·现 代 数 学 丛 书·

孤立子理论中的达布变换及其几何应用

谷超豪　胡和生　周子翔　著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统介绍孤立子理论中的 Darboux 变换方法及其在微分几何中的应用，所介绍的内容大部分是三位作者近年来的研究成果。书中的第 1、2、3 章分别叙述了 $1+1$ 维、$1+2$ 维和高维 Darboux 变换的一般理论和许多具体的例子，第 4、5 两章叙述 Darboux 变换在微分几何中的曲面论和调和映照中的应用。本书的中心是对具有 Lax 对的非线性偏微分方程给出显式的(通常是纯代数的)、一般的求解方法。本书只假定读者具有大学数学系本科的分析、代数和几何的基础，为了读者阅读方便，第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统，使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容。本书可作为研究生的教材，也可供高等学校数学系和物理系研究生及有关的科研人员参考。

Modern Mathematics Series

DARBOUX TRANSFORMATION IN SOLITON THEORY AND ITS GEOMETRIC APPLICATIONS

Gu Chaohao, Hu Hesheng, Zhou Zixiang

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Darboux Transformation in Soliton Theory
and Its Geometric Applications

Abstract

This book introduces the Darboux transformation method in the soliton theory and its applications in differential geometry. The main body consists of the recent work done by the three authors. Chapter 1, 2 and 3 describe the general theory together with a lot of interesting examples of the Darboux transformations in $1+1$, $1+2$ and higher dimensions respectively. Chapters 4 and 5 are devoted to the applications of the Darboux transformations in the theory of surfaces and harmonic maps in differential geometry. The central idea of this book is to provide explicit (purely algebraic in many cases) and universal algorithms for solving nonlinear partial differential equations with Lax pairs. This book is written for the persons with basic knowledge of analysis, algebra and geometry at the college level. Moreover, Chapters 4 and 5 are written as independently as possible of the previous chapters so that those who are especially interested in geometry will also find it convenient to read. This book can be used as a textbook for graduate students and a reference book for graduates and scientists in pure and applied mathematics and related sciences.

出版说明

从 60 年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于 1990 年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18 位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

序　言

孤立子理论是非线性科学的一个重要方向，它既反映一类非常稳定的自然现象，例如江河中的某一类水波、光纤中的光信号传播等等，体现了一大类非线性相互作用的若干特征，并为许多应用问题（如光孤子通讯）提供了启示。另一方面，这一理论又为非线性偏微分方程提供了求显式解的方法，因而受到物理学界和数学界的充分重视。

非线性偏微分方程的求解是各门科学中都会遇到的问题，难度很大，一般说来，只有在非常特殊的情况下，才可能求得有显式表达式的准确解。但出人意料，对于许多孤立子方程，已有多种显式求解的方法，其中最常见的有反散射方法和 Bäcklund 变换等。前者利用非线性偏微分方程的 Lax 对和常微分方程的谱理论，把 Cauchy 问题化为求解线性积分方程，在退化核的情况下，能给出显式的解。后者是以已知解为种子，导出一个完全可积的偏微分方程组，从而给出一个新解。在具体实施中，还可利用多个有一定关系的已知解给出一个新解的显式表达式，称为“非线性迭加公式”。

但是，当积分方程的核非退化时，解的显式表达式是很难得出的，非线性迭加公式也只是在相当特殊情形才能出现。到 70 年代后期，人们又注意到，Darboux（达布）在一个世纪以前所提供的处理二阶常微分方程谱问题的一个方法对于非线性偏微分方程的显式求解有很重要的作用，从而该方法在孤立子和可积系统理论的研究中，越来越为人们所注意，并得到迅速发展，这便是

Darboux(达布)变换法。关于 Darboux 变换的前期工作，可见文献[57]。

本书的目的是想进一步阐述 Darboux 变换,并介绍其几何应用。主要内容有：

一、将 Darboux 变换用矩阵形式表述,从而可以说明 Darboux 变换实质上就是带谱参数的规范变换,并且给予 Bäcklund 变换以显式的形式。

二、用普适的、纯代数的算法构作 Darboux 阵。

三、把 Darboux 变换推广到 2 个和多个空间变量的情形,构作了具有弹性散射性质的高维时空的孤立子,包括完全局域化的孤立子。对 2 个自变量的情况,还构作了微分算子形式的 Darboux 算子，对高维时空的情况,提出了广义的自对偶杨-Mills 流这一更为广泛的可积系统。

四、把 Darboux 变换应用于一系列的几何问题，得到显式的和普适的解法,阐明了 Lax 对的几何意义。Lax 对不仅是求解微分方程的辅助工具,而且是所要寻求的几何对象。我们所叙述的几何问题包括：欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 和 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$的各种类型的 Bäcklund 线汇、常曲率曲面和常平均曲率曲面的构作、射影空间 P^3 中的苏链、$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^{1,1}$到各种类型的“球面”和群 $U(N)$的调和映照以及酉子解的纯代数算法构作等。

本书的第 1、2、3 章叙述 Darboux 变换的一般理论和某些有代表性的具体的例子，第 4、5 章叙述 Darboux 变换对曲面论及调和映照的应用。本书只假定读者具有大学数学系本科的数学分析、代数和几何的基础知识，为了读者阅读方便，我们使第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统，使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容。

本书的主体内容由作者们在这一领域中一系列的研究成果所构成，这些研究工作得到了国家攀登计划项目“非线性科学”、国家自然科学基金会重点项目“整体微分几何和物理应用”、国家自然科学基金会青年基金、国家教委博士点基金、上海市科委、教

委科研基金的支持，是在国家教委复旦大学非线性数学模型和方法开放实验室、复旦大学数学研究所中完成的。

作者们感谢上海科学技术出版社为出版本书所作的努力。

作　者

1998年7月于复旦大学

目　　录

CONTENTS

第 1 章

1 + 1 维可积系统

本章从最原始的 Darboux(达布)变换开始,叙述 KdV 方程、MKdV 方程的 Darboux 变换的经典形式,然后就转向于 AKNS 系统(及其扩充)的 Darboux 变换,它的作法具有很高的普适性. 同一般文献中所讨论的不一样,这里所讨论的可以是系数和 t 有关的偏微分方程. 我们所介绍的 Darboux 阵可用纯代数的算法构作而成,并且对这种系统中的任何方程都是统一的. 本章中还讨论化约系统的 Darboux 变换以及 Darboux 变换与反散射方法的关系等,说明在未知函数的反散射数据表示下, Darboux 变换实际上是添加或减少一个解中所含的孤立子(离散谱).

§1.1 KdV 方程、MKdV 方程及其 Darboux(达布)变换

1.1.1 原始的 Darboux 变换

1882 年, G. Darboux[13]研究了一个二阶线性常微分方程(现在称之为一维 Schrödinger 方程)的特征值问题*)

$$-\phi_{xx}-u(x)\phi=\lambda\phi, \tag{1.1}$$

式中 $u(x)$是给定的函数,称为势函数, λ 是常数,称为谱参数.

---

*) 在本书中常用关于 x、t 等的下标来记偏导数,并假设一切遇到的函数在其定义域内均为连续的,而且可微分到所需要的阶次.

Darboux 发现了下面的事实：设 $u(x)$ 和 $\phi(x,\lambda)$ 是满足(1.1)的两个函数，对任意给定的常数 λ_0，令 $f(x)=\phi(x,\lambda_0)$，即 f 是(1.1)当 $\lambda=\lambda_0$ 时的一个解，则由

$$\begin{aligned} u' &= u + 2(\ln f)_{xx}, \\ \phi'(x,\lambda) &= \phi_x(x,\lambda) - \frac{f_x}{f}\phi(x,\lambda) \end{aligned} \tag{1.2}$$

所定义的函数 u'、ϕ' 一定满足和(1.1)同样形式的方程

$$-\phi'_{xx} - u'\phi' = \lambda\phi'. \tag{1.3}$$

这样这个借助于 $f(x)=\phi(x,\lambda_0)$ 所作的变换(1.2)将满足(1.1)的一组函数 (u,ϕ) 变化为满足同一方程的另一组函数 (u',ϕ')，这就是最原始的 Darboux 变换

$$(u,\phi) \longrightarrow (u',\phi'), \tag{1.4}$$

在 $f\neq 0$ 处它是有效的.

1.1.2　KdV 方程的 Darboux 变换

1885 年，荷兰的应用数学家 Korteweg 和 de Vries 导出了一个水波运动的非线性偏微分方程，现称为 Korteweg-de Vries 方程(KdV 方程). 本世纪 60 年代中，人们[66]发现 KdV 方程与上述 Schrödinger 方程有着密切的联系. 具体说来，KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

是关于 ϕ 的线性方程组

$$\begin{cases} -\phi_{xx} - u\phi = \lambda\phi, \\ \phi_t = -4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3u_x\phi \end{cases} \tag{1.6}$$

(称为 KdV 方程的 Lax 对)的可积条件，这时 u 和 ϕ 都应看成 x 和 t 的函数，这里可积条件的意义是：由(1.6)中第一式得出 $\phi_{xx}=$