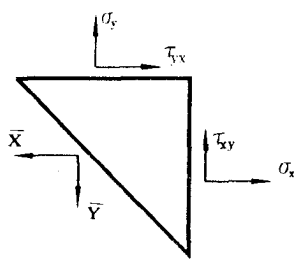


图 2－2　应力边界条件

5. 相容方程

按应力求解弹性力学问题时，为保证应变的连续性，各应变分量间必须满足一定的关系。

这些关系由几何方程导出，称为相容方程或变形协调方程。平面问题的相容方程只有一个

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{2-10}$$

如果按应力分量写出，则在平面应力问题中相容方程是

$$\nabla^2 \sigma_{ii}=-(1+\nu)\rho b_{i,i} \tag{2-11}$$

对平面应变问题，则为

$$\nabla^2 \sigma_{ii}=-\frac{1}{1-\nu}\rho b_{i,i} \tag{2-12}$$

这里∇^2是 Laplace 算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2-13}$$

下面我们介绍按应力求解平面问题的应力函数。

在常体力情况下，平面应力和平面应变的相容方程都化为 Laplace 方程

$$\nabla^2 \sigma_{ii}=0 \tag{2-14}$$

按应力求解时可引入应力函数φ，使得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\rho X x, \sigma_y=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\rho Y y, \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tag{2-15}$$

公式(2－15)的应力表达使平衡微分方程式(2－3)自动满足。为了满足相容方程式(2－14)，应力函数φ必须满足双调和方程

$$\nabla^4 \varphi=0 \tag{2-16}$$

于是按应力求解应力边界问题时，如果体力是常量，原则上就可以先从公式(2－16)求得应力函数φ，然后由公式(2－15)得应力分量。当然这些应力分量在边界上还要满足应力边界条件。这一点往往是在逆解法或半逆解法中假定应力函数φ的依据。

对于半平面边界上受集中力的问题，通常要在极坐标(r,θ)下来求解。这里我们给出有关方程。

算子∇^2

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{2-17}$$

由应力函数表达的应力分量(不计体力)

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \sigma_\theta=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \tag{2-18}$$

2.1.2 弹性半平面在边界上受法向集中载荷和分布载荷

我们用极坐标求解图 2－3 所示的均匀、各向同性的弹性半平面在边界上受法向集中力的问题。对于平面应力问题，它表示沿单位厚度的薄板的厚度方向作用有均布力P。对于平面应变问题，P则是作用于与坐标面垂直的无限大平面上的均布线载荷。

在边界上，除o点附近显然有应力集中外，其它点的应力分量σ_θ和$\tau_{r\theta}$都为零。受此启发，并由对称性，可以试探如下的应力状态

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-k\frac{\cos\theta}{r}\\ \sigma_\theta&=0\\ \tau_{r\theta}&=\tau_{\theta r}=0\end{aligned}\right\} \tag{2-19}$$

σ_r 与 r 成反比，考虑到了应力随距 o 点的距离而迅速衰减的性质。这也就满足了无限远处应力为零的边界条件。为了确定式(2－19)中系数 k 的值，可以取出一个以 o 点为圆心的半圆形隔离体(图 2－3 中 $ABCA$)，然后由 x 方向力的平衡，有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos\theta r \mathrm{d}\theta + P = 0 \qquad (2-20)$$

于是

$$k = \frac{2P}{\pi} \qquad (2-21)$$

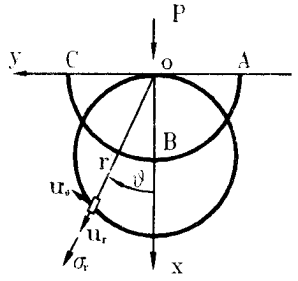


图 2－3　弹性半平面边界上受法向集中力

现在还需要验证这样得到的应力状态是否满足平衡方程和相容方程。按照上一小节的讨论，只需找到一个满足双调和方程式(2－16)的应力函数 φ 即可。将式(2－19)代入式(2－18)，得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -k\frac{\cos\theta}{r} \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-22)$$

由式(2－22)中后两式可得

$$\varphi = rf(\theta)$$

代入式(2－22)中第一式，得以 θ 为变量的二阶常微分方程

$$f''(\theta) + f(\theta) = -k\cos\theta \qquad (2-23)$$

其解为

$$\varphi = -\frac{k}{2} r\theta\sin\theta + A r\cos\theta + B r\sin\theta$$

其中右边后两项是坐标 x 和 y 的一次函数，对应力分量没有贡献，故略去。于是

$$\varphi = -\frac{k}{2} r\theta\sin\theta \qquad (2-24)$$

容易验证，由式(2－24)给出的应力函数 φ 确实满足双调和方程式(2－16)。这样，我们就得到了弹性半平面在边界上受法向集中载荷的解

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r} \\ &\sigma_\theta = 0 \\ &\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-25)$$

注意到在与集中力作用点 o 相切的、直径为 d 的圆周上的所有点都有

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{d}$$

于是我们得到一个结论：在与集中力作用点 o 相切的圆周上的点，σ_r 是常量

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d} \qquad (2-26)$$

具有这样性质的圆称为等应力圆或 Bousinesq 圆。由于 $\tau_{r\theta} = 0$，等应力圆也是主应力 σ_r 的迹线。另一个主应力 $\sigma_\theta = 0$。图 2－4 绘出了主应力迹线。最大剪应力 $\tau_1 = \sigma_r/2$，其迹线也是过集

中力作用点 o 与半无限平面边界相切的圆族。

图 2－5 给出了在对称轴和以 o 点为圆心的圆周上 σ_r 的分布。

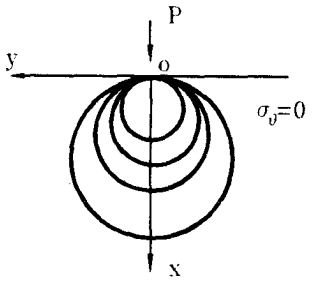


图 2－4　主应力迹线

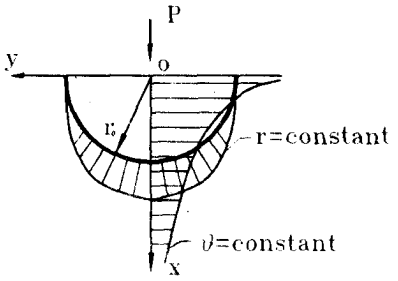


图 2－5　σ_r 的分布

值得指出的是，上面的解答对于集中力作用点附近并不适用。然而，由弹性力学中的 Saint-Venant 原理，其影响也只是局部的。

由式(2－25)和(f1－4)得到应力的直角坐标分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2P}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\\ \sigma_y&=-\frac{2P}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \tau_{xy}&=-\frac{2P}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2-27)$$

在与半无限平面边界平行的直线上，这些应力分量的分布示于图 2－6。

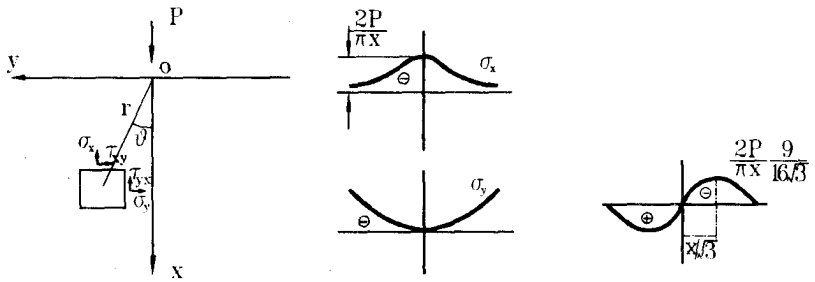


图 2－6　x 为常数的直线上的应力分布

还需注意，上面求得的应力表达均与材料的物理性质无关，因此适用于所有材料。不过对于平面应变状态，在与坐标平面垂直方向上的正应力(σ_z)和材料的泊松比有关。

下面我们来求出位移。对于平面应力情况，将式(2－25)代入极坐标下的物理方程式(f1－3)，得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{-2P\cos\theta}{\pi E}\frac{}{r}\\ \varepsilon_\theta&=\frac{2\nu P\cos\theta}{\pi E}\frac{}{r}\\ \gamma_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(2-28)$$

再由几何方程式(f1－2)，求得以下积分表达式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r}&=\frac{-2P\cos\theta}{\pi E}\frac{}{r}\\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}&=\frac{2\nu P\cos\theta}{\pi E r}-u_r\\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}&=0\end{aligned}\right\}\tag{2-29}$$

将头两式积分，代入第三式，分离变量后求得

$$u_r=-\frac{2P}{\pi E}\cos\theta\ln r-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\sin\theta+A\cos\theta+B\sin\theta \tag{2-30a}$$

$$u_\theta=\frac{2P}{\pi E}\sin\theta\ln r+\frac{(1+\nu)P}{\pi E}\sin\theta-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\cos\theta+Cr-A\sin\theta+B\cos\theta \tag{2-30b}$$

其中 A、B、C 是积分常数。

由问题的对称性，在 x 轴($\theta=0$)上 $u_\theta=0$，于是 $B=0$，$C=0$，从而

$$\left.\begin{aligned}u_r&=-\frac{2P}{\pi E}\cos\theta\ln r-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\sin\theta+A\cos\theta\\ u_\theta&=\frac{2P}{\pi E}\sin\theta\ln r+\frac{(1+\nu)P}{\pi E}\sin\theta-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\cos\theta-A\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{2-31}$$

为了弄清常数 A 的意义，我们从式(2-31)中通过坐标变换

$$u=u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta,\ v=u_r\sin\theta+u_\theta\cos\theta \tag{2-32}$$

得出位移的直角坐标分量

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{P}{\pi E}\ln(x^2+y^2)-\frac{(1+\nu)P}{\pi E}\frac{y^2}{x^2+y^2}+A\\ v&=-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{(1+\nu)P}{\pi E}\frac{xy}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}\tag{2-33}$$

由此可见，常数 A 具有竖向(x)位移 u 的几何意义。因此，只有当给出半平面在竖向所受的约束，才能确定常数 A。否则，位移表达式中总要包含竖向刚体位移 A。

有时需要研究边界的沉陷，即边界点在竖向的位移。由式(2-33)求得这一位移为

$$u|_{x=0}=-\frac{2P}{\pi E}\ln|y|-\frac{(1+\nu)P}{\pi E}+A \tag{2-34}$$

如果常数 A 未知，只能求得所谓“相对沉陷”。如图 2-7 所示，在边界上取一个参考点 M，其 y 坐标值为 y_0，则边界上点 N(坐标为 y)相对于参考点 M 的沉陷 δ 等于 M 点的沉陷减去 N 点的沉陷

$$\delta=\frac{2P}{\pi E}\ln\frac{y_0}{y} \tag{2-35}$$

如前所述，对于平面应变问题，须将弹性常数 E 和 ν 分别换为 $E/(1-\nu^2)$ 和 $\nu/(1-\nu)$。

由于线弹性小变形理论的平衡微分方程、几何方程和物理方程都是线性的，根据微分方程理论，可以用迭加原理，将以上弹性半平面在边界上受法向集中载荷的结果加以积分，得出弹性半平面在边界上受法向分布载荷的解答。

设若半平面边界上 AB 区段上作用有法向分布力，其分布为 $p(y)$，点 A 和 B 的坐标分别为 y_1 和 y_2。见图 2-8。

我们来求出半平面上任一点 $M(x,y)$的应力。为了利用集中力作用下的结果，建立一局部坐标系 ξ。取 AB 段中坐标为 ξ 处的微分载荷 $\mathrm{d}P=p(\xi)\mathrm{d}\xi$，则由式(2-27)，先求出该微分载荷在点 M 处应力的贡献，然后在区间$[y_1,\ y_2]$上对 ξ 积分，就得出全部分布力所产生的应力。

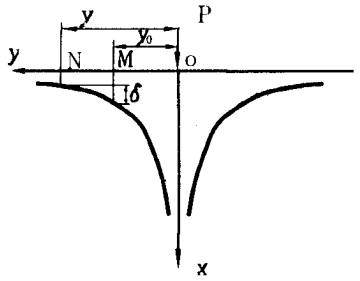


图 2—7　边界点的沉陷

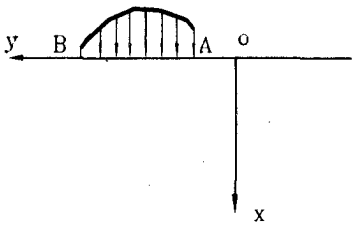


图 2—8　半平面在边界上受法向分布力

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{x^3}{[x^2+(y-\xi)^2]^2}p(\xi)\mathrm{d}\xi\\ \sigma_y&=-\frac{2}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{x(y-\xi)^2}{[x^2+(y-\xi)^2]^2}p(\xi)\mathrm{d}\xi\\ \tau_{xy}&=-\frac{2}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{x^2(y-\xi)}{[x^2+(y-\xi)^2]^2}p(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\}\tag{2—36}$$

用同样的方式，由式(2—33)给出 M 点的位移

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{1}{\pi E}\int_{y_1}^{y_2}\left\{\ln[x^2+(y-\xi)^2]+\frac{(1+\nu)(y-\xi)^2}{x^2+(y-\xi)^2}\right\}p(\xi)\mathrm{d}\xi+A'\\ v&=\frac{1}{\pi E}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{(1+\nu)x(y-\xi)}{x^2+(y-\xi)^2}-(1-\nu)\arctan\left(\frac{y-\xi}{x}\right)\right]p(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\}\tag{2—37}$$

取 $x=0$ 得表面位移

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{1}{\pi E}\int_{y_1}^{y_2}\ln(y-\xi)^2p(\xi)\mathrm{d}\xi+A''\\ v&=\frac{-(1-\nu)}{2E}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{sgn}(y-\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\}\tag{2—38}$$

其中 sgn()是符号函数。若点 M 在 A,B 之间，

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{1}{\pi E}\int_{y_1}^{y_2}\ln(y-\xi)^2p(\xi)\mathrm{d}\xi+A''\\ v&=\frac{-(1-\nu)}{2E}\left(\int_{y_1}^{y}p(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{y}^{y_2}p(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\end{aligned}\right\}\tag{2—39}$$

下面我们来考虑法向分布载荷 $p(y)$ 为均布载荷 p_0 的情况(图 2—9)。首先由式(2—25)和(*f*1—4)，可得等价于式(2—36)的表达式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{-1}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{r}\cos\theta(1+\cos2\theta)p(\xi)\mathrm{d}\xi\\ \sigma_y&=\frac{-1}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{r}\cos\theta(1-\cos2\theta)p(\xi)\mathrm{d}\xi\\ \tau_{xy}&=\frac{-1}{\pi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{r}\cos\theta\sin2\theta p(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\}\tag{2—40}$$

再由几何关系