高等学校教材

工科数学分析

上　　册

第　二　版

张宗达　主编

张宗达　刘锐　王勇　盖云英　唐余勇　编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址：

电　　话：(010) 84043279　13801081108

传　　真：(010) 64033424

E - mail：dd@hep .com .cn

地　　址：北京市东城区沙滩后街 55 号

邮　　编：100009

策划编辑　李艳馥

编　　辑　李艳馥

封面设计　于文燕

责任绘图　吴文信

版式设计　胡志萍

责任校对

责任印制

内容简介

《工科数学分析(第二版)》是在第一版的基础上修改而成的,分上、下两册.上册共八章:函数,极限与连续,导数与微分,微分中值定理,不定积分,定积分,导数与定积分的应用,微分方程.下册共六章:多元函数微分学,多元函数积分学,第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场,无穷级数,复变函数初步,微分几何基础知识.每章后有供自学的综合性例题,并以附录形式开了一些新知识窗口.

本书可作为工科大学本科一年级新生数学课教材,也可作为准备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书.

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街55号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷

开 本 787×960 1/16
印 张
字 数

版 次 2001年6月第1版
印 次 年 月第 次印刷
定 价 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

前　言

培养基础扎实、勇于创新型人才,历来是大学教育的一个重要目标.随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出.在工科大学教育中,数学课既是基础理论课程,又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用.为适应培养21世纪工程技术人才对数学的要求,我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神,结合哈尔滨工业大学多年来教学改革的经验,编写了这本教材.

本教材的编写力求具有以下特色:

1.重视对学生能力的培养,注意提高学生基本素质.对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入.取材上,精选内容,突出重点,强调应用,注意为学生创新能力的培养奠定基础.

2.例题和习题丰富,特别是综合性和实际应用性的题目较多,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力.

3.为了拓宽知识面,培养复合型人才,增加了复变函数简介,微分几何基础知识,微分方程组与稳定性概念,以简介和附录的形式为进一步学习现代数学知识留下接口.

4.在内容编排上,统一处理了多元函数积分学的概念,以利于提高学生抽象思维能力,将第二型线、面积分与场论结合起来,突出了理论的物理背景.

5.在微分方程和多元函数微分学中加强了代数知识的运用.

6.由于计算机技术的发展,数学软件包已得到广泛的使用,因而全书适度淡化了一些计算技巧的训练.

此外,考虑到后续课程的需要,调整了部分内容的顺序,如将微分方程主要内容放在上册,而将无穷级数放在第二型线、面积分之后.

哈尔滨工业大学富景隆、杨克劭、金永洙、万大成教授和南京师范大学宣立新教授对本书的编写工作给予了热情的支持,提出了许多改进意见和建议.作为教材,本书曾在哈尔滨工业大学、东北电力学院和东北林业大学等院校试用多年,任课的老师也提出了不少宝贵意见.在此一并表示衷心的感谢.本次修订主要调整了一小部分内容的次序,增补少量习题,修改已发现的错误.

由于编者水平有限,书中错误、缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正.

编者

2002年9月

目　录

第一章　函数 ……

1.1　函数的概念 ……
1.2　几个常用的概念 ……
1.3　初等函数
1.4　例题
习题一 ……

第二章　极限与连续 ……

2.1　数列的极限 ……
2.2　函数的极限 ……
2.3　极限的性质、无穷小与无穷大 …
2.4　极限的运算法则 ……
2.5　极限存在准则,两个重要极限 …
2.6　无穷小的比较 ……
2.7　函数的连续性 ……
2.8　例题 ……
习题二 ……
附录Ⅰ　几个基本定理 ……
附录Ⅱ　上、下极限 ……

第三章　导数与微分 ……

3.1　导数概念 ……
3.2　导数的基本公式与四则运算求导法则 ……
3.3　其他求导法则 ……
3.4　高阶导数 ……
3.5　微分 ……
3.6　例题 ……
习题三 ……
附录Ⅲ　广义导数 ……

第四章　微分中值定理 ……

4.1　微分中值定理 ……
4.2　洛必达法则 ……
4.3　泰勒公式 ……
4.4　例题 ……
习题四 ……
附录Ⅳ　数学分析中的论证方法 ……

第五章　不定积分 ……

5.1　原函数与不定积分 ……
5.2　换元积分法 ……
5.3　分部积分法 ……
5.4　几类函数的积分 ……
5.5　例题 ……
习题五 ……

第六章　定积分 ……

6.1　定积分的概念与性质 ……
6.2　微积分学基本定理 ……
6.3　定积分的计算 ……
6.4　反常积分 ……
6.5　例题 ……
习题六 ……
附录Ⅴ　勒贝格积分 ……

第七章　导数与定积分的应用 ……

7.1　极值与最大(小)值的求法 ……
7.2　函数的分析作图法 ……
7.3　曲线的弧长与弧微分、曲率 ……
7.4　定积分的应用举例 ……
*7.5　微积分学在经济学中的应用 ……
7.6　例题 ……
习题七 ……

第八章　微分方程 ……

8.1　微分方程的基本概念 ……

需要全本请访问 www.ertongbook.com

8.2 一阶微分方程 ……
8.3 几种可积的高阶微分方程 ……
8.4 线性微分方程(组)及其通解的结构 ……
8.5 常系数齐次线性微分方程(组) ……
8.6 常系数非齐次线性微分方程(组) ……
8.7 几何方法初步 ……
习题八 ……
习题答案 ……
附图 ……
符号和索引 ……
希腊字母表 ……
学习参考书 ……

第一章　函　　数

在中学的数学课里,对函数的一些基本概念已经作了介绍,由于函数是大学数学分析的研究对象,所以有必要对有关的知识进行简要的复习和进一步的讨论 .

1 .1　函数的概念

1 .1 .1　实数与数轴

实数包括有理数和无理数(无限不循环小数),有理数又分为正、负整数、分数和零 .

取定了原点、长度单位和方向的直线叫做数轴(图 1 .1) .实数与数轴上的点是一一对应的,有理数对应的点叫有理点,无理数对应的点叫无理点 .

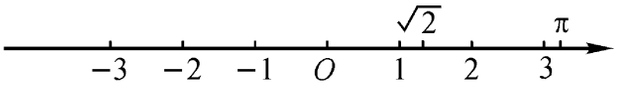

图 1 .1

实数具有如下两个性质:

1°　有序性　任意两个互异的实数 a, b 都可比较大小,或者 $a < b$,或者 $a > b$.实数按照由小到大的顺序排列在数轴上 .

2°　完备性　因为任何两个有理点 a, b 之间都有一个有理点 $\frac{a+b}{2}$,从而它们之间有无穷多个有理点,我们说有理点处处稠密 .但有理点并未充满整个数轴,比如还有 $\sqrt{2}$,π 这样一些无理点 .因为有理数与无理数之和为无理数,所以无理点也处处稠密 .实际上,无理数远比有理数多得多 .实数充满整个数轴,没有空隙,这就是实数的完备性(或连续性) .

1 .1 .2　数集与界

以数为元素的集合叫做数集 .如自然数集、整数集、有理数集等 .所有实数构成的数集叫做实数集,习惯以 $\mathbf{R}$ 表示 .今后常常用到区间这一概念,它是 $\mathbf{R}$ 的一类子集 .

设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$,以 a, b 为端点的有限区间包括:

开区间:$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$;

闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

半开区间: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$.

在数轴上它们是介于点 a 与点 b 之间的线段,但开区间 (a, b) 不包含 a, b 两点,闭区间 $[a, b]$ 包含 a, b 两点,半开区间 $(a, b]$ 不包含 a 点, $[a, b)$ 不包含 b 点 称 $b - a$ 为上述有限区间的长度 .

此外,还有五种无穷区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R} .$$

上述各种区间统称为区间,有时也用相应的不等式表示区间,在没有必要指明哪种区间时,常常用一个大写的字母表示,如区间 I .

设 $\delta > 0$,称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U_\delta(x_0)$.它是以 x_0 为中心,长为 2δ 的开区间(图 1 .2) .有时我们不关心 δ 的大小,常用‘ 邻域 ”或‘ x_0 附近 ”代替 x_0 的 δ 邻域 .

称集合 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域,即 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 ,记为 $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

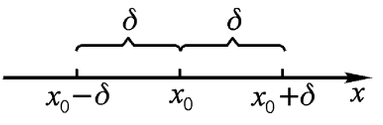

图 1 .2

定义 1 .1 对数集 X,若有常数 $M(m)$,使得

$$x \leq M \quad (x \geq m), \quad \forall x \in X,$$

则说数集 X 有上(下)界,并称 $M(m)$ 为数集 X 的一个上(下)界 .

既有上界又有下界的数集叫做有界数集,否则称为无界数集 .

显然,如果某数集有上(下)界,就有无穷多个上(下)界 比如数集 $X = \{x \mid x < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 1 是它的上界,任何大于 1 的数都是它的上界 .有最大(小)值的数集(指数集中的数有最大(小)的),必有上(下)界,但有上(下)界的数集,未必有最大(小)值 .

公理 凡非空有上界的数集 X 一定有最小上界 μ,称为数集 X 的上确界,记为

$$\mu = \sup X .$$

显然, μ 是集合 X 的上确界等价于如下两条:

1° $\forall x \in X$,必满足 $x \leq \mu$;

2° $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X$,使得 $x > \mu - \varepsilon$.

命题 非空有下界的数集 X 一定有最大下界 γ.称为数集 X 的下确界,记为 $\gamma=\inf X$.

* **证明** 设 A 为 X 的所有下界构成的集合,则 $\forall x\in X$ 都是 A 的一个上界,所以 A 非空有上界.由公理知 A 有上确界(最小上界),记为 γ.显然,$\forall x\in X$,都有 $x\geq\gamma$,即 γ 是 X 的下界.由上确界的性质 1°,$\forall a\in A$ 都有 $a\leq\gamma$,即 γ 是 X 的最大下界. □

下确界也有类似上确界的等价定义,请读者叙述它.

数集 X 的上(下)确界可能属于 X,也可能不属于 X.比如,数值 1 是集合 $\{x\mid x<1\}$和$\{x\mid x\leq 1\}$的上确界,但

$$1\notin\{x\mid x<1\},\quad 1\in\{x\mid x\leq 1\}.$$

1.1.3 绝对值

实数 x 的绝对值

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时},\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

就是说,$|x|$表示点 x 到原点 O 的距离,是非负实数.

绝对值有如下性质:

1° $|x|=\sqrt{x^2}$;　　2° $|x|\geq 0$;

3° $|-x|=|x|$;　　4° $-|x|\leq x\leq|x|$;

5° $|x+y|\leq|x|+|y|$;　　6° $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$;

7° $|xy|=|x||y|$;　　8° $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$;

9° 当 $a>0$ 时,$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$;

10° 当 $b>0$ 时,$|x|>b\Leftrightarrow x<-b$ 或 $x>b$.

要注意性质 4°,5°,6°在什么情况下才出现等号.

1.1.4 函数的概念

在一个过程中,保持数值不变的量叫做常量,习惯用英文字母表的前几个字母 a,b,c 等表示.在一个过程中,数值有变化的量叫做变量,习惯用英文字母表的后几个字母 x,y,z 等表示.

如一架飞机在飞行过程中,乘客人数、货物载重量都是常量,而燃料存余量、到目的地的距离都是变量.不难理解"变量是物质运动、变化的数量表现",所以要想掌握客观事物的运动、变化规律,从量的角度来说就必须研究变量.变量的变化不是孤立的,它与同一过程中的其他变量之间有确定的相依关系,研究变量就是要掌握这个相依关系.

例 1　在自由落体降落过程中,降落时间 t 和落下的距离 s 是两个变量,由物理的自由落体实验知,它们有如下依赖关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad \text{当 } 0\leq t\leq T \text{ 时},$$

其中 g 为重力加速度, T 是落地时间 .

例 2　金属杆受热时,杆长 l 和温度 τ 都是变量,有如下依赖关系:

$l=l_0(1+\alpha\tau)$　(在常温 20 ℃左右) .

其中 l_0 为 0 ℃时的杆长, α 是线膨胀系数 .

例 3　某地某日的气温 T 和时间 t 两个变量,已由气象台用气温自动记录仪描成一条曲线(如图 1 .3) .这个图形表示出它们的对应关系 .时间范围是区间[0,24)(时间从清晨 0 时开始计算) .

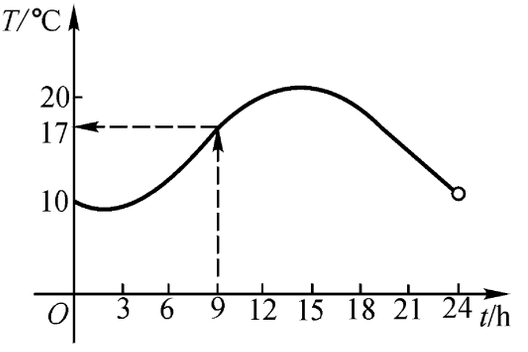

图 1 .3

例 4　某公司第四季度各月计算机销售量(台)如表 1 .1 .

月份 t 和销售量 S 两个变量有表 1 .1 中所示的依赖关系 .

表 1 .1

月　份 t	10	11	12
销售量 S	58	47	36

这些例子所表达的客观事物的实际意义及变量间的依赖关系虽然不同,但有一个共性:一个过程中的两个变量不能互不相干地任意取值,它们之间有确定的依赖关系,即数值上有确定的对应规律,使得其中一个变量在取值范围内每取得一个值时,另一个变量的值就按着这个规律确定了其对应值,把变量间的这种依赖关系叫做函数关系 .

定义 1 .2　如果两个变量 x 和 y 之间有一个数值对应规律,使变量 x 在其可取值的数集 X 内每取得一个值时,变量 y 就依照这个规律确定对应值,则说 y 是 x 的函数 .记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量 .

自变量 x 可取值的数集 X 称为函数的定义域 .所有函数值构成的集合 Y 称为函数的值域 .显然,函数 $y=f(x)$ 就是从定义域 X 到值域 Y 的映射,所以,有时把函数记为:

$$f:\quad X\to Y .$$

函数概念中有两个要素:其一是对应规律,即函数关系;其二是定义域.所以说函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数.

(1) 函数关系的表示方法

函数关系的表示方法是多种多样的,主要有:公式法(也叫解析法),如例 1,例 2 中的函数;图形法,如例 3;表格法,如例 4.

各种表示函数的方法,都有它的优点和不足.公式法给出的函数便于进行理论分析和计算.图形法给出的函数形象直观,富有启发性,便于记忆.表格法给出的函数便于查找函数值,但它常常是不完全的.今后我们以公式法为主,配合使用图形法和表格法.

公式法给出的函数,有时在定义域内由一个公式表达出函数关系,有时无法或很难用一个公式表达出函数关系,而在定义域的不同部分上用不同的公式来表达一个函数关系,这样的函数称为分段函数.

例 5 考虑将 1 kg 的 -10 ℃的冰在 101 325 Pa 下加热成 10 ℃的水的过程中,温度 t 和所需要的热量 Q 之间的函数关系.因冰的比热容为 2 302 J·kg^{-1}·℃$^{-1}$,冰的熔解热为 335 000 J·kg^{-1},而水的比热容是 4 186 J·kg^{-1}·℃$^{-1}$,因此函数关系是(如图 1.4):

$$Q=\begin{cases}2\,302t+23\,020, & \text{当 } -10\leq t<0,\\ 4\,186t+358\,020, & \text{当 } 0<t\leq 10.\end{cases}$$

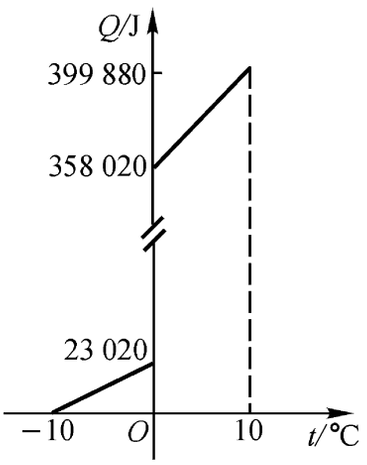

图 1.4

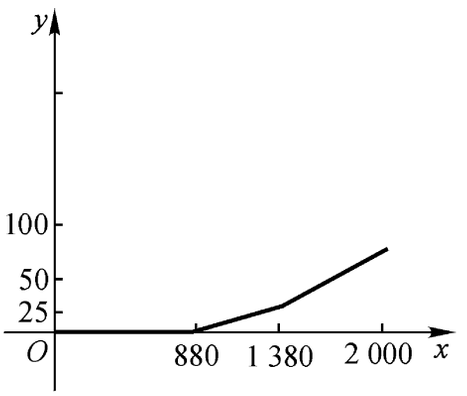

图 1.5

例 6 根据国家税收规定:个人月收入少于 880 元的部分不纳税,超过 880 元而少于 1 380 元的部分按 5% 纳税,而超过 1 380 元少于 2 000 元的部分按 10% 纳税.所以个人月收入 x 与应纳税 y 的函数关系是(图 1.5)

$$y=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leq 880,\\ (x-880)\cdot 5\%, & \text{当 } 880<x\leq 1\,380,\\ 25+(x-1\,380)\cdot 10\%, & \text{当 } 1\,380<x\leq 2\,000.\end{cases}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

例 7　符号函数(克罗内克[①]函数)(图 1.6)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

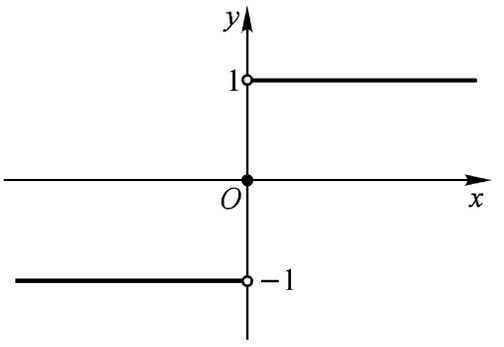

图 1.6

例 5,例 6,例 7 皆为分段函数.

(2)　定义域

函数的定义域是自变量的取值范围,也是函数关系的存在范围.在研究每个函数时,都应知道它的定义域.那么如何确定定义域呢?对于具有实际意义的具体函数,需由它的实际意义来确定;在纯数学的研究中,定义域是在实数范围内能合理地确定出函数值的自变量的所有值构成的集合.所以注意负数不能开偶次方,零不能作分母,负数与零不能取对数等是有益的.若函数表达式中含有若干项,则定义域应是各项中的自变量取值范围的交集.

例 8　函数

$$S=\pi r^2.$$

如果这是圆面积 S 和半径 r 之间的函数关系,则定义域应为$(0,+\infty)$.

如果这是半径为 1 的铜盘受热膨胀过程中面积与半径的关系,则定义域应为$(1,1+\delta)$,其中 δ 是一个较小的正数.

如果自变量 r 和因变量 S 都没有具体含义,那么这个函数的定义域应是$(-\infty,+\infty)$.

例 9　确定 $y=\sqrt{4x^2-1}+\arcsin x$ 的定义域.

解　因负数不能开平方,所以有

$$4x^2-1\geq 0,$$

它等价于$|x|\geq\frac{1}{2}$,又因 $\arcsin x$ 的定义域是$|x|\leq 1$,故所求的定义域是集合

$$[-1,-\tfrac{1}{2}]\cup[\tfrac{1}{2},1].$$

例 10　确定 $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}+\tan x$ 的定义域.

解　由负数和零不能取对数,零不能作分母,及正切函数的定义知

$$3x-2>0,\quad 3x-2\neq 1,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

故定义域

$$X=\{x\mid x>\frac{2}{3},\text{且 } x\neq 1,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,1,2,\cdots),\ x\in\mathbf{R}\}.$$

---

① 克罗内克 Kronecker L. 1823—1891,德国数学家.

(3)　函数值的记号

如果 a 是函数 $f(x)$ 的定义域内的一点，则说函数 $f(x)$ 在点 a 处有定义．当 $x=a$ 时，对应的 y 值记为 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$．

例 11　函数 $y=f(x)=\pi x^2$，则

$$y|_{x=2}=f(2)=\pi\cdot 2^2=4\pi,$$

$$y|_{x=\frac{1}{3}}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{\pi}{9},$$

$$y|_{x=a}=f(a)=\pi a^2,$$

$$y|_{x=a+b}=f(a+b)=\pi(a+b)^2,$$

$$y|_{x=\ln a}=f(\ln a)=\pi(\ln a)^2,$$

$$f(-a)=\pi(-a)^2=\pi a^2=f(a).$$

(4)　函数的图形

给定函数 $y=f(x)$，$x\in X$，将每一个 $x\in X$ 和它对应的 $y(=f(x))$ 作一个有序数组 (x,y)，在坐标平面 xOy 上找对应点 $M(x,y)$，则点集 $G=\{M(x,y)\mid x\in X$，且 $y=f(x)\}$ 称为函数的图像或图形，通常为一条曲线．由平面解析几何知，作函数图形的基本方法就是描点法．另外，还有一些作图的技巧需要知道．

1°　平移作图

已知 $y=f(x)$ 的图形，求作 $y=f(x)+b$（b 为常数）的图形．当 $b>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图形向上平移 b 个单位即可，或者将坐标系向下平移 b 个单位．当 $b<0$ 时，图形向下平移 $|b|$ 个单位即可．

要作 $y=f(x+a)$（a 为常数）的图形．当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图形向左平移 a 个单位，或者将坐标系向右平移 a 个单位都可．当 $a<0$ 时，移动方向相反．

2°　放大、压缩作图

已知 $y=f(x)$ 的图形，求作 $y=af(x)$ 的图形．当 $a>1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图形的纵坐标放大 a 倍，即得 $y=af(x)$ 的图形．求作 $y=f(ax)$ 的图形，当 $a>1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图形的横坐标压缩 a 倍即可．对 $0<a<1$ 和 $a<0$ 情形，请读者自己考虑．

3°　叠加作图

已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形，求作 $y=f(x)+g(x)$ 的图形．将 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的纵坐标相加即可．

例 12　作函数 $y=\sin x+2\cos x$ 的图形．

此题可以利用 $y=\sin x$ 和 $y=2\cos x$ 的图形叠加作图，但这比较麻烦．我们先将函数作恒等变形．

$$y = \sin x + 2\cos x$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{5}\sin(x + x_0)\quad (x_0 = \arctan 2).$$

因此，先将 $y = \sin x$ 的图形的纵坐标放大 $\sqrt{5}$ 倍，得到 $y = \sqrt{5}\sin x$，然后将 $y = \sqrt{5}\sin x$ 的图形向左平移 $\arctan 2$ 个弧度，就得到 $y = \sin x + 2\cos x$ 的图形(见图 1.7)．

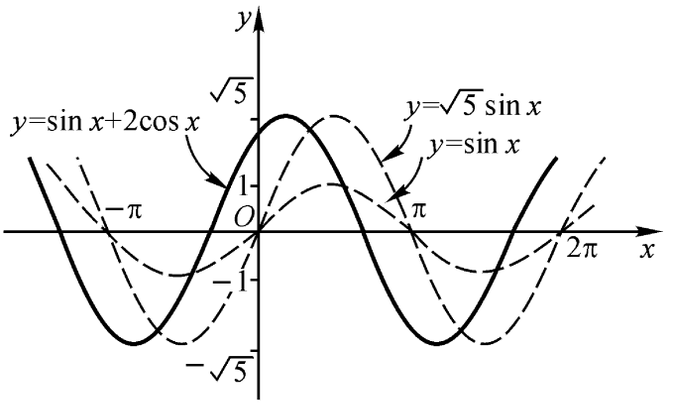

图 1.7

1.2 几个常用的概念

1.2.1 函数的几种特性

在研究函数时，注意到每个函数的特性，将带来许多便利．

(1) 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，即当 $x \in X$ 时，必有 $-x \in X$，若对任何 $x \in X$，都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为奇函数；若对任何 $x \in X$，都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

由定义不难证明：$y = x$，$y = x^3$，$y = 1/x$，$y = \sin x$ 都是奇函数；$y = x^2$，$y = x^4$，$y = 1/x^2$，$y = \cos x$ 都是偶函数．还可以证明：

奇函数的和仍为奇函数，偶函数的和仍为偶函数；两个奇函数的积、或两个偶函数的积都是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数．定义域 X 关于原点对称的任何函数 $y = f(x)$ 均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和，因为

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

右边的第一项是奇函数，第二项是偶函数．

(2) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，若有常数 $T \neq 0$，使得当 $x \in X$ 时，必有 $x \pm T \in X$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则说 $y=f(x)$是周期函数,并称常数 T 为它的一个周期 .

一个周期函数的周期有无穷多个,比如,常数 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0)$都是 $y=\sin x$ 的周期,2π 是它的最小正周期 .一个周期函数,若有最小正周期 T_0,则称 T_0 为函数的基本周期 .习惯上,说"这个函数的周期是 T_0".虽然 $2T_0$ 也是它的一个周期,但不能说"它的周期是 $2T_0$".在中学里已经知道 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期为 2π, $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期为 π .此外,并不是每个周期函数都有基本周期 .

例 1 狄利克雷[①]函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

它是一个周期函数 .因为任何非零有理数都是它的周期,所以它无基本周期 .它是偶函数,它的图形是容易想象的,但实际上画不出来 .

具有基本周期的周期函数的图形,可以由其一个基本周期上的图形沿 x 轴平移基本周期的整数倍距离得到,所以图形具有重复性 .

(3) 函数的单调性

设 $x_1<x_2$ 是区间 I 上任意两点,若恒有

$$f(x_1)\leq f(x_2)\quad (f(x_1)\geq f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加(单调减少),简称单增(单减),或者称 $f(x)$在 I 上单调上升(单调下降) .若上述不等式中不出现等号,则称 $f(x)$在区间 I 上严格单调增加(严格单调减少),简记为↑(↓) .

在定义域上,单调增加或单调减少的函数统称为单调函数,严格单调增加或严格单调减少的函数统称为严格单调函数 .

严格单调增加函数的图形,随着 x 增大图形的纵坐标也增大,严格单调下降函数的图形,随着 x 增大图形的纵坐标减小 .

例如,在$[0,+\infty]$上 $y=\quad x\uparrow$;又例如,在$(-\infty,0]$上, $y=x^2\downarrow$;在$[0,+\infty)$上, $y=x^2\uparrow$,所以 $y=x^2$ 不是单调函数,但它有单调区间 .而函数 $y=x^3$ 是严格单调增加的函数 .

(4) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,若存在常数 $A(B)$,使得对所有 $x\in I$,都有

---

① 狄利克雷 Dirichlet P .G L .(德)1805—1859,是高斯的学生,解析数论的创始人之一,最卓越的工作是对傅里叶级数收敛性的研究 .

$$f(x) \leq A \quad (f(x) \geq B),$$

则说函数 $f(x)$在区间 I 上有上(下)界 .若存在常数 $M>0$,使得对所有 $x \in I$,都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则说 $f(x)$在 I 上有界 .否则说 $f(x)$在 I 上无界 .

显然,有界等同于既有上界又有下界 .在定义域上有界的函数叫做有界函数 .

例如, $y=\sin x$ 是有界函数; $y=1 x$ 是无界函数,但它在区间 $(0,+\infty)$ 上有下界,在区间 $(1,+\infty)$ 上有界 .

1.2.2 隐函数和参数方程表示的函数

若变量 x, y 之间的函数关系是由一个含 x, y 的方程

$$F(x, y)=0$$

给定,则说 y 是 x 的隐函数 .相应地,把由自变量的算式表示出因变量的函数叫做显函数 .

例如,由方程 $3x-2y+6=0$, $x^2+y^2-1=0$, $xy=e^x-e^y$ 表示的函数都是隐函数;而 $y=\sin x$, $y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 都是显函数 .

如果能从隐函数中将 y 解出来,就得到它的显函数形式 .例如, $3x-2y+6=0$ 的显函数形式为 $y=1.5x+3$; $x^2+y^2=1$ 的显函数形式为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.但不要以为隐函数都能表示成显函数,如开普勒[①]方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0,$$

其中 ε 为常数, $0<\varepsilon<1$,就不能将 y 表成 x 的显函数 .更不要以为随便写一个含有 x, y 的式子就是一个隐函数,如 $x^2+y^2+1=0$ 就不是隐函数 .什么条件下 $F(x, y)=0$ 确定一个隐函数,将在本书第九章定理 9.5 中给出 .

两个变量 x, y 之间的函数关系,有时是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad t \in T$$

给出的,这样的函数叫做参数式的函数, t 叫做参数,也叫做参变量 .

例如,隐函数 $x^2+y^2-a^2=0$(圆),既可表为显函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$,又可以用参数方程

---

① 开普勒 Kepler J.(德) 1571—1630,天文学家、数学家,他一生坎坷,病魔缠身,视力低下,双手残疾,家庭成员多有不幸 .他的不可分量的思想,即用无数个同维无穷小元素之和来确定面积和体积,无穷远点的设想,以及类比方法的影响都是深远的 .

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \end{aligned} \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

来表示.又如$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$(椭圆)可用参数方程

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \end{aligned} \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

表示.摆线(图 1.8)的参数方程是

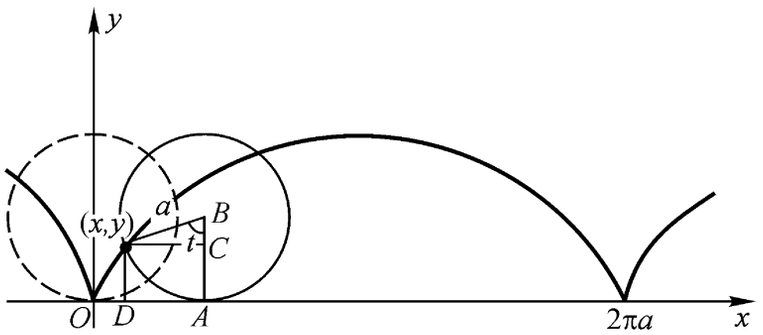

图 1.8

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

如果能消去参数 t,就得到 x, y 的直接函数关系,这对有些函数是容易的,对有些函数是麻烦的,甚至是不可能的.

1.2.3 单值函数与多值函数、反函数

如果在定义域 X 内每取一个 x 值,函数 $y = f(x)$都仅有一个对应值,这样的函数称为单值函数,否则,称为多值函数.

例如,函数 $x^2 + y^2 = 1$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的多值函数,$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

多值函数可以拆成若干个单值函数,如上面的函数可拆成 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1 - x^2}$,所以,我们通常只讨论单值函数.

例 2 单摆的周期 T 是摆长 l 的函数

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

反之,摆长 l 也是周期 T 的函数

$$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g.$$

这两个函数都表示了 T 与 l 的对应规律,只不过是自变量与因变量的取法不

需要全本请访问 www.ertongbook.com