第 1 章

美索不达米亚的数学

逻辑可以等待，因为它是永恒的.

Oliver Heaviside

1. 数学是在哪里开始出现的

数学作为一门有组织的、独立的和理性的学科来说，在公元前 600 到前 300 年之间的古典希腊学者登场之前是不存在的. 但在更早期的一些古代文明社会中已产生了数学的开端和萌芽. 在这些原始文明社会中，有好些社会只能分辨一、二和许多，并没有更多的数学知识；有些则知道并且能够运算大的整数. 还有一些能够把数作为抽象概念来认识，并采用特殊的字来代表个别的数，引入数的记号，甚至采用十、二十或五作为基底来表示较大的数量. 也可以发现他们知道四则运算，不过仅限于小的数；并且具有分数的概念,不过只限于 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$之类，而且是用文字表达的. 此外,古人也认识到最简单的几何概念如直线、圆和角. 也许值得一提的是，角的概念想必是从观察到人的大小腿（股）或上下臂之间形成的角而产生的，因为在大多数语言中，角的边常是用股或臂的字来代表的. 例如在英文中，直角三角形的两边叫两臂.（在汉文中直角三角形的一条直角边也叫股，——译者）在这些原始文明中，数学的应用只限于简单交易，田地面积的粗略计算，陶器上的几何图案，织在布上的花格和记时等方面。

在公元前 3000 年左右巴比伦和埃及的数学出现以前，人类在数学上没有取得更多的进展. 由于原始人早在公元前一万年就开

始定居在一个地区，建立家园，靠农牧业生活，可见最初等的数学迈出头几步是多么费时；更由于许许多多古代文明社会竟然没有什么数学可言，足见能培育出这门科学的文明是多么稀少.

2. 美索不达米亚的政治史

在上述两个古代文明社会中，巴比伦人是首先对数学主流作出贡献的. 由于我们对近东的特别是对巴比伦古代文明的知识，大部分来自近百年来考古研究的结果，所以这一知识是不完整的，而且会因以后的新发现而必须加以改正."巴比伦人"这个名词包括好些同时或先后居住在底格里斯（Tigris)和幼发拉底(Euphrates)两河之间及其流域上的一些民族. 这块地方古代叫美索不达米亚(Mesopotamia),是今日伊拉克的一部分. 这些民族居住在独立的城邑如巴比伦（Babylon)，乌尔(Ur)，尼普尔(Nippur),苏萨(Susa)，阿塞尔(Aššur)，乌鲁克(Uruk)，拉格什(Lagash),启什(Kish)等. 公元前 4000 年左右,同闪族及印度－日耳曼族不同种族的苏美尔人(Sumerians）在美索不达米亚的部分地区定居了下来. 他们的首都是乌尔，他们所控制的地区叫苏美尔. 虽然他们的文化在公元前 2250 年达到最高点，但甚至在更早的时候，公元前 2500 年左右，苏美尔人就受阿卡得人（Akkadians)的政治控制. 这阿卡德人是闪族，他们的主要城市是阿卡得，当时的统治者是 Sargon. 于是苏美尔文化就被阿卡得文化所淹没了. 在 Hammurabi 王(公元前 1700 年左右)统治期间,文化得到高度发展. 这位君王也以制定一部著名法典而垂名后世.

公元前 1000 年左右，民族迁徙和铁器的使用产生了进一步的变革. 其后到公元前 8 世纪，这地区为原住在底格里斯河上游的亚述人(Assyrians)所统治. 据今日所知，亚述人对文化没有什么新贡献. 一个世纪之后，亚述帝国为迦勒底人（Chaldeans）和米提亚

人(Medes)所割据，而米提亚人则与更往东的波斯人种族接近.美索不达米亚史上的这段时期（公元前7世纪）通常称为迦勒底时期.公元前540年左右，近东地区为居鲁士（Cyrus）统治下的波斯人所征服.波斯数学家如Nabu-rimanni(公元前490年左右)和Kidinu(公元前480年左右）开始为希腊人所知悉.

公元前330年,希腊军事领袖Alexander the Great征服了美索不达米亚.从公元前330年迄基督诞生这一段历史时期世称为塞琉西时期Śeleucid period),这是从公元前323年Alexander死后统治该地区的希腊将领Seleucus得名的.但其时希腊数学之花已盛开,所以自Alexander迄公元7世纪阿拉伯人到来这一段时期内，希腊人的影响遍及近东.巴比伦人所创造的数学大部分出现在塞琉西时期以前.

尽管美索不达米亚地区的统治者变动频繁，但数学的知识、传统和使用，从古代起至少一直到Alexander时代，始终连绵不断.

3. 数的记号

我们对巴比伦文明和数学的知识，无论是其古代的或较近期的，都得自其泥版的文书.这些泥版是在胶泥尚软时刻上字然后晒干的.因而那些未被毁坏的就能完整保存下来.这些泥版的制作大抵在两段时期，有些是公元前2000年左右的，而大部分是公元前600年到公元300年间的.较早的泥版对数学史来说重要性更大些.

较早期泥版上刻的是阿卡得文字，这是附加到较早的苏美尔文字上的一种文字.阿卡得语中的字含有一个或多个音节；每个音节则用一批基本上是线条形式的记号表示.阿卡得人用一种断面呈三角形的笔斜刻泥版，在版上按不同方向刻出楔形刻痕.因此这

种文字就叫楔形文字.楔形文字的英文字 cuneiform 就是从拉丁文 *cuneus* 而来的,而 *cuneus* 的原意就是'楔'或尖劈.

巴比伦文化中发展程度最高的算术是阿卡得人的算术.他们的整数写法如下：

巴比伦数系的突出之点是以 60 为基底并采用进位记号.

起初巴比伦人没有用什么记号来表示某一位上没有数，因此他们写的数是意义不定的.例如  可以表示 80 或 3 620,这要取决于头一个记号是表示 60 还是 3 600.他们往往空出一些地方来表明哪一位上没有数，但这当然还会引起误解的.在塞琉西时期他们引入了一种特别的分开记号来表示哪一位上没有数.例如  $=1\cdot 60^2+0\cdot 60+4=3\ 604$.但即使在这段时期也还未采用一个记号来表明最右端的一位上没有数，如同我们今日所记的 20 那样.在这两段时期，人们都得依靠文件的内容，才能定出整个数字的确切数值.

巴比伦人也用进位记法来表示分数.例如, 作为分数来记时，可以表示 20/60 ,而  作为分数来记，可表示 21/60 或 $20/60+1/60^2$. 所以他们数字系统的混淆不清比上面所指出的还要厉害.

少数几个分数有其特定记号.例如我们可以看到  $=\frac{1}{2}$,

 $=\frac{1}{3}$， $=\frac{2}{3}$. 这些特殊分数 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$，对巴比伦人来说，在量的度量意义上是作为‘整体’看待的，而不是一的几分之几，虽则它们是从量的度量（同另一量相比有这相应关系）所得出的结果. 例如把一角钱与元对比时我们可以把 1 角钱写成$\frac{1}{10}$，但又把这$\frac{1}{10}$本身看成是一个单位.

实际上巴比伦人并不到处都用 60 进制. 有时他们把年数写成 $2me25$，这里 me 代表百，用我们的记号这就是 225. 他们也用 $limu$ 代表 1 000，这一般用在非数学的文件上，然而也出现在塞琉西时代的数学文件上. 有时 10 和 60 进位是混用的. 如 $2me1,10$，这表示 $2\times100+1\times60+10=270$. 他们以 60，24，12，10，6，2 混合进位制写出的数，表示日期、面积、重量、钱币，正如我们今日的钟点数用 12 进位，分、秒数用 60 进位，英寸数用 12 进位而普通计数则用 10 进位一样. 巴比伦人的数制也像今日所用的一样，是由许多历史条件和地区习惯形成的混合数制. 不过在数学和天文上，他们则是一贯用 60 进制的.

我们不能明确地知道基底 60 是怎么来的. 这也许是由于他们采用一系列重量单位制的结果. 假如我们有一个重量单位制，其各单位所含重量之比为

$$1/2,\ 1/3,\ 2/3,\ 1,\ 10.$$

又假如另外还有一种重量单位制，其单位不同但重量值之比相同，而政治或社会力量要求把这两种衡制合并起来.（例如我们有米和码.）如果较大的单位是较小单位的 60 倍，那么较大单位的 1/2，1/3 和 2/3 将是较小单位的整倍数. 因而为了使用方便就采纳较大的单位.

关于进位记数法的来源有两种可能的解释. 在较早的记数法中，他们用较大的代表 1 乘 60 而以较小的这种记号代表 1.

在写法简化以后,的外形减小了但仍放在代表 60 的那个位置上，因而所在的位置就变成代表 60 的倍数记号. 另一种可能的解释来自币制. 他们可能把 1talent(古币单位）和 10mana 写作,这里表示 1talent,它等于 60mana. 正如我们所写 $1.20 中的 1 代表 100 分那样. 于是记钱数的写法就采用到一般算术上来了.

4. 算 术 运 算

在巴比伦记数制中，代表 1 和 10 的记号是基本记号. 从 1 到 59 这些数都是用几个或者更多一些基本记号结合而成的. 因此这种数的加减法就不过是加上或去掉这种记号就是了. 巴比伦人把数字合在一起用来表示相加,例如表示 16. 减法用记号表示. 如即 40—3. 在较晚期的天文文件中则出现 *tab* 这个字,它表示加法.

他们也做整数的乘法. 比方说,乘以 37,他们的做法是乘以 30,另外再乘以 7,然后把结果相加。乘法记号是,读作 *a-rá*,意思是"去".

巴比伦人也做整数除以整数的运算. 由于除以一个整数 a 就是乘以倒数 $\frac{1}{a}$,这就牵涉到分数的运算. 巴比伦人把倒数化成 60 进制的"小数",而除了上面指出的几个分数以外,不用分数的特殊记号. 他们有数字表，可以查出 $1/a$ 形式的数（其中 $a=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$）怎样写成有限位的 60 进制"小数". 有些数表给出 1/7, 1/11, 1/13 等的近似值，因为这些分数所化成的 60 进制小数是无限循环的. 在一些老问题里所出现的分数中，如果分母里含有 2, 3 或 5 之外的因子，分子里也有这种因子，那就彼此约掉.

巴比伦人完全靠倒数表来作计算. 例如，他们的表中有：

*igi*2*gál*-*bi*30	*igi*8*gál*-*bi*7，30
*igi*3*gál*-*bi*20	*igi*9*gál*-*bi*6，40
*igi*4*gál*-*bi*15	…….
*igi*6*gál*-*bi*10	*igi*27*gál*-*bi*2，13，20

这些显然表示 $1/2=30/60$，$1/3=20/60$ 等等. 至于 *igi*和 *gál*-*bi* 的确切意义则不知道. 60 进制分数（即小于 1 的数)用 60 乘幂 60，60^2 等的逆方幂表示,不过分母并未明确写出. 这种写法仍为希腊人 Hipparchus 和 Ptolemy 所采用,并且一直沿用到 16 世纪文艺复兴时的欧洲,这之后才被以 10 为底的 10 进制小数所代替.

巴比伦人也有表示平方、平方根、立方和立方根的数表. 当方根是整数时，给出的是准确值. 对于其他的方根,相应的 60 进制数值只是近似的. 无理数当然是不能用有限位的 10 进制或 60 进制小数来表示的. 不过，没有事实可以证明巴比伦人懂得这一点. 他们很可能相信，只要用足够多的位数，就可用 60 进制小数准确表达无理数. 巴比伦人给出的$\sqrt{2}$的近似值是 $\sqrt{2}=1.414\ 213\cdots$而不是 $1.414\ 214\cdots$

在他们计算高 h 宽 w 的矩形对角线 d 时出现平方根. 有一个问题是求给定宽和高的一扇门的对角线. 给出的解答并未说明是怎么求得的，但相当于用了求对角线 d 的近似公式,即

$$d\approx h+\frac{w^2}{2h}.$$

这公式在 $h>w$ 时是 d 的很好的近似式，例如在他们的一个问题中有 $h>w$ 的情形,可以看出这解答是合理的,因为

$$d=\sqrt{h^2+w^2}=h\sqrt{1+\frac{w^2}{h^2}}=h\left(1+\frac{w^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果把二项式展开并只取头两项，那就得出上面的近似式. 他们还给出了求平方根问题的其他近似解答，这些可能是用了巴比伦人数字表中的数而得出的.

5. 巴比伦的代数

从载有数字表的文件中，可以获得巴比伦人的数系和数字运算方面的许多知识. 还有一些文件与此不同，它们是处理代数与几何问题的. 早期巴比伦代数的一个基本问题，是求出一个数，使它与它的倒数之和等于已给数. 用现代的记号来说，即巴比伦人要求出这样的 x 与 x ,使

$$xx=1,\ x+x=b.$$

从这两个方程得出 x 的一个二次方程,即 $x^2-bx+1=0$. 他们作出 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$;再作出 $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$, 然后得出解答：

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1} \quad 及 \quad \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}.$$

这就是说巴比伦人实际上知道二次方程根的公式. 有些别的问题，如给定两数之和与两数之积而求出这两数，也可化为上述问题. 由于巴比伦人不用负数，故二次方程的负根是略而不提的. 虽然他们只给出具体例题，但好些问题是打算说明二次方程的一般解法的，他们用变量置换把更为复杂的代数问题化成较简单的问题.

巴比伦人能解出含五个未知量的五个方程这类个别的问题. 在校正天文观测数据而引起的一个问题中，包括含十个未知量的十个（大多数是线性的）方程. 他们用一种特殊的方法结合各个方程，最后算出了所有未知量.

他们的代数方程是用语文叙述并用语文来解出的. 他们常用 *uś*（长）, *sag*（宽）和 *aša*（面积）这些字来代表未知量，并不一定因为所求未知量确实是这些几何量，而可能是由于许多代数问题来自几何方面，因而用几何术语成了标准做法. 我们举下面一个例子，来说明他们是怎样用这些术语表示未知量和陈述问题的：“我把长乘宽得面积 10. 我把长自乘得面积，我把长大于宽的量自乘，

再把这个结果乘以 9. 这个面积等于长自乘所得的面积. 问长和宽是多少?很明显,这里的文字长、宽和面积,只不过是分别代表两个未知量及其乘积的方便说法①.

这问题现今的写法是

$$xy = 10,$$
$$9(x-y)^2 = x^2.$$

附带说明一下，求解时得出 x 的一个四次方程，但其中缺少 x 和 x^3 项，因而可作为 x^2 的二次方程来解出.

他们也搞需要求三次根的问题. 其中一个问题若用现今的记号来写是这样的：

$$12x = z,\ y = x,\ xyz = V,$$

这里 V 是个给定的体积. 求这里的 x 时必须算立方根. 巴比伦人用上述的立方根数字表来算这个根. 他们也计算复利问题，其中需要求出一个未知的指数函数值.

巴比伦人有时也用记号表示未知量，但这种记法只是偶尔用之. 在有些问题里，他们用两个苏美尔文字（字尾变形有点受阿卡得文的影响）表示两个互为倒数的未知量. 又因这两个文字在古苏美尔文里是用象形记号的，而这两个象形记号当时已不流行，所以结果就等于用两个特殊记号来表示未知量. 他们反复运用这些记号，因而虽不懂得这两个记号在阿卡得文里的读法，我们也可以认出它们来.

他们解代数问题时只指出求解的步骤. 例如，10 平方得 100；从 1 000 减去 100 得 900 等等. 由于他们并不说明每步做法的理由，所以只能推想他们是怎么知道这种做法的.

他们在具体问题里算出了算术数列和几何数列之和；对于后者，用我们的记号是：

① 在 van der Waerden 一书 pp. 65～73 中可找到许多代数问题的例子. 请参看本章末的文献.

$$1+2+4+\cdots+2^9=2^9+(2^9-1)=2^{10}-1.$$

他们也给出了从 1 到 10 的整数平方和，好像是应用了下列公式似的：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\left(1\times\frac{1}{3}+n\times\frac{2}{3}\right)(1+2+3+\cdots n$$

在处理这方面的特殊问题时，他们没有给出推导.

巴比伦代数中也含有一些数论. 他们求出了好几批 Pythagoras 三元数组，并且很可能是用正确方法得出的；即，若 $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$,则 $x^2+y^2=z^2$. 他们还求出了 $x^2+y^2=2z^2$ 的整数解.

6. 巴比伦的几何

几何在巴比伦人的心目中是不重要的. 几何并不是他们一门独立的学科. 关于划分土地或计算某项工程所需砖数之类的问题很易于化为代数问题. 面积和体积的一些算法是按固定法则或公式给出的. 不过，那些说明几何问题的图画得很粗，所用的公式也可能不正确. 例如，在巴比伦人计算面积的问题里，我们分不清其中的三角形是否为直角三角形，也不知其四边形是否为正方形，因而不知其对有关图形所用的公式是否正确. 不过，Pythagoras 定理中的关系，三角形的相似以及相似三角形对应边成比例的关系他们是知道的,他们似用 $A=\frac{c^2}{12}$（其中 c 表圆周长）这个法则得出圆面积. 在这个法则里，他们等于用 3 代替了 π. 不过，在他们给出正六边形及其外接圆周长之比时，其中的结果说明他们用 $3\frac{1}{8}$ 作为 π 值. 在计算一些特定物理问题时，他们算出了一些体积，有些算对了,有些算得不对.

除了计算一个给定的等腰三角形的外接圆半径之类这一些特

殊的实际知识外，巴比伦人的几何的内容只是收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体体积的法则，而平面图形中则包括正多边形. 他们并不专为几何而研究几何，总是在解决实际问题时才去搞几何的.

7. 巴比伦人对于数学的使用

尽管巴比伦人的数学知识有限，但数学在他们生活的许多方面都起作用. 巴比伦位于古代贸易通道上，他们商业活动范围很广. 巴比伦人用他们的算术和简单代数知识来表示长度和重量，来兑换钱币和交换商品，来计算单利和复利，来计算税额，来给农民、教会和国家之间分配收获的粮食. 划分土地和遗产的问题引出代数问题. 牵涉到数学的大多数楔形文字著作（除了数字表和解题的文件之外）都是关于经济问题的. 在他们的早期历史中，经济对算术发展的影响是毋庸置疑的.

挖运河，修堤坝以及搞其他水利工程都需要用到计算. 关于砖的需用量问题就引起许多数字计算和几何问题. 他们需要计算谷仓和房屋的容积以及田地的面积. 巴比伦数学和实际问题之间的紧密联系可从下例看出：要挖一条运河，其横断面为给定的梯形，其长、阔、深是已知的. 每人每天的挖土量是已知的，挖土人数和他们的工作日数之和也是已知的. 问题是要算出人数和工作日数.

由于从希腊时代起数学和天文学之间的关系就非常重要，所以我们这里要指出巴比伦人在天文学方面有哪些知识并做了些什么工作. 苏美尔人的天文知识如何我们一无所知，而阿卡得时代的天文知识是粗糙的并缺乏数量关系；在出现值得一提的天文学之前，数学先有了发展. 在亚述时代（公元前 700 年左右）的天文学中开始有了对现象的数学描述，并有系统地记录观测数据. 在公元

前的最末三个世纪里，数学的应用多了起来，特别是用于计算月球和行星的运动. 天文学方面的文件大多产生在这个塞琉西时期. 这种文件有两类，一类是程式文书，一类是天文历书，即给出天体在不同时期所处位置的书表. 程式文书是说明怎样计算天文历书的.

从他们对月日观察数据所作的算术，可以看出巴比伦人计算了相继数据之间的一次和二次差分，观察到了一次或二次差分等于常数时的情况，并对数据作了外插与内插. 他们算法的程式等于利用了这一事实：所观测的数据可用多项式函数来拟合，这样使他们能预测各行星在每一天的位置. 他们颇为准确地知道一些行星的运动周期，并利用亏蚀现象来作为计算的基础. 但在巴比伦人的天文学里，并没有对行星运动或月球运动给出几何概型.

塞琉西时期的巴比伦人已对太阳和月球的运动记录了很多的数据，其中给出变动的速度和位置. 这些数据表里还列有（或者易于从中推算出）太阳和月球的特定位置和亏蚀时间. 他们的天文学家能把新月和亏蚀出现的时间算准到几分钟之内. 从他们的数据说明他们知道太阳年或回归年（季节年）等于 $12+22/60+8/60^2$ 个月(从新月出现到下次新月出现为一月),并把恒星年(太阳相对于恒星的位置复原所需之时）准确算到 $4\frac{1}{2}$ 分。

黄道带里相应于十二宫的星座是他们早就知道的，但黄道带的名称是在公元前 419 年的一项文件中才首次出现的. 黄道带每宫占 30°. 天上行星的位置以恒星为依据来确定，也用其在黄道带中的位置来确定.

天文学有许多用处. 其一是要用它来算出历书，这是由太阳、月球和恒星的位置推定的. 年、月、日这些天文上的数量要准确算出，才能知道播种日和宗教节日. 部分地由于日历同宗教节日和宗教仪式的关系，部分由于他们认为天体都是神，所以在巴比伦由祭

司掌管日历.

他们的日历是阴历.每月是在月球全黑（我们今日所谓的新月）后首次出现蛾眉月时开始的.日子从首次出现蛾眉月的那天晚上开始算起，并把从日落到第二次的日落之间的时间作为一天.阴历是难办的，因为虽然使一个月有整数的日子是件方便的事，但根据太阳月球接连有同样相对位置（即从新月到新月）之间相隔日数来算的阴历月份，有的是 29 天,有的是 30 天.这就出现该定哪些月为 29 天和哪些月为 30 天的问题.更重要的一个问题是怎样使阴历符合季节.这问题的解答很复杂，因它要取决于月球和太阳的运行路径和它们的速度.阴历里还插进了额外的月份，使得在 19 年里这样插进了 7 个月之后，才能让阴历约摸符合太阳年.这样 235 个阴历月份等于 19 个太阳年.他们逐年算出了夏至的时间，然后取相等的分段，定出冬至和春分、秋分的时间.这种历法为犹太人、希腊人所沿用,罗马人起初也沿用,直到公元前 45 年他们采用 Julian 历法时为止.

把圆分为 360 度是巴比伦天文学家在公元前最末一个世纪里首创的.这跟他们早先用 60 做基底一事不相干；不过 60 却用来作为把度分成分和把分分成秒的底数.天文学家 Ptolemy(公元 2 世纪）也沿用巴比伦人的这种分法.

与天文学密切相关的是占星术.巴比伦人也像其他许多古代文明社会中的人一样，认为天体都是神，因而认为它们能影响甚至主宰人间的事.如果我们想想太阳的重要性：它给我们以光和热，对植物生长的影响，日蚀时所引起的恐惧，以及动物交配的季节性现象，那就很可以理解，为什么古人相信天体甚至能影响人的一生中的日常事务.

古代社会中伪科学性的预卜并非都用天文.他们认为数本身有神秘特性并可用之于预卜未来.我们可在但以理书及新旧约先知的著述中看出巴比伦人预卜未来的做法，希伯来人的“科学”测

字术(*gematria*)（希伯来传统神秘主义的一种形式）就是根据这一事实而来的，即因希伯来人用字母来表示数，所以他们认为由字母组成的每个字都具有一个数值. 如果两个字的字母值之和相同，那就表明这两个字所代表的两种概念、两个人或两件事之间有重要的联系. 在以赛亚的预言里（21 : 8），狮子宣告巴比伦城的沦落，因为希伯来文中狮子这个字和巴比伦这个字里，其字母所代表的数字之和是一样的.

8. 对巴比伦数学的评价

巴比伦人用特殊的名称和记号来表未知量，采用了少数几个运算记号，解出了含有一个或较多未知量的几种形式的方程，特别是解出了二次方程，这些都是代数的开端. 他们对整数和分数搞出了有系统的写法，这使他们能把算术推进到相当高的程度，并用之于解决许多实际问题特别是天文上的问题. 他们在解特殊型高次方程方面具有一些代数技能，但总的说来，他们的算术和代数是很初等的. 虽然他们算的都是具体的数和具体问题，但他们对抽象数学也有部分掌握，因为他们认识到某些运算过程对某些类方程具有典型性.

问题是巴比伦人在采用数学证明这方面做到什么程度. 他们确曾用正确的有系统的步骤，解出了含未知量的颇为复杂的方程. 但他们只用语言说出该做的步骤，没有说出做那一步的理由根据什么. 几乎可以肯定地说，他们的算术和代数步骤以及几何法则都是根据物理事实、边试边改以及从直观认识得出的结果. 如果有些方法行之有效，巴比伦人便认为这就有充分理由继续加以采用. 关于证明的想法，依据于决定取舍原则的逻辑结构的思想，以及问题的解在什么条件下存在这些方面的考虑，在巴比伦人的数学里都是找不到的.

参考书目

Bell, E. T.: *The Development of Mathematics*, 2nd ed., McGraw-Hill, Chaps. 1～2.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chap. 3.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1894, Vol. 1, Chap. 1.

Chiera, E.: *They Wrote on Clay*, Chicago University Press, 1938.

Childe, V. Gordon: *Man Makes Himself*, New American Library, 1951, Chaps. 6～8.

Dantzig, Tobias: *Number: The Language of Science*, 4th ed., Macmillan, 1954, Chaps. 1～2.

Karpinski, Louis C.: *The History of Arithmetic*, Rand McNally, 1925.

Menninger, K.: *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1969.

Neugebauer, Otto: *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton University Press, 1952, Chaps. 1～3 and 5.

Neugebauer, Otto: *Vorgriechische Mathematik*, Julius Springer, 1934, Chaps. 1～3 and 5.

Sarton, George: *A History of Science*, Harvard University Press, 1952, Vol. 1, Chap. 3.

Sarton, George: *The Study of the History of Mathematics and the History of Science*, Dover (reprint), 1954.

Smith, David Eugene: *History of Mathematics*, Dover (reprint), 1958, Vol. 1, Chap. 1.

Struik, Dirk J.: *A Concise History of Mathematics*, 3rd ed., Dover, 1967, Chaps. 1～2.

van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, P. Noordhoff, 1954, Chaps. 2～3.

第 2 章

埃及的数学

所有科学，包括逻辑和数学在内，都是有关时代的函数——所有科学连同它的理想和成就统统都是如此

E. H. Moore

1. 背景

当美索不达米亚地区的统治民族迭经更替从而接受新的文化影响之际，埃及的文明却在不受外来势力的影响下独自发展. 埃及文明源自何处至今未知，但它肯定在公元前 4000 年之前就已存在. 正如希腊史学家 Herodotus 所说，埃及是受尼罗河恩施的. 这条河把南方的水一年一度地泛滥到沿河两岸之后留下沃土. 他们的大多数人自古以来就一直靠耕种这片沃土谋生. 这国家的其余部分是荒漠.

在今日埃及这块地方，古代有两个王国，一个在北方，一个在南方. 在公元前 3500 年到前 3000 年之际，他们的一个统治者 Mena(或 Menes)统一了南、北(或上、下)埃及. 嗣后埃及历史的主要时期就按统治的朝代来命名，而以 Menes 为第一朝代的创建人. 埃及文化在第三朝代（公元前 2500 年左右)到达最高点,当时的统治者建立了至今闻名的金字塔,一直到公元前 332 年 Alexander the Great 征服它以前，埃及文明按着它自己的道路延续着. 此后一直到公元 600 年左右，埃及的历史和数学就附属于希腊文明了. 因此,除了受 Hyksos 人的一次小小入侵（公元前 1700—前 1600)和跟巴比伦文明的轻微接触（这从尼罗河谷发现公元前 1500 年左右

的 Tell al-Amarna 楔形文字泥版一事推知）之外，埃及文明是其本地居民的创造物.

古埃及人造出了他们自己的几套文字.其中有一套是象形文字，每个文字记号是某件东西的图形.直到基督降生的年代，埃及象形文字还用在纪念碑文和器皿上.从公元前 2500 年左右起，埃及人用一种所谓僧侣文（hieratic writing）来作日常书写.这套文字所用的人为记号起初只是象形字的简缩.僧侣文是拼音的,每个音节由一个会意文代表，而整个文字则由一些会意文组成.整个文字的意义并不受个别会意文的限制.

书写的方式是用墨水写在草片（papyrus)上,这是把一种木髓紧压后切成的薄片.因草片会干裂成粉末，所以除了铭刻在石头上的象形文字外，古埃及的文件很少保存下来.

现存的数学文件主要是两批草片文书：一批是保存在莫斯科的，叫莫斯科草片文书；一批是 1858 年英国人 Henry Rhind 发现的，现存英国博物馆，叫 Rhind 草片文书.Rhind 草片文书又叫 Ahmes 草片文书，因其作者叫 Ahmes.他在这文书的开首写了如下这句话："获知一切奥秘的指南".这两批草片文书都是公元前 1700 年左右的东西.此外还存有写于这一时代及其后的一些草片文书的片断.数学草片文书的作者是在古埃及政府和教会行政机构中工作的书记.

草片文书里含有数学问题和解答——在 Rhind 草片文书里有 85 题，在莫斯科草片文书里有 25 题.这些想必是书记们在工作中所碰到的问题，而人们则指望他们求出解答.这两大批草片文书中的问题很可能是作为一些典型问题和典型解法的示范例子而记下来的.虽然这些草片文书的撰写年代在公元前 1700 年左右，但其中所含的数学是埃及人早在公元前 3500 年就已经知道的，而从那时起直到希腊人征服他们以前，他们很少增加新的知识。