高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书

主编　刘书田

概率论与数理统计学习辅导与解题方法

高旅端　编

高等教育出版社

策划编辑　李艳馥
责任编辑　薛春玲
封面设计　王凌波
责任绘图　杜晓丹
版式设计　陆瑞红
责任校对　杨雪莲
责任印制

内 容 提 要

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习《概率论与数理统计》课程的辅导教材,内容包括随机事件与概率,随机变量的分布和数字特征,随机向量,抽样分布,统计估计,假设检验,回归分析.

本书注重对基本概念、基本理论的理解及应用,选题广泛,应用性强,每章在详细讲解例题的基础上,配有小结和自测题,以使读者融会贯通,举一反三.

本书是经济类、管理类学生学习和考研的必备读物,对工科院校的学生同样适用,它又是一本颇具特点的教学参考书,对参加自学考试、专升本考试和成人教育的读者是本无师自通的自学指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导与解题方法 高旅端编 .
—**北京**:**高等教育出版社**,2003 .11
(**高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书 刘书田主编**)
ISBN 7 - 04 - 012938 - 8

Ⅰ. 概 . . . **Ⅱ. 高** . . . **Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教学参考资料②数理统计 - 高等学校 - 教学参考资料**
Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2003)**第** 093483 **号**

出版发行	**高等教育出版社**	**购书热线**	010 - 64054588
社　　址	**北京市西城区德外大街** 4 **号**	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http: www .hep .edu .cn
总　　机	010 - 82028899		http: www .hep .com .cn

经　　销 **新华书店北京发行所**
印　　刷

开　　本	850×1168 1 32	**版　　次**	**年　月　第** 1 **版**
印　　张	12.625	**印　　次**	**年　月第　次印刷**
字　　数	320 000	**定　　价**	16.00 **元**

前　　言

《高等学校经济管理学科数学基础》系列辅导丛书包括三个分册:“微积分学习辅导与解题方法”,“线性代数学习辅导与解题方法”和“概率论与数理统计学习辅导与解题方法”,是财经类、管理类大学本科生学习《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》时起到辅导教材作用的用书.本系列辅导丛书适应高等教育新形势下教改的精神,以教育部颁布的《经济数学基础》大纲为准,紧密结合经济类、管理类面向21世纪的课程教材,是编写者数十年教学经验的积累.

本系列辅导丛书选题广泛、典型,并有针对性.例题编排以内容为准,以题型归类.用“讲思路举例题”与“举题型讲方法”的思维方式,揭示具有共性题目的解题思路;概括题型特征,归纳解题方法.讲述例题,着重分析题目条件与结论之间的逻辑关系;着重讲述解题思路的源头;注意讲述解题技巧,还通过例题指出在运用解题方法时和解题过程中易犯的错误,使读者达到融会贯通、举一反三的境地,提高逻辑推理和分析判断能力,实现掌握解题思路、解题方法由继承性向创造性跃进.阅读本系列辅导丛书,可以深入理解、巩固提高和灵活运用所学知识,可以思路畅通,实现纵向深入,横向跨越,提高解题能力.

学习数学就必须解题,解题要以自己的实践过程来实现.书中有些例题解题步骤书写简略,望读者在阅读这些例题时,要边看、边思索、边推导.思索由前一式如何过渡到后一式,推导后一式的结果如何由前一式而得,特别是本系列辅导丛书,每章之后都配有自测题(书后附有参考答案与解法提示),望读者能独立完成自测

题,并能有新的解题方法和捷径.每章末以小结形式概括本章的知识点、重点、难点以及掌握本章内容需要特别注意的方面.还阐明本章内容与前后各章内容的联系,以使知识科学化、系统化.

本系列辅导丛书可作为非数学类专业本科生学习大学数学用书,可作为报考经济类、管理类硕士研究生应试复习大学数学用书,可作为授课教师的教学参考书,也可作为参加自学考试、专升本考试和成人教育的读者的学习指导书.

本系列辅导丛书,经统一策划,集体讨论,分工执笔,相互审阅书稿的反复推敲而成的.系列辅导丛书由刘书田任主编,其中,《微积分学习辅导与解题方法》由冯翠莲、刘书田主笔,由高旅端、王中良审阅书稿;《线性代数学习辅导与解题方法》由王中良主笔,由高旅端、冯翠莲、刘书田审阅书稿;《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》由高旅端主笔,由王中良,冯翠莲、刘书田审阅书稿.

在辅导教材的编写过程中,汲取了同行专家提出的许多宝贵建议;得到了高等教育出版社的有关领导和负责同志的协助和支持,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,望读者指正.

编　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件

随机事件是一个基本概念.随机事件是随机试验样本空间中的部分基本事件所组成的集合,随机事件间的关系和运算与集合间的关系和运算是相当的.

一、事件的表示

1. 对一个具体的事件,要会用数学符号表示它.在此基础之上,要善于使用事件间的关系和运算,用比较简单的事件表示比较复杂的事件.

例1　向目标射击两次,用 A 表示事件“第一次击中目标”,用 B 表示事件“第二次击中目标”,试用 A, B 表示下列各事件:

(1) 只有第一次击中目标;

(2) 仅有一次击中目标;

(3) 两次都未击中目标;

(4) 至少一次击中目标.

解　显然,A 表示第一次未击中目标,B 表示第二次未击中目标.

(1) 只有第一次击中目标隐含着第二次未击中目标,因此表示为 $A\ B$.

(2) 仅有一次击中目标意味着第一次击中目标而第二次未击中目标或者第一次未击中目标而第二次击中目标,因此表示为 $A\ B \cup AB$.

(3) 两次都未击中目标显然可以表示为 AB .

(4) 至少一次击中目标包括仅一次击中目标或者两次都击中目标,因此可以表示为 $AB\cup AB\cup AB$.另外,至少一次击中目标也可以理解为第一次击中目标和第二次击中目标这两个事件至少有一个发生,因此可以表示为 $A\cup B$.这样, $A\cup B = AB\cup AB\cup AB$.

2. 在使用事件间的关系和运算表示某一事件时,经常使用以下三种方法:第一种方法是根据事件间的关系和运算的定义;第二种方法是画图(文氏图);第三种方法是先写出原事件的对立事件,利用对立事件的对立事件就是原事件来表示原事件,这常用于原事件的对立事件容易写出时,同时要使用事件运算的对偶律 .

例 2 设 A, B, C 为三个事件,使用 A, B, C 表示事件 $D=$ “三个事件中至少有一个发生”.

解 第一种方法:使用事件运算的定义知 $D= A\cup B\cup C$.

第二种方法:画文氏图(图 1 - 1) .图 1 - 1 表示了一般的情形,其中共有 8 个部分,分别表示 8 个事件 .事件 D 包括 7 部分,它们是 $ABC, ABC, ABC, ABC, ABC, ABC, ABC$.因此有

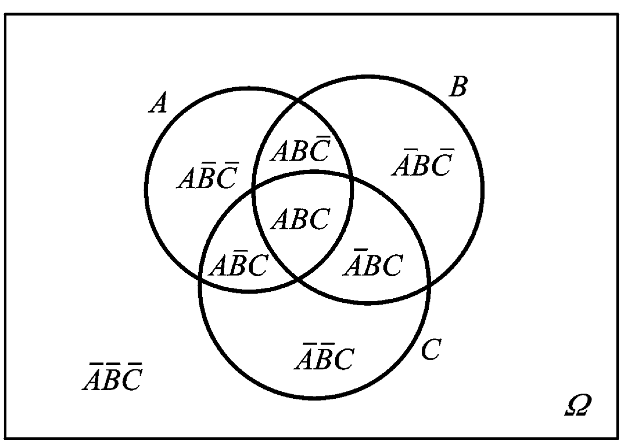

图 1 - 1

$$D = ABC\cup ABC\cup ABC\cup ABC\cup ABC\cup ABC\cup ABC .$$

第三种方法:先写出 D 的对立事件

$$D = \text{“三个事件都不发生”} = A\ B\ C,$$

而 D 的对立事件就是 D,因此, $D = \overline{A\ B\ C}$.使用对偶律易得 $D = \overline{A\ B\ C} = A \cup B \cup C$.

注释:使用事件间的关系和运算表示某一事件时,表示方法有时不惟一,如本例中事件 D 的表示法和例 1 中的(4).在进行概率计算时,要选择其中的一种容易使用的表示法.另外,要弄清楚一个事件的对立事件的确切含义,如本例中“三个事件中至少有一个发生”与“三个事件都不发生”是互为对立的两个事件;而“三个事件都发生”与“三个事件都不发生”则不是互为对立的两个事件.

二、互不相容事件与对立事件

这是两个不同的概念,但是它们之间有着紧密的联系.事件 A 与其对立事件 A 一定是两个互不相容的事件;但两个互不相容的事件则不一定是对立事件.

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,也有类似的两个概念,即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是完全事件组.显然事件 A 与其对立事件 A 构成一个完全事件组.

例 3 抛掷一颗骰子,观察其出现的点数.设事件 A =“掷出偶数点”, B =“掷出奇数点”, C =“掷出 1 点”, D =“掷出 3 点”, E =“掷出 5 点”,讨论这些事件的相容关系和对立关系.

解 A 与 B 是对立事件,并且构成一个完全事件组.C, D, E 三个事件是两两互不相容的事件,但不构成一个完全事件组.A, C, D, E 是 4 个两两互不相容的事件,并且构成一个完全事件组.

三、事件的运算

在进行事件的运算时,经常使用事件的运算律,包括交换律、结合律、分配律和对偶律.此外,关系式 $A - B = AB$, $A = AB \cup AB$, $A \cup B = A \cup (B - A)$ 也常用到.

例 4 设 A, B, C 是一完全事件组,求 $A \cup B \cup C$.

解 使用对偶律, $A \cup B \cup C = \overline{ABC}$,注意到 A, B, C 两两互

不相容,因此 $ABC = \varnothing$,从而 $\overline{ABC} = \overline{\varnothing} = \Omega$,即 $A \cup B \cup C = \Omega$.

例 5 设 A, B, C 是三个事件,证明:

$$AB \cup AB \cup AB = \overline{AB} .$$

证 使用结合律 $AB \cup AB \cup AB = AB \cup \quad AB \cup AB$,注意到 $AB \cup AB = B$,而 $AB \cup B = (B - A) \cup B = \Omega - AB = \overline{AB}$,从而原等式成立 .

§1.2 概 率

概率是一个重要的基本概念,概率的基本性质是进行概率计算的基础 .古典概型是一种重要的概率模型 .

一、使用概率的基本性质进行计算

首先利用事件间的关系和运算,把要计算概率的事件用一些简单事件表示,这些简单事件的概率通常是容易求得的;然后使用概率的基本性质,把要计算的概率转化为计算简单事件的概率 .这里,公式 $P(A) = 1 - P(A)$ 和 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 是两个很有用的公式 .

例 1 设 $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(AB) = z$,用 x, y, z 表示:

(1) $P \quad A \cup B$;(2) $P \quad AB$;(3) $P \quad AB$.

解 (1) 利用对偶律: $A \cup B = \overline{AB}$,可得

$$P \quad A \cup B \quad = P \quad \overline{AB} \quad = 1 - P(AB) = 1 - z .$$

(2) 利用对偶律: $AB = \overline{A \cup B}$,可得

$$\begin{aligned} P \quad AB \quad &= P \quad \overline{A \cup B} \quad = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \quad P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 1 - x - y + z . \end{aligned}$$

(3) $A = AB \cup AB$,并且 AB 与 AB 互不相容,于是 $P(A) = P(AB) + P(AB)$,从而

$$P \quad AB \quad = P(A) - P(AB) = x - z .$$

例 2 在某城市中发行三种报纸 A, B, C .经调查,订阅三种

报纸 A, B, C 的比例分别是 0.45, 0.35 和 0.30, 同时订阅两种报纸 AB, AC, BC 的比例分别为 0.10, 0.08, 0.05, 订阅全部三种报纸的比例为 0.03 .求下列各事件的概率:

(1) 只订阅报纸 A 的;

(2) 只订阅报纸 A, B 的;

(3) 只订阅一种报纸的;

(4) 正好订阅两种报纸的;

(5) 至少订阅一种报纸的;

(6) 不订阅任何报纸的 .

解 已知 $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 0.30$, $P(AB) = 0.10$, $P(AC) = 0.08$, $P(BC) = 0.05$, $P(ABC) = 0.03$.

(1) 所求概率为 $P\ \ ABC$.由于 $ABC = A\ \ \overline{B \cup C} = A - (B \cup C) = A - A(B \cup C)$, $A(B \cup C) \quad A$, 从而

$$P(ABC) = P(A) - P\ \ A(B \cup C)$$
$$= P(A) - P(AB \cup AC)$$
$$= P(A) - \quad P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$
$$= 0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30 .$$

(2) 所求概率为 $P(ABC)$.由于 $ABC = AB - C = AB - ABC$, $ABC \quad AB$, 从而

$$P(ABC) = P(AB) - P(ABC) = 0.10 - 0.03 = 0.07 .$$

(3) 所求概率为 $P\ \ ABC \cup ABC \cup ABC$.由于 ABC, ABC, ABC 两两互不相容(可参见例 2 中的图 1 - 1), 因此, 所求概率是这三个事件的概率之和 .由(1)已得到 $P(ABC) = 0.30$, 同理可以求得

$$P\ \ ABC\ \ = P(B) - \quad P(AB) + P(BC) - P(ABC)\ \ = 0.23,$$
$$P\ \ ABC\ \ = P(C) - \quad P(AC) + P(BC) - P(ABC)\ \ = 0.20,$$

于是

$$P\ \ ABC \cup ABC \cup ABC\ \ = 0.30 + 0.23 + 0.20 = 0.73 .$$

(4) 所求概率为 $P\ \ ABC \cup A\overline{B}C \cup ABC$.由于 ABC, ABC,

ABC两两互不相容(可参见例2中的图1-1),因此,所求概率是这三个事件的概率之和.由(2)已得到$P(ABC)=0.07$,同理可以求得

$$P(ABC)=P(AC)-P(ABC)=0.05,$$
$$P(ABC)=P(BC)-P(ABC)=0.02,$$

于是

$$P\quad ABC\cup ABC\cup ABC\quad =0.07+0.05+0.02=0.14.$$

(5) 所求概率为$P(A\cup B\cup C)$.使用三个事件之和的概率加法公式,得到

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03\\&=0.90.\end{aligned}$$

(6) 所求概率为$P(A\ B\ C)$.由对偶律可得

$$\begin{aligned}P(A\ B\ C)&=P\quad \overline{A\cup B\cup C}\quad =1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-0.90=0.10.\end{aligned}$$

注释:关于事件之差的概率性质是:若$B\quad A$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$,此处条件$B\quad A$是不可缺少的.而对于一般的两个事件A,B,由于$A-B=A-AB$, $AB\quad A$,因此$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.本例的(1)和(2)中都使用了这个公式.

二、古典概型

古典概型具有以下两个特点:随机试验只有有限个可能结果;每个可能结果发生的可能性相同 这里的可能结果即试验的基本事件.

古典概型中事件A的概率的计算公式是

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}.$$

这个公式看起来简单,但由于古典概型所涉及的具体问题各式各样,计算N和M的方法没有固定格式,往往十分灵活,而且容易把基本事件重复或遗漏计算,因此,有些古典概型的问题是相当难