大学数学学习辅导丛书

工　程　数　学

复变函数(第四版)学习辅导与习题选解

王绵森　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与西安交通大学编写的《复变函数(第四版)》相配套的学习辅导书,按照原教材各章的顺序,每章都包含内容提要、教学基本要求、释疑解难、例题分析和部分习题解法提要五个部分,在附录中还配备了五套自我检测试题及解答。与一般的"习题集"或"解题指南"不同,本书不但包含解题方法和解题思路的分析,而且包含对复变函数中基本概念、基本理论和重要思想方法的系统小结,并针对学生在学习过程中提出的一些疑难问题,以问答形式给予较详尽的分析和解答,帮助学生加深对内容的理解,提高他们的数学素养和分析、解决问题的能力。

本书对于非数学类专业的理工科本科生学习复变函数课程无疑是一本很好的学习参考书,对于从事复变函数教学工作的青年教师也是很有裨益的教学参考书。

目 录

致 读 者

这本小册子是与西安交通大学编写的《复变函数(第四版)》(高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书。它与一般的“习题集”或“解题指南”不同,不但包含解题方法和解题思路的分析,而且包含对《复变函数(第四版)》中基本概念、基本理论、重要思想方法的总结与释疑解难,目的在于帮助读者在学好本课程的同时,提高读者的数学素养和能力。

基于上述目的,本书按照原教材的各章顺序,每章都包含下列五部分内容(第一章不含释疑解难)。

一、内容提要　这部分内容不是对定义、定理、公式和方法的简单罗列,而是对各章中重要概念、理论和方法的较为系统的小结,以使读者在原有的基础上加深对各章内容的理解。

二、教学基本要求　这部分是从教育部高教司在 1995 年颁布的工科类《复变函数课程教学基本要求》中摘录下来的。应当指出,这个教学基本要求是所有本科生应当达到的合格要求。读者应当根据本人及所在院校的具体情况确定自己的学习目标,但不能低于基本要求。文中用黑体排印的,属较高要求,必须深入理解,牢固掌握,熟练应用。本书中还含有少量带 * 号的部分是超出教学基本要求的引伸和补充,供读者选用。

三、释疑解难　这部分是根据许多教师和同学在学习本课程中所提出的疑难问题以及编者多年的教学经验汇集加工而成的,其中包括对一些重要概念和理论的深入理解,常见错误的剖析以及解题方法和解题思路的小结等。书中以问答形式编写了 28 个问题,并给出了较为详尽的解答。

四、例题分析　本书中共配备了 47 个例题(有些还包括若干小

题)，每个例题均包含“分析”和“解答”两部分。其目的在于通过分析解题思路，阐明解题方法，使读者不但知道这个题目是“怎样做的”，而且要懂得“为什么要这样做”，有无其它解法，解题思路和方法能否用于解决其它问题等，以便举一反三，提高分析和解决问题的能力。

五、部分习题解法提要　本书对原教材中各章习题的三分之一以上给出了解法提要，其中多数是初学者感到比较难的。希望读者掌握这些题目的解题方法，独立完成其余的习题。

另外，在附录中，还配备了五套自我检测试题(每套两小时)，并附有简要解答。读者可以用这些试题对自己的学习成效进行独立的自我检测，不要急于看解答。

正如原教材“引言”中所说的那样，“复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展，因而它们有许多相似之处。但是，复变函数又有与实变函数不同之点。我们在学习中，要勤于思考，善于比较，既要注意共同点，更要弄清不同点。这样，才能抓住本质，融会贯通。”这段话既是对本课程内容与特点的概述，又是对读者学习方法的指导。在本书中，我们经常采用与实变函数相关内容进行对比的方法，在指出它们共性的同时，着力于揭示它们的区别，重点讨论复变函数中的一些新概念、新理论和新方法，并注意分析产生这些区别的原因。我们相信，只要读者遵循上述方法，多想一些问题，多下一点功夫，是完全能够学好这门课程的。

编者非常感谢审稿人齐植兰教授，她对书稿进行了认真细致的审查，她所提出的许多宝贵的意见和建议对提高本书的质量起了十分重要的作用。感谢高教出版社高级策划李艳馥同志，没有她的辛勤劳动，本书是很难这么快地面市的。

由于时间仓促和编者的水平有限，错误与不妥之处在所难免。编者热忱欢迎广大教师和读者批评指正，提出改进意见。

编　　者

2003 年 5 月于西安交通大学

第一章　复数与复变函数

内容提要

在高等数学课程中,研究的对象是实变函数,也就是自变量与因变量都是实数的函数,而本课程研究的对象是自变量与因变量都是复数的函数,即复变函数.因此,本章在简要复习复数的概念、运算和表示的基础上,先将函数的概念推广到复数域,然后,介绍复变函数的极限与连续性,为学习后面的内容奠定基础.

一、复数及其表示

复数的概念、运算及其表示方法大多在中学已经学过.然而,在复习的基础上加深对内容的理解,熟练运用复数知识解决有关问题,对以后的学习是非常重要的.读者应特别注意以下几个问题.

1. 关于复数的几何表示

由于复数 $z = x + iy$ 与复平面上的点 $P(x, y)$ 或向量 $\overline{OP}$ 之间的一一对应关系,所以,复数可用复平面上的点或向量来表示.这一事实看似简单,但却有重要的理论意义和应用价值.(1) 它建立了非零复数 z 的三角表示式和指数表示式:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z = re^{i\theta}, \tag{1.1}$$

其中 $r = |z|$, θ为 z 的无穷多个辐角中的任一值.利用这两种表示,可以使复数的运算大为简化,应用更加灵便.(2) 建立了复变数与平面图形的联系,使我们能用复数形式的方程或不等式表示一些平面

曲线或图形,为用复数研究平面几何问题奠定了基础(见教材第二节例 3 与例 4) .(3) 建立了复数与向量之间的联系,使我们可以用复数表示那些能用平面向量表示的物理量 .例如,考虑一河面上的水在某时刻的流动问题 .只要在河面上取定一坐标系 xOy,并将河面上任一点 P 处的两个速度分量记为 v_x 与 v_y,则速度向量 v就可用复数 $v = v_x + iv_y$ 来表示(图 1.1) .类似地,平面静电场某点处的电场强度也可以用复数 $E = E_x + iE_y$ 来表示 .从而为复变函数在科学技术中的应用开辟了道路,改变了长期以来人们把复数看成仅仅是数系的形式地推广,是没有实际意义的"虚数"的观念 .

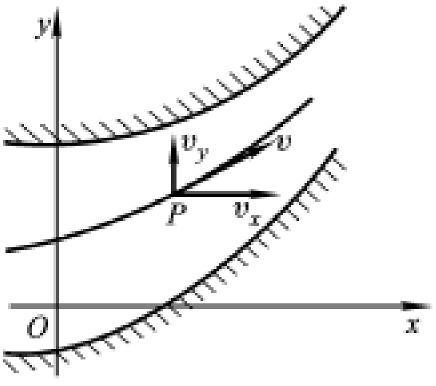

图 1.1

2. 关于辐角的多值性

任何一个非零复数 z 都有无穷多个辐角:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

其中主值 arg z满足 $-\pi < \arg z \leq \pi$.对于给定的 $z \neq 0$,应按下列关系式由 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 来求其辐角的主值(或称主辐角):

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一、四象限时}, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限时}, \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限时}, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } z \text{ 在虚轴上}, \\ \pi, & \text{当 } z \text{ 在负实轴上}. \end{cases} \tag{1.2}$$

由于辐角的多值性,使得许多复变初等函数都是多值函数(见第二

章).

3. 关于复数乘积和商的模与辐角

设 z_1 与 z_2 为两个非零复数,则

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.5}$$

其中关于辐角的两个等式应理解为等式两端分别所构成的数集(它们都包含无穷多个辐角)是相等的,即对于左端的任一给定值,右端必有一值与它相等,反之亦然.

根据上述关于乘积的模与辐角的等式不难得知,复数 z_1 乘以复数 z_2 在几何上就相当于把向量 z_2 逆时针旋转一个角 $\arg z_1$(或 $\operatorname{Arg} z_1$ 的任一值),并把 z_2 的模伸长(或缩短)到 $|z_1|$ 倍.若 $|z_1| = 1$,乘法就相当于将向量 z_2 旋转.因此,若在解决某具体问题中需要对向量进行旋转,则可采用复数的乘法.对于除法,可作类似的几何解释.

4. 关于复球面和无穷远点

借助于地图制图学中将地球投影到平面上的测地投影法,为了建立复平面与球面上点的一一对应关系,在复平面上引入了一个与球面上北极相对应的假想点,并称它为无穷远点,记作 ∞.包含无穷远点 ∞ 的复平面称为扩充复平面,该球面称为复球面或黎曼(Riemann)球面.复球面是扩充复平面的一个几何模型.∞ 是一个复数,其模 $|\infty| = +\infty$,实部、虚部与辐角都无意义,不要把它与高等数学中的 $+\infty$, $-\infty$ 以及 ∞ 混为一谈.很多书上用 C 表示复平面,用 C^* 表示扩充复平面,因此,$C^* = C \cup \{\infty\}$.

二、复变函数的极限与连续性

1. 复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广,二者定义的表述形式几乎完全一样,只要将定义中的“实数(或实数集)”换为“复数(或复数集)”就行了.但对下面几点希望读者多加注意:(1) 实变函数是单值函数,而复变函数有单值函数和多值函数之分;(2) 复变函数 $w = f(z)$ 是从 z 平面上的点集 G 到 w 平面上的点集 G^* 的一个映射,因此,在几何上它不但可以把 z 平面上的点映射(或变换)为 w 平面上的点,而且可以把 z 平面上的曲线或图形映射为 w 的平面上的曲线或图形,实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换(见教材中的例子),为简化或研究某些问题提供了可能.待读者学习共形映射时,会进一步认识这个问题的重要性;(3) 由于一个复变函数 $w = f(z)$ 对应着两个二元实变函数:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y),$$

所以,可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究.这是研究复变函数的常用思想方法之一.

2. 复变函数的极限

复变函数的极限是一元实变函数极限的推广,定义的表述形式也相似,因此,可以仿照高等数学中的方法,证明复变函数极限的有理运算法则等有关命题.但是,复变函数极限的定义实际上比一元实变函数极限的定义要求要苛刻得多.在讨论一元实变函数的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 时,只要当 x 在 x 轴上沿 x_0 的左、右两侧以任意方式趋于 x_0 时,$f(x)$ 趋于同一个常数(即左、右极限存在且相等),那么极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 就存在并且等于这个常数.而在讨论复变函数 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 的极限时,则要求 z 在 z_0 的邻域内从四面八方沿任何曲线以任何方式

趋于 z_0 时,$f(x)$ 都要趋于同一个常数,才能说该极限存在.因此,当 z 沿两条不同路径趋于 z_0 时,$f(z)$ 趋于两个不同的常数,或者 z 沿某一路径趋于 z_0 时,$f(z)$ 不能趋于一个确定的的常数,那么该极限必不存在.这一点与高等数学中二元函数的极限类似.之所以如此,是因为复变函数的定义域是复平面上的一个区域,z_0 的去心邻域是以 z_0 为中心的一个去心圆域.由此,我们也不难理解“复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限存在等价于它的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$(都是二元实变函数)当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时极限同时存在”这个结论,它将研究复变函数的极限问题转化为研究两个二元实变函数的极限问题.

3. 复变函数的连续性

可以仿照上面关于复变函数极限那样进行总结,希望读者自己去补充.

教学基本要求

1. 掌握复数的各种表示方法及其运算.
2. 了解区域的概念.
3. 了解复球面与无穷远点.
4. 理解复变函数概念.
5. 了解复变函数的极限和连续的概念.

例 题 分 析

例 1.1 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$ 化为三角形式与指数形式.

分析 将一个复数 z 化成三角形式与指数形式的关键在于求

出该复数的模与辐角的主值.通常的方法是先将 z 化成代数形式 $z = x + iy$,再利用 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与(1.2)式分别求出它的模与主辐角.本题中由于 z 的分子与分母互为共轭复数,而复数与其共轭复数的模相等,因此,容易利用(1.3)式求出 $|z|$.至于主辐角除可用(1.2)式求得外,也可以利用关于乘积与商的辐角公式(1.4)与(1.5)来求.下面给出两种解法,便于读者比较.

解　法一　将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3} + i)(2 - 2i)$,得

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{|\sqrt{3} + i|^2} \cdot \frac{(2 - 2i)^2}{|2 - 2i|^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i,$$

所以 $|z| = 1$, $\arg z = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.从而得到 z 的三角形式与指数形式:

$$z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = e^{-\frac{\pi}{6} i}.$$

法二　根据(1.3)式,我们有

$$|z| = \frac{|\sqrt{3} + i||2 - 2i|}{|\sqrt{3} - i||2 + 2i|} = 1.$$

再由公式(1.4)与(1.5),又得

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z &= \operatorname{Arg}\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \operatorname{Arg}\frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \left(2m\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2(m + n)\pi - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

其中 m 与 n 为整数,因此 $\arg z = -\frac{\pi}{6}$.

从而可得与法一中相同的三角形式与指数形式.

例 1.2　设 z_1 与 z_2 是两个不同的复数.

(1) 证明恒等式:

$$|1 - \overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2); \tag{1.6}$$

(2) 试就 z_1, z_2 与单位圆周 $|z| = 1$ 的不同位置关系,分别说明复数 $z_0 = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ 与单位圆周的位置关系.

分析 此题关键是证明(1)中的恒等式.关于复数模的恒等式通常可以利用等式 $|z|^2 = z\bar{z}$ 以及共轭复数的运算来证明.

证 (1) 此恒等式可直接利用上述方法得到.事实上,

$$
\begin{aligned}
&|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \\
&= (1 - \bar{z}_1 z_2)\overline{(1 - \bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\
&= 1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + |z_1|^2 |z_2|^2 \\
&\quad - (|z_1|^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2) \\
&= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).
\end{aligned}
$$

(2) 若 z_1 与 z_2 都在单位圆内或单位圆外,则 $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,或者 $|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$. 由(1)中等式(1.6)易知 $|z_0| = \left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| < 1$,故 $z_0 = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ 在单位圆内;若 z_1 与 z_2 中有一个在单位圆内,另一个在单位圆外,则 z_0 在单位圆外;若 z_1 与 z_2 中至少有一个在单位圆周上,则 z_0 也在单位圆周上.

注 若 z_1 与 z_2 中至少有一个在单位圆周上,不妨设 $|z_1| = 1$. 此时上述结论直接用下面的方法证明更为简便.

由于 $|z_1| = 1$,所以 $z_1 = \dfrac{1}{\bar{z}_1}$,从而

$$
|z_0| = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1(z_1 - z_2)}\right| = 1.
$$

例 1.3 证明复平面上三点 z_1, z_2 与 z_3 共线的充要条件是 $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 为实数.

分析 用复数的方法解决平面几何问题通常有两个基本思路.

其一是将平面上的点用复数表示,平面曲线用复数方程表示 .本题中将通过两点 z_1 与 z_2 的直线方程用复数方程来表示,点 z_3 与 z_1, z_2 共线的充要条件就是 z_3 在连接 z_1 与 z_2 的直线上,即 z_3 满足该直线方程 .其二是平面上的点(即复数) 可用向量表示,利用向量的有关知识来解决 .本题中, z_1、z_2 与 z_3 共线相当于向量 $z_3 - z_1$ 与 $z_2 - z_1$ 共线,两向量共线当且仅当它们的夹角为 π 的整数倍 .

证　**法一**　不难将通过 z_1 与 z_2 的直线参数方程化为复数形式:

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

z_3 在该直线上的充要条件为:存在实数 $t^* \in (-\infty, +\infty)$,使

$$z_3 = z_1 + t^*(z_2 - z_1),$$

从而有

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = t^*.$$

法二　不失一般性,将 z_1 平移到原点,则 z_1, z_2 与 z_3 共线　向量 $z_3 - z_1$ 与向量 $z_2 - z_1$ 共线

$$\operatorname{Arg}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

或

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| e^{n\pi i} = -\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|$$

为一实数 .

例 1.4　求下列集合 G 在给定的映射 $w = f(z)$ 下的像集 G^*,并画出 G^* 的图形:

(1) $f(z) = z^2 - z$, $G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$;

(2) $f(z) = x - y + i(x + y)$,

$$G = \{z \mid 0 < \arg(z + 1) < \frac{\pi}{4}, 1 \le |z| \le 2\}.$$

分析 求集合 G 在给定映射下的像集 G^*,通常将 G 中有代表性的点或曲线的方程(例如 G 的边界曲线等) 代入到给定的映射求出像点或像曲线,然后再确定 G^* .本题中的第(1) 小题就采用这种方法 .由于其中的 G 是 z 平面上宽度为 1 的带形域, $y=0$ 与 $y=1$ 是它的边界, $y=c(0<c<1)$ 是 G 中与边界平行的水平直线 .因此,只要求出它们的像曲线,则 G^* 即可确定 .但第(2) 小题如果仍这种方法可能比较复杂 .细心的读者不难发现,由于题中的映射可以写成 $f(z)=(1+i)z$ 的形式,因此,直接利用复数乘法的几何意义就能很容易得到 G^* .

解 (1) 令 $w=u+iv$,则映射 $f(z)=z^2-z$ 对应于

$$u=x^2-y^2-x,\qquad v=2xy-y. \tag{1.7}$$

将边界 $y=0$ 代入上式得其像曲线的参数方程为

$$u=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},\qquad v=0,$$

它表示 w 平面的实轴上 $u\geq-\frac{1}{4}$ 的部分 .再将边界 $y=1$ 代入(1.7)式得:

$$u=x^2-x-1,\qquad v=2x-1,$$

消去参数 x 就得到 $y=1$ 的像曲线方程 $u=\frac{1}{4}v^2-\frac{5}{4}$,显然它是 w 平面上的一条抛物线 .用同样的方法可求得 G 内平行于边界的水平直线族 $y=c(0<c<1)$ 的象曲线是 w 平面上的抛物线族 $u=\frac{1}{4c^2}v^2-\left(c^2+\frac{1}{4}\right)$.由此不难看出, G 的像集 G^* 是 w 平面上抛物线 $u=\frac{1}{4}v^2-\frac{5}{4}$ 右边的区域,不含该抛线本身,也不包含实轴上 $u\geq-\frac{1}{4}$ 的部分(图 1.2) .G^* 是一个无界的单连通区域 .

(2) 由于 $w=f(z)=(1+i)z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z$,根据复数乘法的几何

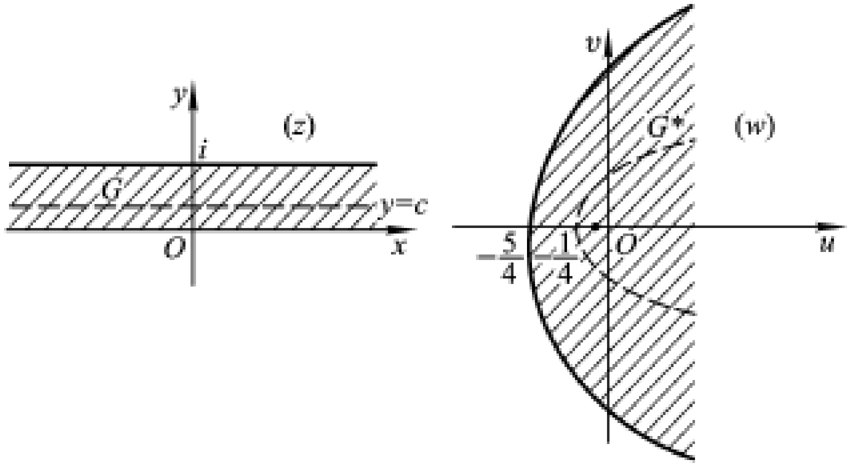

图 1.2

意义,集合 G 的像集 G^* 可由 G 中每个点(向量)沿逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$,模伸长到原来的$\sqrt{2}$倍得到.而 G 表示 z 平面上以 $z=-1$ 为顶点与正实轴夹角为$\frac{\pi}{4}$的角形域$0<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$和闭圆环区域$1\leq|z|\leq 2$的交集,从而可得 G 与 G^* 的图形如图 1.3 所示.

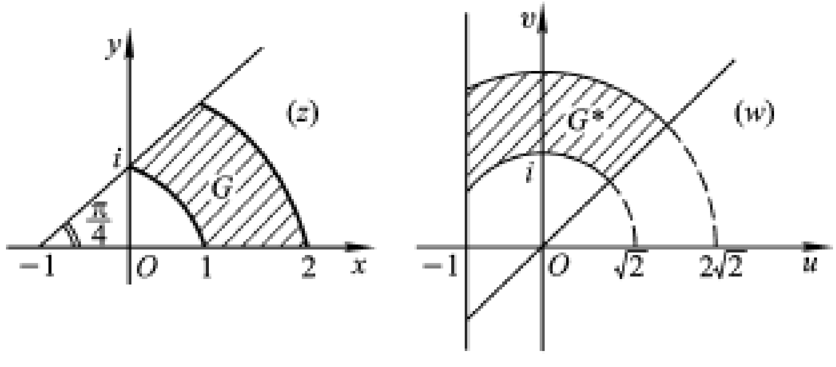

图 1.3

例 1.5 判断下列函数在给定点处的极限是否存在.若存在,试求出极限的值.