

工科数学基地建设丛书

# 数学分析

下 册

洪 毅 主编



华南理工大学出版社

工科数学基地建设丛书

(华南理工大学)

# 数 学 分 析

(下 册)

洪 毅 主编

华南理工大学出版社

·广州·

## 内 容 简 介

本书是在建设工科大学数学基地的教改实践中编写出来的,分上、下两册出版。上册内容包括极限理论与一元函数微积分,下册内容包括级数理论与多元函数微积分。本书注意用现代数学思想处理传统内容,注意诱导学生进行创造性思维,重视数学建模思想的介绍以及分析、几何代数的有机联系,力求做到内容简洁与系统性的结合。

本书可作为数学专业本科的数学分析课教材,也可作为理工科大学数学要求较高各专业本科的教材或参考书。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析 (下册) 裴毅主编. —广州: 华南理工大学出版社, 2004.

(工科大学数学基地建设丛书)

裴毅 主编

I 数... II 裴... III 数学分析—高等学校—教材 IV 数

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 000000 号

总发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 5楼, 邮编 510640)

发行电话: 020-87533333 020-87533333 (传真)

科 学 出 版 社 广 东 省 农 垦 印 刷 厂

定 价: 20.00 元

责任编辑: 张君晓 潘宜玲

印刷者: 广东省农垦印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 12.5 字数: 320千字

版 次: 2004年 1月第 1版第 1次印刷

印 数: 1—5000册

定 价: 20.00元

版权所有 盗版必究

# 目 录

第九章 广义积分.....	(v)
第一节 广义积分的概念与计算.....	(v)
一、无穷限广义积分 .....	(vi)
二、无界函数的广义积分 .....	(vii)
习题 9.1.....	(viii)
第二节 广义积分的收敛判别法 .....	(ix)
一、非负函数广义积分的收敛判别法 .....	(ix)
二、一般函数无穷区间广义积分的收敛判别法 .....	(xi)
三、无界函数广义积分的收敛判别法 .....	(xi)
习题 9.2.....	(xii)
第三节 补充定理与例题 .....	(xiii)
习题 9.3.....	(xiv)
第十章 数项级数 .....	(xv)
第一节 数项级数的概念及其收敛性 .....	(xv)
习题 10.1 .....	(xvi)
第二节 上极限与下极限 .....	(xvii)
一、数列的上极限与下极限 .....	(xvii)
二、上、下极限的重要性质 .....	(xviii)
习题 10.2 .....	(xix)
第三节 正项级数 .....	(xx)
习题 10.3 .....	(xxi)

第四节 任意项级数 .....	(120)
一、交错级数收敛原理 .....	(120)
二、级数的绝对收敛与条件收敛 .....	(121)
三、交错级数 .....	(121)
四、莱布尼兹判别法与阿贝尔判别法 .....	(121)
习题 120 .....	(121)
第五节 绝对收敛级数与条件收敛级数的性质 .....	(121)
习题 121 .....	(121)
第六节 补充定理与例题 .....	(121)
习题 121 .....	(121)
第十一章 函数项级数 .....	(122)
第一节 函数项级数的一致收敛性 .....	(122)
一、函数项级数的概念 .....	(122)
二、一致收敛的概念 .....	(122)
习题 122 .....	(122)
第二节 函数项级数一致收敛的判别与性质 .....	(122)
一、一致收敛的判别法 .....	(122)
二、一致收敛级数的性质 .....	(122)
习题 122 .....	(122)
第三节 幂级数 .....	(122)
一、幂级数及其收敛域 .....	(122)
二、幂级数的性质 .....	(122)
三、函数的幂级数展开 .....	(122)
习题 122 .....	(122)
第四节 用多项式一致逼近连续函数 .....	(122)
习题 122 .....	(122)
第五节 富里埃级数 .....	(122)
一、富里埃级数的概念 .....	(122)

二、三角函数的正交性与富里埃系数 .....	(页码)
三、富里埃级数的收敛性 .....	(页码)
四、其他类型的富里埃级数 .....	(页码)
五、内积空间中的富里埃级数 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第六节 补充定理与例题 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第十二章 多元函数的极限与连续 .....	(页码)
第一节 欧几里德空间中的点集 .....	(页码)
一、欧几里德空间, 点列的极限 .....	(页码)
二、开集与闭集 .....	(页码)
三、平面点集的几个基本定理 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第二节 多元函数的极限 .....	(页码)
一、多元函数的概念 .....	(页码)
二、二元函数的极限 .....	(页码)
三、重极限与累次极限 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第三节 多元函数的连续性 .....	(页码)
一、多元连续函数的定义 .....	(页码)
二、连续函数的性质 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第四节 补充定理与例题 .....	(页码)
习题 .....	(页码)
第十三章 多元函数的导数与微分 .....	(页码)
第一节 方向导数与偏导数 .....	(页码)
一、方向导数 .....	(页码)
二、偏导数 .....	(页码)

三、高阶偏导数 .....	(页源)
习题 页源 .....	(页源)
第二节 全微分及其应用 .....	(页苑)
一、多元函数的全微分 .....	(页苑)
二、全微分的应用 .....	(页苑)
习题 页苑 .....	(页苑)
第三节 复合函数求导法则 .....	(页园)
习题 页园 .....	(页园)
第四节 隐函数存在定理 .....	(页园)
一、隐函数的概念 .....	(页园)
二、隐函数存在定理 .....	(页园)
习题 页园 .....	(页园)
第五节 空间曲线的概念 .....	(页缘)
习题 页缘 .....	(页缘)
第六节 空间曲面的概念 .....	(页苑)
一、空间曲面的概念 .....	(页苑)
二、曲面的法线与切平面 .....	(页苑)
习题 页苑 .....	(页源)
第七节 梯度 .....	(页缘)
一、等值面 (线) .....	(页缘)
二、梯度 .....	(页苑)
习题 页苑 .....	(页缘)
第八节 泰勒公式 .....	(页园)
习题 页园 .....	(页苑)
第九节 多元函数的极值 .....	(页园)
一、多元函数的极值 .....	(页园)
二、最小二乘法 .....	(页缘)
习题 页缘 .....	(页苑)

第十节 条件极值.....	(圆宗)
习题 员圆宗.....	(圆缘)
第十一节 补充定理与例题.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第十四章 向量值函数的微分.....	(圆缘)
第一节 砸灶上的连续映射.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第二节 映射的微分.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第三节 隐映射存在定理.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第四节 补充定理与例题.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第十五章 含参变量的积分与广义积分.....	(圆缘)
第一节 含参变量的积分.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第二节 含参变量的广义积分.....	(圆缘)
一、一致收敛性及其判别法.....	(圆缘)
二、一致收敛积分的性质.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第三节 欧拉积分.....	(圆缘)
一、 $\Gamma$ 函数.....	(圆缘)
二、 $\beta$ 函数.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第四节 补充定理与例题.....	(圆缘)
习题 员圆缘.....	(圆缘)
第十六章 重积分.....	(圆缘)
第一节 重积分的定义和性质.....	(圆缘)
一、面积和体积的概念.....	(圆缘)

二、二重积分的概念 .....	(续原)
三、二重积分的可积性问题 .....	(续原)
四、三重积分的概念 .....	(续原)
五、重积分的性质 .....	(续原)
习题 17.1 .....	(续原)
第二节 二重积分的计算 .....	(续原)
一、用直角坐标系计算二重积分 .....	(续原)
二、用极坐标计算二重积分 .....	(续原)
三、二重积分的一般变量代换 .....	(续原)
习题 17.2 .....	(续原)
第三节 三重积分的计算 .....	(续原)
一、化三重积分为累次积分 .....	(续原)
二、三重积分的变量变换 .....	(续原)
习题 17.3 .....	(续原)
第四节 重积分的应用 .....	(续原)
一、曲面的面积 .....	(续原)
二、重积分在物理上的应用 .....	(续原)
习题 17.4 .....	(续原)
第五节 补充定理与例题 .....	(续原)
习题 17.5 .....	(续原)
第十七章 曲线积分和曲面积分 .....	(续原)
第一节 第一类曲线积分 .....	(续原)
一、第一类曲线积分的概念 .....	(续原)
二、第一类曲线积分的计算 .....	(续原)
习题 17.6 .....	(续原)
第二节 第二类曲线积分 .....	(续原)
一、第二类曲线积分的概念 .....	(续原)
二、第二类曲线积分计算举例 .....	(续原)

习题 18.10	(18.10)
第三节 第一类曲面积分	(18.10)
一、第一类曲面积分的概念	(18.10)
二、第一类曲面积分的计算	(18.10)
习题 18.11	(18.10)
第四节 第二类曲面积分	(18.11)
一、曲面的定向	(18.11)
二、第二类曲面积分的概念	(18.11)
三、第二类曲面积分计算举例	(18.11)
习题 18.12	(18.11)
第五节 补充定理与例题	(18.11)
习题 18.13	(18.11)
第十八章 各种积分的联系与场论	(18.12)
第一节 各种积分的联系	(18.12)
一、格林公式	(18.12)
二、高斯公式	(18.12)
三、斯托克斯公式	(18.12)
习题 18.14	(18.12)
第二节 曲线积分与路径无关的条件	(18.12)
一、平面上曲线积分与路径无关的条件	(18.12)
二、全微分式的原函数	(18.12)
习题 18.15	(18.12)
第三节 场论初步	(18.12)
一、场的概念	(18.12)
二、向量场的向量线	(18.12)
三、向量场的通量与散度	(18.12)
四、向量场的环流量与旋度	(18.12)
五、保守场	(18.12)

习题 来源.....	(原原)
第四节 补充定理与例题.....	(原愿)
习题 来源.....	(原愿)

# 总 序

在世纪交替之际,经济竞争日益激烈,人才与技术是保证在竞争中立于不败之地的关键。发达国家科学界已得出共识:“数学科学对于经济竞争是必不可少的。数学是一种关键性的、普遍的、可实行的技术。”(引自:“数学科学·技术与经济竞争力”,《美国数学科学委员会报告》。)在新形势下,大学数学教育工作者当奋力而为。国家教委(现为教育部——编者注)为了推动面向 21 世纪的大学教育改革,在一些有条件的大学建立了基础学科教学基地,其目的在于:为面向 21 世纪的教学改革,在有关高校先走一步,摸索经验,以资借鉴。华南理工大学应用数学系有幸被国家教委定为工科数学教学基地,我们深感这一任务光荣而艰巨。基地建设的任务与目标,国家教委都有明确的指示,具体实施方案则要求我们探索。改革要做的事情是多方面的,但是其中最基础性的工作之一,就是实施改革方案的教材建设。它是改革思想的具体体现。

面对当今的生产力发展水平,工科数学教材改革的原则是什么呢?我们认为必须考虑到下述几方面的需要。

## 一、对原有教学内容要作适当增删

原有的高等数学、工科数学及根据专业需要而开设的某些应用数学的选修课程,大都有国家教委颁布的“基本要求”作指导。这些基本要求是在当时历史条件下制定的,它基本反映了基础学科的继承性与当时教学体系的需要。但时至今日,随着计算机技术的日益普及,以及对学生应用数学知识、解决实际问题能力的要

求日益提高,原有教材的内容显然需要加以调整。如:对原有教材中较多依靠特殊技巧处理计算题的训练,由于有了性能很高的数学软件的出现,上述训练内容可适当减少,这种减少并不影响学生对数学基本概念的理解,还可腾出时间来让学生去学习更有用的数学知识。又如:在概率论与数理统计课程中,过去的重点放在概率论,而在实际中非常有用的数理统计内容所占比重较少,从培养学生解决实际问题能力出发,合理的安排应该与原安排相反,将重点放在数理统计的教学上。类似需要调整原有教学内容之处,还可以举出一些,这里不详加罗列。另外,对原有教学内容薄弱之处,我们认为应当适当加强。

二、在工科数学教学中,对重要概念的讲授应系统地训练数学建模的思维程序,还应增加独立的数学模型课程

从广义来说,所有的数学理论都是某种特定的数学模型。但由于数学科学强烈地依靠逻辑推理,从19世纪到20世纪这段时间,自德国数学家希尔伯特(1862-1943)的几何基础与法国数学家柯西(1781-1841)的形式化的数学分析理论问世之后,在数学界形成了一股主要靠逻辑推理与高度抽象化方法来发展数学的强大浪潮。这一过程使得数学科学取得了辉煌的、前所未有的成绩。它将工业革命初期人们为了解决实际问题所提出的一些朴素的数学思想加以完善,形成完整的数学理论,并因此也出现了不少新的数学理论,如非欧几何就是依靠逻辑推理方法而发现的。依靠逻辑推理发展数学,今天仍然具有强大的生命力,而且也是数学区别于其他科学的基本特征。但是,任何一门科学的特征都不可强调得过分,如果将逻辑推理手段放在数学方法唯一优先的地位,则不可避免地要带来消极影响。首先,它会带来数学思维的枯竭。近期以来,基础数学研究多以某些历史难题为线索,显得比较沉闷,新的理论出现较少;相反,应用数学的新思想、新方法则蓬勃发展。其次,若

仅用逻辑推理作为数学的主要手段进行数学教育,学生学了抽象的数学理论,往往不知如何去使用它来解决实际问题。这一缺陷已是世界各国普遍感到头痛的问题。最后,科学思维的源泉毕竟还是来自实践,逻辑推理方法并不见得总是成功的。非阿基米德几何的兴衰就是一例。由于它仅仅依靠逻辑推理,没有明确的应用背景,在数学的发展中遭到了淘汰。有些有名的数学问题,现在仍然吸引了一批知名数学家参加研究,虽然也是必要的,但在可见的将来,却难以期望它对社会经济的发展有直接的推动。数学模型课程,强调直接从实际问题中提出数学问题,然后选择恰当的数学方法加以解决,教学生善于从实际问题中提出数学问题。对于广大学习数学课程的学生来说,这也是提高其数学素质的重要途径,是培养学生用数学工具解决实际问题的桥梁。而且,在建立数学模型解决实际问题的过程中,同样可以加强对学生逻辑推理能力的训练。所以,在工科数学教育的全过程中,贯彻数学建模思想,应是当今工科数学教材建设的一个重要方面。

### 三、增加数学实验,让现代计算机的高科技成果能及时溶于古老的数学科学中,大大提高数学解决实际问题的能力

现代计算机科学取得了举世瞩目的成就。大量的功能强大的数学软件的出现、计算机辅助教学(悦馨)技术的发展,使得过去很多繁琐的数学计算变得轻而易举,很多抽象难懂的数学概念可以直观显示,很多一时还找不到恰当数学模型描述的复杂系统可通过计算机模拟,求得其满足应用需要的数值解。在计算机技术日益普及的新时代,若数学科学不抓住这一机遇,用最先进的技术手段武装自己,将会大大降低数学科学的作用与地位。在工科数学课中引入计算机技术,应当是编写新教材的指导思想之一。完成这一任务的恰当手段,就是在相关课程中增加数学实验,或在需要的专业单独开设数学实验课。

根据上述三方面的设想,在工科数学基地的教材建设中,必须编写新的教材,如《经济数学模型》、《数学实验》、《市场调查与市场预测的数学方法》;同时,也要将传统的高等数学、工科数学各课程根据上述原则加以改造。这就要求我们编写与时代要求相适应的工科系列教材。我们希望通过这套教材的陆续出版,能对面向 21 世纪的数学教育改革做一些探索性的工作。同时,我们也热切希望国内的同行、专家参加并指导我们的编写工作。这套教材包括了本系参加此项工作的教师教学与教材研究成果,借此对各位辛勤工作的老师表示感谢。

华南理工大学应用数学系 汪国强

# 前 言

数学分析是大学数学系最重要的基础课程。随着市场经济的发展和高等教育的逐步普及,社会对毕业生的需求也逐步多样化。因此,数学分析课程的内容也必然要有多种不同的层次,需要编写具有各种不同特色的教材。目前,数学系大量学生毕业后从事开发计算机软件、管理信息系统及其管理工作,进一步深造的学生也多数从事应用性强的工作。面对这部分学生,数学分析课程的教学应该达到哪些目的呢?

数学分析课程的主要内容,是极限(其中最主要的部分是微积分)的基础理论。数学是在人类的生产实践中产生、发展的。研究数学的目的,就是利用数学模型认识客观世界。各种数学模型必然是客观事物的近似的、简化的反映。为了定量地研究这种反映的近似程度,产生了极限理论。通过有限逼近无限,又利用无限来把握有限,这就是极限理论的精髓。因此,使学生了解逼近的思想以及相关的数学建模思想,初步掌握极限的初步理论,应该是数学分析教学最重要的任务。数学分析课程的另一重要任务,是培养学生逻辑思维的能力。过去有一种看法,以为从事应用工作,对逻辑思维能力的要求可以低一些,可以不要求那么严密。在教学实践中,我们认识到,从事应用工作同样需要严密的逻辑思维。可以说,任何创造性的工作都离不开严密的逻辑思维和推理。在数学建模中,面对复杂的问题,哪些是主要因素,哪些是次要因素,哪些是推测猜想,哪些是经过严密推理得到的可靠结论,都需要严密的逻辑思考。编制、使用计算机软件,同样对学生的逻辑推理能力提

出了更高的要求。当然,数学分析课程只能提供这方面的最基本训练,进一步的提高要在后续课程以及学生的未来工作实践中进行。然而,数学分析课程应该为培养学生的逻辑思维能力打下坚实的基础,这一点也是数学界所公认的。培养学生的运算能力,也应该是数学分析课程的重要任务。无论数学建模、逻辑推理或编制程序,都离不开运算。所以,这几方面的任务,实际上是一个统一的整体,是相辅相成的。在计算机软件迅速发展的今天,学生除了掌握传统的运算能力,也应该掌握一些常见的计算机软件。不过,我们在这方面的实践还不多,有待今后的研究和探讨。

近年来,许多兄弟院校陆续出版了各种风格的数学分析教材,进行了许多很好的探索,很值得我们学习。不过,这些教材多数适用于理论性较强的专业,对一些侧重于应用的专业不太适应。因此,我们在多年教学实践的基础上编写了此教材,其中多数内容曾在历年的教学中使用过。在本教材中,我们注意将现代数学的基本思想,如集合、映射、逼近等贯穿在教材中,以使学生对这些基本思想有初步的理解。我们还注意加强数学建模思想的培养,特别注意选取经济、管理方面的实例,以扩大学生的视野。为了培养学生的逻辑思维能力,在介绍定理证明的思路的同时,尽量把定理证明写得更严格、更清楚,这对后续数学课程较少的专业是很有必要的。我们发现,数学归纳法和反证法这两种推理方法,是最急需而学生又不易掌握的方法,所以,我们适当加强了这方面的训练。对计算机软件的学习,我们认为在数学实验课中学习较为合适,所以这次没有编入。为了适应不同层次学生的需要,习题分为A、B两组,其中A组习题反映了较高要求,大多数学生可以不做。另外,还在每章的最后一节(题为“补充定理与例题”),编入一些选学材料,以便学有余力的学生课外学习之用。

参加本书编写的有:洪毅、徐永汉、周佐衡、傅一平、傅红卓。限于我们的水平和条件限制,本书难免存在着缺点和错误,但我们