

高等职业教育系列教材

高职数学及其应用

辅导与测试

中 册

主 编 李和逊

副主编 李 勇

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高职数学及其应用辅导与测试/李和逊主编. —重庆:重庆大学出版社,
2001.9

高等职业教育系列教材

ISBN 7-5624-2468-3

. 高 李 数学-高等教育:技术教育-教学参考资料 . 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064145 号

高职数学及其应用

辅导与测试

中 册

主 编 李和逊

责任编辑:彭 宁 版式设计:彭 宁

责任校对:任卓惠 责任印制:张立全

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:5.75 字数:155千

2001年9月第1版 2003年6月第2次印刷

印数:8 001—15 000

ISBN 7-5624-2468-3/O·202 定价:10.00元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

前 言

为了全面贯彻《中共中央关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神,根据《教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见》,进一步搞好高职高专的教育改革和提高教学质量,更好地帮助高职高专学生学好数学,在编写完《高职数学及其应用》教材上、中、下三册后,此次应出版社的聘约,以及高职院校学生的要求,编写组编写了同现行《高职数学及其应用》教材相配套的辅导与测试一书。本书以教材为主线,章、节秩序不变,突出高职基础教育的特点,知识以必须够用为度、重应用。注重学生能力和创新意识的培养。全书由基本要求,内容提要,题型示例解析,习题、测试与解答,考试与解答等内容组成,使该书成为与教材优化配套的辅导与测试集。可提供招收初中毕业生五年制高职和高中、中职毕业生三年制高职高专选用。

本书的特点是:

1. 根据教学基本要求,精心组织素材,突出了学习目标。
2. 基础知识“必须够用”为度,重应用、注重学生能力和创新意识的培养。
3. 题型示例解析求真、求实、学有所用。
4. 习题、自测试题、考试试题、可组建试题库,便于组织测试和试卷质量分析。
5. 结合学生实际,配合教材,极具可导、可练、可测性。

编写组:

上册:主编 耿恭健 韩乐文 副主编 胡先富
中册:主编 李和逊 副主编 李勇 参编 焦合华
下册:主编 龙辉 副主编 曾乐辉 主审 黄锡年
参编 郑文 代子玉

本书编写过程中得到了市教委领导,高职院校以及一些举办了高职、高专学校的领导和教师的支持和帮助,在此表示诚挚的感谢。

由于编写水平有限,且时间较仓促。难免有缺点和错误,恳请使用本书的读者批评指正。

《高职数学及其应用》编写组
2001年6月14日

目 录

第 12 章 函数	(1)
12.1 函数的概念	(1)
12.2 基本初等函数与初等函数	(4)
12.3 函数的应用	(7)
自测试题及解答	(10)
第 13 章 极限与连续	(17)
13.1 数列的极限	(17)
13.2 函数的极限	(20)
13.3 无穷小量与无穷大量	(22)
13.4 极限的四则运算	(24)
13.5 两个重要极限	(27)
13.6 函数的连续性	(29)
自测试题及解答	(32)
第 14 章 导数与微分	(38)
14.1 导数的概念	(39)
14.2 函数的微分法	(41)
14.3 微分及其在近似计算中的应用	(45)
自测试题及解答	(48)

第 15 章	导数的应用.....	(55)
15.1	极值	(55)
15.2	函数的最大值和最小值	(58)
15.3	罗必达法则	(60)
15.4	曲线的凹凸及拐点	(62)
15.5	函数的作图	(64)
	自测试题及解答	(67)
第 16 章	不定积分.....	(75)
16.1	不定积分的概念	(75)
16.2	换元积分法	(77)
16.3	分部积分法	(80)
16.4	积分表的使用	(83)
	自测试题及解答	(85)
第 17 章	定积分及其应用.....	(94)
17.1	定积分的概念	(95)
17.2	定积分的性质	(98)
17.3	定积分的基本公式.....	(100)
17.4	定积分的换元法与分部积分法.....	(103)
17.5	定积分的应用.....	(106)
17.6	广义积分.....	(111)
	自测试题及解答.....	(113)
第 18 章	常微分方程与拉普拉斯变换	(120)
18.1	微分方程的概念.....	(121)
18.2	可分离变量的微分方程.....	(122)
18.3	一阶线性微分方程.....	(126)
18.4	拉普拉斯变换的概念.....	(130)

18 5 拉氏变换的逆变换.....	(132)
18 6 二阶常系数线性微分方程.....	(135)
自测试题及解答.....	(139)
考试试题及解答.....	(148)
习题答案.....	(164)

第 12 章 函 数

【基本要求】

1. 理解函数及其有关概念, 会求函数的定义域与某点函数的值 .
2. 了解函数的有界性与周期性, 理解函数的单调性与奇偶性 .
3. 了解反函数、复合函数、初等函数的概念, 理解基本初等函数的基本性质及其图像 .
4. 会用数学方法分析与解决简单实际问题 .

【知识点】

函数, 函数的性质, 反函数, 复合函数, 初等函数, 函数的应用 .

12.1 函数的概念

一、内容提要

函数的定义, 函数的定义域, 反函数, 函数的几种特性, 函数的表示, 函数值的求法 .

二、题型示例

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+4} \quad (2) y = \arcsin \frac{x-3}{2}$$

解 (1) 要使 $\frac{1}{1-x^2}$ 有意义, 必须 $1-x^2 \neq 0$

要使 $\sqrt{x+4}$ 有意义, 必须 $x+4 \geq 0$

故要使函数有意义, 必须 $1-x^2 \neq 0$ 且 $x+4 \geq 0$, 解得 $x \geq -4$ 且 $x \neq \pm 1$.

所以函数的定义域为 $[-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 要使函数有意义, 必须 $\left| \frac{x-3}{2} \right| \leq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 5$. 所以

函数的定义域为 $[1, 5]$.

例 2 下列各对函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, g(x) = x+2$$

$$(2) f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 因此它们不相同.

(2) 由于它们定义域与对应关系都相同, 所以它们相等.

注意, 只有当两个函数的定义域与对应关系都相同时, 才称两个函数相同.

例 3 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = x \cos x \quad (2) y = x^2 - \cos x \quad (3) y = (\sqrt{x})^2$$

解 (1) 因为函数 $y = x \cos x$ 的定义域为 R , 是对称集.

$$\text{又 } f(-x) = -x \cos(-x) = -x \cos x = -f(x)$$

所以 $y = x \cos x$ 是奇函数.

(2) 函数 $y = x^2 - \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是对称集,

$$\text{又 } f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x)$$

所以 $y = x^2 - \cos x$ 是偶函数.

(3) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 不是对称集.

所以 $y = (\sqrt{x})^2$ 不是奇函数, 也不是偶函数即是非奇非偶函

数 .

注意:判定函数的奇偶性应首先考察函数所给区间是否为对称集 .

例 4 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 2x - 4 \quad (2) y = \frac{2x + 3}{3x - 1}$$

解 (1) 函数 $y = 2x - 4$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

且有 $x = \frac{y}{2} + 2$, 把 x 与 y 对换得反函数:

$$y = \frac{x}{2} + 2, \text{ 其定义域为 } (-\infty, +\infty), \text{ 值域为 } (-\infty, +\infty).$$

(2) 函数 $y = \frac{2x + 3}{3x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$, 且有 $x = \frac{3 + y}{3y - 2}$, 把 x 与 y 对换得反函数:

$$y = \frac{3 + x}{3x - 2}, \text{ 其定义域为 } (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty). \text{ 值域为 } (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty).$$

习题 12.1

1. 判断下列各对函数是否为同一函数?

(1) $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$

(2) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$ 与 $g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}$

(3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\lg(2-x)}$

$$(2) y = \frac{1}{|x| - x}$$

$$(3) y = \log_3(x^2 - 5x + 6)$$

$$(4) y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x - 1}{7}$$

$$(5) y = \sqrt{|x| - 1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

3. 求下列各函数的函数值:

$$(1) \text{ 已知 } f(x) = \frac{4}{9x+3}, \text{ 求 } f(x+2)$$

$$(2) \text{ 已知 } f(x+1) = x^2 - x + 1, \text{ 求 } f(x)$$

$$(3) \text{ 已知 } f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \text{ 求 } f(1), f(a+1), f(-x), f\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt{x^2 + 1}, (x < 0)$$

$$(2) y = 1 + \lg(x+3), (x > -3)$$

5. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = x^2 - 3\cos 2x$$

$$(2) y = x(x-1)(x+1)$$

$$(3) y = a^x + a^{-x}$$

$$(4) y = x \sin x$$

$$(5) y = x - x^2$$

6. 设 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 且有 $2f(x) + 1 = 2f(x+1)$, 试求 x 的值.

7. 证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 是单调减函数.

12.2 基本初等函数与初等函数

一、内容提要

基本初等函数、复合函数、初等函数的概念, 基本初等函数的

图像,复合函数的复合与分解.

二、题型示例

例 1 将 y 表为 x 的函数.

$$(1) y = u^2, \quad u = \sin v, \quad v = 2^x$$

$$(2) y = \lg u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = 1 + \tan x$$

解 (1) 将 $v = 2^x$ 代入 $u = \sin v$, 得 $u = \sin 2^x$, 将其再代入 $y = u^2$, 得 $y = \sin^2 2^x$.

(2) 将 $v = 1 + \tan x$ 代入 $u = \sqrt{v}$ 得 $u = \sqrt{1 + \tan x}$, 最后将其再代入 $y = \lg u$ 中, 得: $y = \lg \sqrt{1 + \tan x}$.

例 2 指出下列各复合函数的复合过程:

$$(1) y = \tan\left(2x + \frac{1}{4}\right) \qquad (2) y = \frac{1}{(1 - x^2)^3}$$

$$(3) y = 3^{2\cos^2 x} \qquad (4) y = 2^{\arctan \frac{1}{x}}$$

解 (1) $y = \tan\left(2x + \frac{1}{4}\right)$ 是由 $y = \tan u$, $u = 2x + \frac{1}{4}$ 两个函数复合而成.

(2) $y = \frac{1}{(1 - x^2)^3}$ 是由 $y = \frac{1}{u^3}$, $u = 1 - x^2$ 复合而成.

(3) $y = 3^{2\cos^2 x}$ 是由 $y = 3^u$, $u = 2v^2$, $v = \cos x$, 这三个函数复合而成.

(4) $y = 2^{\arctan \frac{1}{x}}$ 是由 $y = 2^u$, $u = \arctan v$, $v = \frac{1}{x}$ 这三个函数复合而成.

习题 12.2

1. 填空题

(1) 确定下列各式中 x 的正负:

若 $10^x = 6$ 则 x 0, 若 $2^x = 0.5$ 则 x 0.

(2) 已知 $a^{\frac{3}{2}} < a^{\sqrt{2}}$ 则 a 的取值范围是_____ .

(3) $\log_2 \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\log_5 7^0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 选择题

(1) 下列四个关系式中正确的是() .

A. $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

B. $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$

C. $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$

D. $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$

(2) 下列函数中在(- , +)内是单调减少的是() .

A. $y = (\frac{4}{3})^x$

B. $y = (\frac{3}{4})^x$

C. $y = 9^x$

D. $y = 1.6^x$

(3) $\frac{\log_3 9}{\log_2 4}$ 的值是() .

A. 1

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

3. 比较下列两个数的大小:

(1) $(\frac{3}{4})^{-\frac{1}{3}}$ 与 $(\frac{3}{4})^{-\frac{1}{4}}$

(2) $(-\frac{3}{5})^{-\frac{2}{5}}$ 与 $(-\frac{5}{6})^{-\frac{2}{5}}$

4. 化简:

(1) $\lg 1 + (\frac{1}{5})^0 + (64)^{-\frac{1}{3}}$

(2) $(\log_2 4 + \log_2 8)(\log_5 3 + \log_5 \frac{1}{3})$

5. 将 y 表成 x 的函数 .

(1) $y = 3^u, u = v^2, v = 2x + 1$

(2) $y = e^u, u = \sin v, v = x^2 + 1$

6. 指出下列各复合函数的复合过程:

$$(1) y = (\arccos \sqrt{x})^2$$

$$(2) y = \ln(\tan e^{\frac{x}{2}})$$

$$(3) y = \sin e^{\sqrt{x}}$$

$$(4) y = e^{\sin \frac{x}{2}}$$

$$(5) y = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$(6) y = \lg \sin \sqrt{1+x^2}$$

12.3 函数的应用

一、内容提要

简单函数关系的建立,常用函数的作图.

二、题型示例

例1 某炼油厂要建造一个容积为 V_0 的圆柱形油罐(如图 12.1),试建立表面积和底半径之间的函数关系.

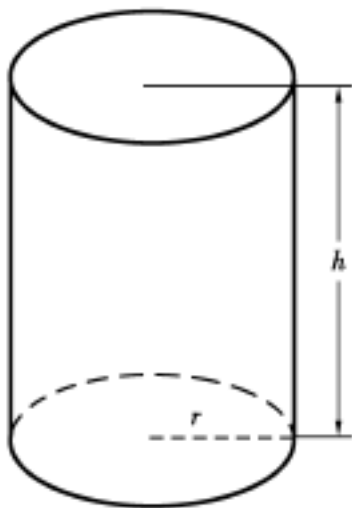


图 12.1

解 显然,圆柱油罐的尺寸设计取决于其底半径和高,当圆柱容积给定后,底半径(设为 r)与高(设为 h)并没有随之而被完全确定,容易看出,油罐总表面积等于上下底面(都是半径为 r 的圆)面积及侧面(长为 $2\pi r$,高为 h 的矩形)面积之和:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

由题意,容积是给定的,故 r 与 h 之间有下列约束关系

$$r^2 \cdot h = V_0 \quad \text{即} \quad h = V_0 / r^2 \text{ .代入}$$

$$S = 2r^2 + 2rh \text{ 中得} \quad S = 2r^2 + 2V_0 / r \text{ .}$$

这才是所求的函数关系式,其定义域为 $(0, +\infty)$.

由此例可看出,建立函数关系时,首先应根据题意弄清哪些是常量,哪些是变量,哪个是自变量,哪个是因变量,然后根据题意建立要求的函数关系,最后指出该函数的定义域 .

例 2 某运输公司规定一吨货物的运价为:在 a 公里内每公里 k 元,超过 a 公里,每增加一公里为 $\frac{4}{5}k$ 元 .试表示运价 y 和里程 s 之间的函数关系 .

解 当里程在 a 公里内 $(0 \leq s \leq a)$,运价 $y = k \cdot s$.

当里程超过 a 公里 $(s > a)$,则超过的里程为 $(s - a)$ 公里,

此时运价为 $y = ka + \frac{4}{5}k(s - a)$, 于是

$$y = \begin{cases} ks & 0 \leq s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s - a) & s > a \end{cases} \quad \text{其定义域为}[0, +\infty) \text{ .}$$

例 3 作下列函数的图像:

(1) $y = 2^{x-1} - 2$

(2) $y = \log_2(-x)$

解 (1) 先作 $y = 2^x$ 的图像 .

然后把 $y = 2^x$ 的图像往右平移 1 个单位,得 $y = 2^{x-1}$ 的图像 .

最后把 $y = 2^{x-1}$ 的图像向下平移 2 个单位

得 $y = 2^{x-1} - 2$ 的图像,如图 12.2 .

(2) 作 $y = \log_2 x$ 的图像关于 y 轴的对称图像,如图 12.3 .

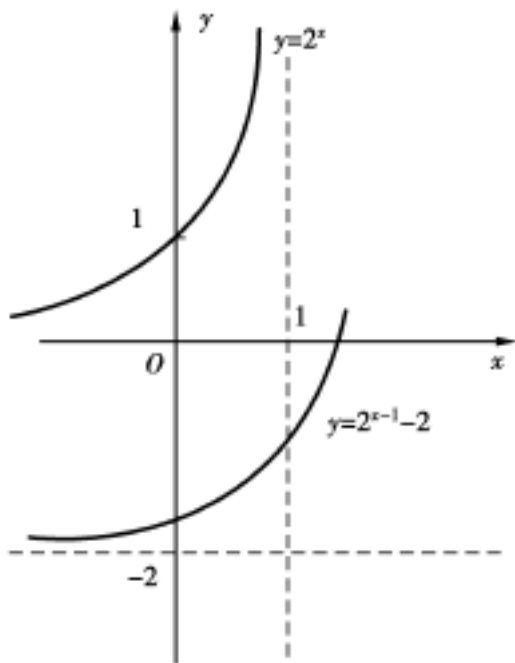


图 12.2

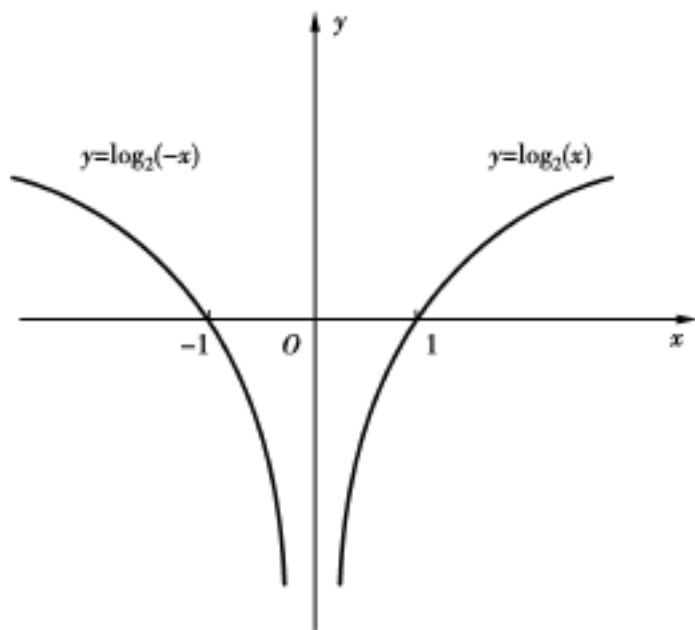


图 12.3

习题 12.3

1. 设一矩形, 长为 x , 面积为 A , 周长为 S .
 - (1) 若已知面积 A 一定, 将周长 S 表为 x 的函数.

(2) 若已知周长 S 一定, 将面积 A 表为 x 的函数 .

2. 在半径为 r 的球内, 作一内接长方体, 假设长方体的底面积为一正方形 . 试将长方体的体积 V 表为底边长 x 的函数 .

3. 已知某水渠的横断面为等腰梯形 (如图) . 其斜角为 α , 水渠边坡长为 l , $ABCD$ 称为过水截面:

(1) 若已知底宽为 a , 求过水截面的面积 S 与水渠 h 的函数关系式, 并指出其定义域 .

(2) 若已知过水截面的面积 S , 求湿周 $L (= AB + BC + CD)$ 与水渠 h 的函数关系式, 并指出定义域 .

4. 某工厂有一水池, 其容积为 100m^3 , 原有水 10m^3 . 现在每分

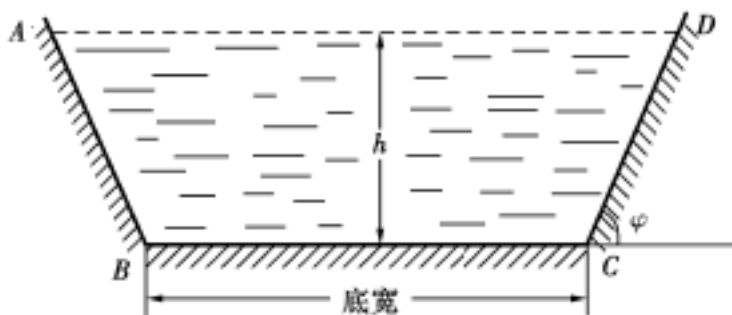


图 12.4

钟注入 0.5m^3 的水, 试将池中水的体积表为时间 t 的函数 . 并问需多少分钟水池才能灌满 .

5. 旅客乘火车时, 随身携带物品不超过 20kg 的免费, 超过 20kg 的, 每千克收费 0.20 元, 超过 50kg 的部分每千克加收 5% 费用 . 试列出收费与物品重量的函数关系 .

6. 描绘下列函数的图像:

(1) $y = (x - 1)^2 - 2$

(2) $y = - / x + 1 /$

(3) $y = / \log_2 (x - 1) - 1 /$

自测试题及解答

试题(A 卷)

1. 判断题 (每小题 2 分, 共计 20 分)