础工科数学基

（ 上 册 ）

董加礼 孙丽华 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材。

本书面向重点院校，兼顾一般院校。与其他同类教材相比，本书具有以下明显的特点：1．本书是模块式的分流培养教材，全书分为三个层次，第一层次适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求相对较少的少数专业；第二层次适用于重点院校的多数专业及一般院校中对数学要求较高的少数专业；第三层次适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及各专业中的数学爱好者。其关系是在第一层次的基础上讲第二层次，在第一、二层次的基础上讲第三层次，这样做符合21世纪初的教育发展规律，它适用于各种不同的教学要求，使用起来非常方便。2．强调发散思维教学。本书对最重要的概念和定理，尽可能地从几何或物理的实际背景提出问题，然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论，最后归纳出定义和定理，这种富于启发式的写法有利于培养学生的创新意识和创新能力。3．对微积分的体系和内容作了一定的调整和改变。

本书为上册，主要内容为分析引论和一元函数微积分；下册主要内容为多元函数微积分，函数项级数及常微分方程，现代分析初步。

本书可供高等学校理工科非数学类专业作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学基础. 上册　董加礼, 孙丽华　主编. —北京:
高等教育出版社,2001
面向21世纪课程教材
ISBN 7-04-009316-2

Ⅰ.工…　Ⅱ.①董…②孙…　Ⅲ.高等数学-高等学校-
教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第10491号

责任编辑　徐　刚　封面设计　张　楠　责任绘图　黄建英
版式设计　马静如　责任校对　许月萍　责任印制

工科数学基础　上册
董加礼　孙丽华　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http: www.hep.edu.cn http: www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷			
开　本	787×960　1/16	版　次	年　月第　版
印　张	21.75	印　次	年　月第　次印刷
字　数	400 000	定　价	18.50元

目　　录

前言 …… 1

第一篇　分析引论

第一章　集合与映射 …… 1
第一节　集合及其运算 …… 1
1.1　集合的概念与记号 …… 1
1.2　集合的运算 …… 2
1.3　集合的运算法则 …… 3
1.4　乘积集 …… 4
习题 1.1 …… 4
第二节　实数集及其完备性 …… 5
2.1　实数集的性质与不等式 …… 5
2.2　常量和变量 …… 6
2.3　区间集和邻域 …… 6
*2.4　实数集的完备性与确界公理 …… 7
习题 1.2 …… 9
第三节　映射与函数 …… 9
3.1　映射概念及相关问题 …… 10
3.2　函数概念及其运算 …… 11
3.3　函数的几种特性 …… 17
3.4　函数应用举例 …… 18
习题 1.3 …… 21
第二章　极限 …… 24
第一节　无穷小量与无穷大量 …… 24
1.1　无穷小量与无穷大量的概念 …… 25
1.2　无穷小量与无穷大量的运算 …… 27
习题 2.1 …… 29
第二节　变量的极限及其性质 …… 31
2.1　变量的极限概念 …… 31
2.2　函数的极限 …… 32
2.3　变量极限的性质 …… 36
习题 2.2 …… 37

第三节 极限的运算法则 …… 39
3.1 四则运算法则 …… 39
3.2 夹逼法则 …… 42
3.3 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 42
3.4 复合运算法则 …… 43
习题 2.3 …… 45
第四节 单调有界原理与无理数 e …… 46
4.1 单调有界原理 …… 47
4.2 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ …… 49
习题 2.4 …… 50
第五节 无穷小量的阶 …… 51
5.1 无穷小量的阶 …… 51
5.2 利用无穷小量等价代换求极限 …… 52
习题 2.5 …… 53
*第六节 极限概念的推广 …… 54
*第七节 极限应用举例 …… 54
*习题 2.7 …… 59
第三章 连续函数 …… 61
第一节 函数的连续性概念、间断点及其分类 …… 61
1.1 函数的连续性概念 …… 61
1.2 函数的间断点及其分类 …… 63
习题 3.1 …… 64
第二节 连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 65
2.1 连续函数的和、差、积、商的连续性 …… 65
2.2 反函数的连续性 …… 66
2.3 复合函数的连续性 …… 66
2.4 初等函数的连续性 …… 66
2.5 利用初等函数的连续性求极限 …… 67
习题 3.2 …… 68
第三节 闭区间上连续函数的性质 …… 69
3.1 闭区间上连续函数的有界性与最值性质 …… 69
3.2 闭区间上连续函数的介值性质 …… 70
习题 3.3 …… 72
第四章 常数项级数 …… 74
第一节 数项级数的概念与性质 …… 74
1.1 数项级数概念 …… 74
1.2 数项级数的性质 …… 77

习题 4.1 …… 78
第二节　正项级数的收敛判别法 …… 79
2.1　正项级数的收敛准则 …… 79
2.2　比较判别法 …… 80
2.3　比值判别法 …… 82
2.4　根式判别法 …… 84
习题 4.2 …… 85
第三节　任意项级数的收敛判别法 …… 86
3.1　交错级数及其收敛判别法 …… 86
3.2　绝对收敛与条件收敛 …… 87
*3.3　级数的乘法运算 …… 89
习题 4.3 …… 90
第五章　极限概念的精确化与实数基本定理 …… 92
*第一节　极限概念的精确化 …… 92
1.1　过程的数学描述 …… 92
1.2　函数极限的精确定义 …… 94
1.3　用精确的极限定义论述极限问题 …… 95
*习题 5.1 …… 99
**第二节　实数基本定理 …… 100
2.1　单调有界原理的证明 …… 100
2.2　区间套定理 …… 101
2.3　致密性定理 …… 102
2.4　Cauchy 收敛准则 …… 104
**习题 5.2 …… 107
**第三节　闭区间上连续函数性质的证明 …… 108
3.1　有界性定理 …… 109
3.2　最大(小)值定理 …… 109
3.3　介值定理 …… 111
**习题 5.3 …… 111
**第四节　函数的一致连续性 …… 112
4.1　函数的一致连续性概念 …… 112
4.2　Cantor 一致连续性定理 …… 114
**习题 5.4 …… 115

第二篇　一元函数微积分

第六章　导数与微分 …… 117
第一节　导数概念 …… 117
1.1　引出导数概念的几个经典问题 …… 117

1.2 导数定义 …… 120

1.3 求导举例 …… 122

1.4 函数的可导性与连续性的关系 …… 124

1.5 导数在经济学中的一个应用——边际成本 …… 125

习题 6.1 …… 126

第二节 求导法则 …… 128

2.1 函数和、差、积、商的求导法则 …… 129

2.2 反函数的求导法则 …… 130

2.3 复合函数的求导法则——链式法则 …… 132

2.4 初等函数的导数 …… 134

2.5 隐函数求导法 …… 134

2.6 由参数方程所确定的函数的求导法 …… 136

2.7 高阶导数 …… 138

2.8 导数应用举例 …… 140

习题 6.2 …… 142

第三节 微分 …… 146

3.1 微分概念 …… 146

3.2 微分运算法则 …… 148

*3.3 高阶微分 …… 149

3.4 利用微分作近似计算 …… 150

习题 6.3 …… 151

第四节 利用导数求极限——L'Hospital 法则 …… 153

4.1 $\frac{0}{0}$型未定式的极限 …… 153

4.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限 …… 155

4.3 其他类型未定式的极限 …… 156

习题 6.4 …… 158

第七章 微分中值定理与 Taylor 公式 …… 160

第一节 微分中值定理 …… 160

1.1 Lagrange 微分中值定理的发现 …… 160

*1.2 Lagrange 微分中值定理的证明 …… 162

*1.3 Lagrange 微分中值定理的推广——Cauchy 中值定理 …… 164

习题 7.1 …… 166

第二节 Taylor 公式 …… 168

2.1 Taylor 多项式与 Taylor 公式 …… 168

2.2 Taylor 公式的余项估计 …… 169

2.3 一些初等函数的 Maclaurin 公式 …… 172

2.4 Taylor 公式的简单应用 …… 173

习题 7.2 …… 175
第八章　利用导数研究函数的性态 …… 177
第一节　函数的单调性与极值 …… 177
1.1　函数的单调性 …… 177
1.2　函数的极值 …… 178
1.3　极值问题的最优性条件 …… 179
1.4　最大值与最小值 …… 182
习题 8.1 …… 184
第二节　凸函数 …… 186
2.1　凸函数概念 …… 186
2.2　判定函数凸性的充分条件 …… 187
2.3　凸函数的极值性质 …… 188
习题 8.2 …… 189
第三节　平面曲线的曲率 …… 190
3.1　弧微分 …… 190
3.2　曲率概念 …… 191
3.3　曲率的计算 …… 193
*3.4　曲率圆与曲率半径 …… 194
习题 8.3 …… 196
第九章　积分及其应用 …… 198
第一节　定积分概念 …… 198
1.1　引出定积分概念的几个经典问题 …… 198
1.2　定积分概念 …… 201
1.3　定积分的几何意义 …… 203
习题 9.1 …… 205
第二节　定积分的存在条件 …… 205
2.1　可积的必要条件 …… 205
2.2　可积函数类 …… 206
**2.3　可积性准则 …… 207
习题 9.2 …… 209
第三节　定积分的性质及积分中值定理 …… 210
3.1　定积分的性质 …… 210
3.2　积分中值定理 …… 212
**3.3　可积函数的一些性质 …… 214
习题 9.3 …… 216
第四节　微积分基本定理 …… 217
4.1　Newton - Leibniz 公式 …… 218
4.2　原函数存在定理 …… 220

习题 9.4 …… 223
第五节 不定积分 …… 225
5.1 不定积分的概念及性质 …… 225
5.2 基本积分表 …… 225
5.3 积分法则 …… 226
习题 9.5 …… 231
第六节 积分的计算 …… 233
6.1 换元积分法 …… 233
6.2 分部积分法 …… 239
6.3 积分表的使用方法 …… 243
习题 9.6 …… 245
第七节 反常积分 …… 248
7.1 无穷区间上的积分 …… 248
7.2 无界函数的积分 …… 251
*7.3 反常积分的收敛判别法 …… 253
*7.4 绝对收敛 …… 257
习题 9.7 …… 258
第八节 定积分应用举例 …… 259
8.1 总量的可加性与微元法 …… 260
8.2 几何应用举例 …… 260
8.3 物理应用举例 …… 264
习题 9.8 …… 268
第九节 微分方程的初等积分法 …… 270
9.1 微分方程的几个基本概念 …… 271
9.2 一阶变量分离方程 …… 274
9.3 一阶齐次微分方程 …… 276
9.4 一阶线性微分方程 …… 278
9.5 利用变量代换求解微分方程 …… 282
9.6 可降阶的高阶微分方程 …… 283
9.7 应用举例 …… 287
习题 9.9 …… 290
积分表 …… 294
习题答案与提示 …… 303
主要参考书 …… 333

前　　言

本书是按照教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"立项课题《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材。

按照课题组的要求,本书的宗旨是:面向重点院校,兼顾一般院校。教材为模块式的分流培养模式。全书分三个层次,各层次的适用范围、要求和学时如下:

第一层次(不带"*"者)适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求相对较少的少数专业。本层次主要讲授微积分中最基本的概念、理论和方法,要求学生较好地理解和掌握微积分的基本思想,培养学生用微积分解决具体问题的初步能力。对微积分中的某些理论问题不追求严格性,尽可能从几何或物理直观给出易于接受的说明。学时为106(不包括向量代数和空间解析几何)。

第二层次(第一层次加"*"者)适用于重点院校中的多数专业及一般院校中对数学要求较高的少数专业。本层次在第一层次的基础上,对某些理论问题给出严格论证,同时还要适当扩大知识面,加强抽象思维、逻辑推理以及数学语言的运用和表达等方面的严格训练。学时为106 + *43 = 149。

第三层次(第二层次加"**"者)适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及各专业中的数学爱好者。这个层次是在第一、二层次的基础上,进一步讲授一些现代分析的初步知识,并对某些问题开设一定的"窗口",以及扩大学生的知识面和思维视野,为培养学生向研究型人才发展奠定更高的数学基础。学时为106 + *43 + **39 = 188。

与其他教材相比,本书具有以下几个明显的特点:

1. 本书是模块式的分流培养教材。全书三个层次之间的关系是在第一层次的基础上讲第二层次,在第一、二层次的基础上讲第三层次,因此这是一套书的三个层次,而不是三套书。这样做符合21世纪初的教育发展规律,它适用于各种不同的教学要求,使用起来非常方便。

2. 强调发散思维教学。本书对最重要的概念和定理,尽可能地从几何直观或物理的实际背景提出问题,然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论,最后归纳出定义和定理;打破了通常教材中从定义出发,给出定理,再进行证明的传统讲法。这种富于启发式的写法有利于培养学生的创新意识和创新能力。

3. 对微积分的体系和内容作了较大的调整和改变。如数项级数提前到极限后面;先讲定积分后讲不定积分;微分方程的初等积分法放在不定积分中;重

积分与第一型线、面积分统一处理等。除上述体系上的改变之外,最重要的是对教学内容进行了较大幅度的调整和重新处理,其中变动较大的有:

(1) 将极限分两步讲,先用无穷小量讲变量的极限(只出现 ε),待讲完连续函数和数项级数之后,再将极限概念精确化。这样既恢复了无穷小分析的本来面貌,又分散了难点,同时便于适应分流的需要。

(2) 对一元函数的微分和多元函数的全微分直接用导数和偏导数给出定义。这样不但便于讲授,节省篇幅,最重要的是能较好地揭示全微分与微分之间的关系。

(3) 从定积分的计算出发引出不定积分,并淡化了不定积分的运算技巧。此外,还将积分的第一换元法(凑微分)提前讲授,这样做不但方法易于掌握,而且非常实用。

(4) 关于多元函数的极值问题,我们在不增加内容和难度的基础上,用现代优化的观点来讲授,使得该问题更贴近于实际实用。

(5) Fourier 级数部分主要讲授 $[-\pi,\pi]$ 和 $[-l,l]$ 上的展开问题,最后提一下奇、偶延拓,使得这部分内容非常精练和简明。

(6) 微分方程则以线性微分方程和方程组为主线讲授,并增设了稳定性理论简介的“窗口”,使得这部分内容提高一个较大的档次。

(7) 关于现代分析,我们十分强调问题的来龙去脉和基本思路,并用较完整的框架介绍了 Lebesgue 积分大意和泛函分析初步。

4. 重视应用。本书除了一些经典的几何或物理问题之外,每一章都尽可能地举一些新颖的实例,以培养学生用数学方法解决实际问题的意识、兴趣和能力。

5. 在正文中用小字对微积分中所涉及到的三十多位数学家的生平、贡献作了不同程度的介绍,目的在于培养学生热爱科学,发奋图强,刻苦钻研的精神。

6. 书中留有很多思考题,这有利于培养学生的独立思考能力。

在使用本书时,必须同步开设线性代数与空间解析几何,并且要在讲授本书下册之前完成。建议各章的参考学时数如下,其中ⓘ表示第 i 章。①5 + *1 = 6,②10 + *2 = 12,③5,④6,⑤*3 + **7 = 10,⑥11,⑦4 + *2 = 6,⑧6 + *1 = 7,⑨20 + *2 + **2 = 24。上册共 67 + *11 + **9 = 87 学时。⑩16 + *7 + **1 = 24,⑪9 + *6 + **3 = 18,⑫5 + *6 + **4 = 15,⑬9 + **3 = 12,⑭*13 + **4 = 17,⑮**7,⑯**8。下册共 39 + *32 + **30 = 101 学时。按照我们的构想和试点,在规定的学时之内,可以完成本书的教学内容。我们希望着力阐述微积分的基本思想而不要把它变成以解题为主的习题课。因此,凡是基本概念和重要理论及方法都要不惜时间去揭示问题的本质和来龙去脉,至于书中的例题可以根据情况进行删减。只有这样,才能使读者掌握微积分,会用微积分,这是本书的指导思想。书中每节都配有相应的习题,并分(A)、(B)题两种,一般的(A)题为基本题,(B)题中有的稍难。习题中的“*”与“**”题是与正文配套的,不是难题,也不是可作可不作的题。

本项目的前期工作是从 1993 年秋季开始的，当时编写了高等数学改革试点讲义(1998 年由大连理工大学出版社出版)，并在大连理工大学和原吉林工业大学进行改革试点，其中原吉林工业大学从 95 级至今全校使用该教材。该项改革于 1997 年获国家级优秀教学成果二等奖。在此基础上，从 1996 年开始，参加原国家教委的立项课题，并进行分流培养模式的教材编写工作，书名为《工科数学基础》。开始时是按照上册《微积分》，中册《无穷级数与微分方程》，下册《现代分析初步》共三册进行编写和试点的。后来按照审稿组的意见，于 1999 年春季，又在原教材的基础上，重新拟定了编写大纲，将原来的三册改为上、下两册，体系和内容均作了较大的改动，并由董加礼和孙丽华担任主编。施光燕始终是本项目的主持人，并审阅了全部书稿，因此实际上他也是主编之一。

参加编写的同志分工如下：

第 1～5 章由董加礼执笔，第 6～8 章由曹铁川执笔，第 9 章的§1～§8 由贺明峰执笔，第 10 章由黄万风执笔，第 11 章由张魁元执笔，第 12 章由高文森执笔，第 13 章由施光燕执笔，第 14 章及其他部分的微分方程内容由孙丽华执笔，第 15、16 章由施光燕和董加礼执笔。罗远诠参加了 1999 年编写大纲的讨论。书中数学家小传大部分是孙丽华编写的，其余部分是董加礼补写的。

由于本书的执笔人较多，为了使本书在文笔和风格上统一，内容浑然一体，主编对初稿的文字和表述方式进行了认真的润饰，并对部分内容进行了适度修改。修改后的书稿交回原作者复校，最后由主编统校定稿。

我们真诚地感谢主审王绵森教授、赵中时教授、谢国瑞教授和课题组的总负责人马知恩教授，他们对本书的编写原则和大纲，特别是对书稿进行了多次非常认真的审阅，提出了大量的宝贵意见和建议，大到原则性问题，小到用词和错字，有些意见甚至达到最后定稿的程度，使作者深受感动。感谢高等教育出版社的文小西编审，他始终关心本书的编写和出版，并提出很多带有方向性的意见和建议。所有这些意见和建议对本书的最后完善和定稿起到了至关重要的作用。

我们还要感谢原吉林工业大学和大连理工大学教务处和两校数学系的多方关照，没有他们的关心和支持，这项改革是不可能顺利进行的。

应该说，这本教材确是集体智慧和劳动的结晶。尽管本书历经 5 年，几次易稿，多次试点，但终因受编者的学术水平和教学经验所限，特别是作为面向 21 世纪的改革教材，还需进一步研究和探索，加之最后成书的时间尚显仓促，因此书中不妥之处甚至错误之处在所难免，诚恳地期盼有关专家、各校同行及广大读者给予批评指正，编者这里预致谢意。

编写组

2000 年 10 月

第一篇　分 析 引 论

本书内容的核心是微积分.微积分研究的对象是函数,所用工具是极限.我们将函数概念和极限理论的有关基本知识作为首篇来讲述.主要包括集合与映射,极限概念与运算,连续函数,常数项级数,以及极限概念的精确化与实数基本定理等.因为这些内容不仅是经典分析——微积分的基础,同时它也渗透着现代分析数学的基本思想,正因为如此,我们将这些内容放在一起,并名曰“分析引论”.

第一章　集合与映射

集合与映射都是数学中最基本的概念,它们在现代数学和工程技术中都有非常重要的作用.

本章首先介绍集合的概念、运算和性质,然后简要介绍实数集及其完备性,最后在映射的观点下讲述函数及其特性.

第一节　集合及其运算

大家对集合并不陌生,在中学里都学过,但那里主要侧重于集合的某些经典问题及相关的求解等,这里将着重介绍科学技术中常用的集合记号、运算和性质.

1.1　集合的概念与记号

我们将具有某种确定性质的事物的全体叫做一个集合,简称集.组成集的事物称为该集的元素.例如,教室中所有的学生组成一个集合,它的元素是学生;实数的全体组成一个实数集,它的元素是实数等等.

通常用大写的拉丁字母 A、B、$C\cdots$, X、Y、$Z\cdots$表示集合;用小写的拉丁字母 a、b、$c\cdots$, x、y、$z\cdots$表示集合的元素.若 x 是集合 A 的元素,则说 x 属于 A,记作 $x\in A$;否则说 x 不属于 A,记作 x|　A 或 xú　A.含有限个元素的集合称为有限集;不含任何元素的集合称为空集,用　表示;不是有限集也不是空集的集

合称为无限集.

集合的表示方法有两种:一种是列举法,即把它的所有元素都列出来,写在一个花括号之内.例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集可以表示为 $X=\{-1,1\}$;又如,自然数组成的数集可以表示成 $N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$等等.另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质,即将具有性质 $p(x)$的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x \mid x\text{具有性质 }p(x)\}\text{ 或 }A=\{x;x\text{具有性质 }p(x)\}.$$

例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集 X 和自然数集 N 也可分别表示成

$$X=\{x \mid x^2-1=0\}\text{ 和 }N=\{n \mid n=0,1,2,\cdots\}.$$

又如,

$$D=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$$

表示 $x0y$ 平面上以原点为中心,边长为 2 的正方形内的所有点(包括边界上的点)组成的点集.

1.2　集合的运算

假设 A、B 是两个集,若 A 的每个元素都是 B 的元素,则说 A 是 B 的子集,记作 $A\quad B$(或 $B\quad A$),读作 A 含于 B(或 B 包含 A);若 $A\quad B$,且确有元素 $a\in B$,但 $a|\ A$,则说 A 是 B 的真子集,记作 $A\quad B$. 对任何集 A,规定 $\quad A$,且显然有 $A\quad A$.又如果 $A\quad B$, $B\quad C$,则 $A\quad C$.

假设 A, B 是两个集,若 $A\quad B$ 且 $B\quad A$,则说 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

两个集合相等的概念虽然简单,但很重要,许多复杂的集合等式都是用它来验证的.

设 A、B 是两个集,我们规定

$$A\cup B\xlongequal{\text{def}}\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\},$$

$$A\cap B\xlongequal{\text{def}}\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$

$$A\setminus B\xlongequal{\text{def}}\{x \mid x\in A\text{ 但 }x|\quad B\},$$

并分别称为 A 与 B 的并集,交集,差集,简称并,交,差;这里记号"$\xlongequal{\text{def}}$"表示"被定义为"(以后不再说明).

实际上,A 与 B 的并集就是 A 与 B 的所有元素放在一起作成的集,但相同的元素只取一次;交集则是 A 与 B 的共同元素所作成的集;差集 $A\setminus B$ 是由属于 A,而不属于 B 的元素所作成的集,如图 1.1 所示的阴影部分.

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},\ A\cap B=\{3,4\},\ A\setminus B=\{1,2\}.$$

图 1.1

差集 $A\setminus B$ 并不要求 A　B. 如果 A　B,则称差集 $A\setminus B$ 为 B 在 A 中的补集或余集,记作 $C_A B$. 在研究某个问题时,如果所考虑的一切集都是某个集 X 的子集,则称 X 为基本集. X 中的任何集 A 关于 X 的余集 $X\setminus A$ 常简称为 A 的补集或余集,记作 $C A$

注意,两个集的并与交可以推广到任意多个集的并与交.

若 $A\cap B=$　,则说 A 与 B 不相交;若 $A\cap B\neq$　,则说 A 与 B 相交.

1.3　集合的运算法则

法则 1　设 A、B、C 为任意三个集合,则下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;

(4) 幂等律　$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(5) 吸收律　$A\cup$　$=A$, $A\cap$　$=$　.

法则 2　设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集合,则下列法则成立:

(1) 若 A_i　$C(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$　C;

(2) 若 A_i　$C(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$　C.

法则 3　设 X 为基本集, $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集合,则

$$C\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcap_{i=1}^{\infty} CA_i,\quad C\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} CA_i,$$

即一列集的并的余集等于它们余集的交,一列集的交的余集等于它们余集的并.

以上法则只要根据集合并、交、差以及集合相等的定义即可验证. 这里只验证法则 3 的第一个结论,其余留给读者作练习.

设 $x\in C\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,则 $x|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,从而 $x|$ $A_i(i=1,2,\cdots)$. 这说明 $x\in$

$C A_i (i = 1, 2, \cdots)$，于是 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C A_i$，即 $C \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \quad \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C A_i$.

反之，设 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C A_i$，则 $x \in C A_i$，从而 $x \mid \ A_i (i = 1, 2, \cdots)$. 这说明 $x \mid \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，于是 $x \in C \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，即 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C A_i \quad C \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 故 $C(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C A_i$.

法则 3 的后半部分类似可证.

1.4　乘积集

设 A、B 是两个集合，则称

$$A \times B \overset{\text{def}}{=\!=} \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

为 A 与 B 的乘积集.

图 1.2

例如，$A = (-1, 1)$，$B = [0, 1]$，则 $A \times B = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 为图 1.2 中的集合. 又如，用 R 表示实数的全体所作成的集合，则 $R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ 就表示整个坐标平面，记作 R^2，即 $R^2 = R \times R$.

习题 1.1

(A)

1. 请将下列集合表示出来：

(1) 大于 5 的所有整数的集合；

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内部(不含圆周)的一切点的集合；

(3) 函数方程 $\sin x = 0$ 的一切根的集合.

2. 设 $A = \{x \mid 3 < x < 5\}$，$B = \{x \mid x > 4\}$，求

(1) $A \cup B$；　(2) $A \cap B$；　(3) $A \setminus B$.

3. 设 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，$C = \{2, 4, 6\}$，求

(1) $A \cup B \cup C$；　(2) $A \cap B \cap C$；　(3) $A \setminus B$.

4. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 4, 6\}$，求

(1) $C A$；　(2) $C B$；　(3) $(C A) \cup (C B)$；　(4) $(C A) \cap (C B)$.

(B)

1. 证明 $A \setminus B = A \cap C B$.

2. 证明法则 2.

3. 集合等式 $A \cup (B \setminus A) = B$ 是否成立？为什么？

4. 判定下列命题是否正确，正确的给出证明，否则举出反例：

(1) 若 $A \cup B = A \cup C$，则 $B = C$；

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

第二节　实数集及其完备性

我们把全体实数构成的集合叫实数集,并用 R^1 或 R 表示.本节将从直观上简要介绍实数集的性质,区间集,以及实数集的完备性.

2.1　实数集的性质与不等式

实数集的下述性质大家是熟悉的,但它的严格证明却很麻烦,需要用到实数理论.

1°实数集对四则运算(即加、减、乘、除)是封闭的,即任意两个实数进行加、减、乘、除(除法要求分母不为零)运算后,其结果仍是实数.

2°实数集是有序集,即任意两个实数 a 与 b,必满足且仅满足下列关系之一:

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b,$$

且若 $a<b$, $b<c$,则 $a<c$.

3°实数集是稠密集, 即任意两个实数之间仍有实数.特别地,有理数和无理数在实数集中是稠密的,即任意两个有理数之间必有有理数,任意两个无理数之间必有无理数.

下面介绍几个常用的不等式.

实数 a 的绝对值$|a|$定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

容易推出三角形不等式:

$$|a+b|\leq|a|+|b|,$$

$$||a|-|b||\leq|a-b|.$$

利用数学归纳法易证:任意 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足不等式

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

平均值不等式:设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个非负实数,则其几何平均值不超过其算术平均值,即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证　用数学归纳法. $n=1$ 时,上式以等式形式成立.假设对任意 $n-1$ 个非负实数不等式成立,我们证对任意 n 个非负实数不等式也成立.

不妨设 x_n 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的最大数,并令