高等数学指导与提高

(上　册)

主　编　李安平

副主编　冀礼鹏　井爱雯

编　者　李安平　冀礼鹏　井爱雯

王国正　王　莉　刘利华

潭宏武

西北工业大学出版社

【内容提要】 本书是与同济大学主编的《高等数学》(第4版)相配套的辅导书。各章内容都分为四部分:第一部分为内容提要,简要介绍该章的内容;第二部分为典型例题分析,精选出课程内容的典型题,并给出详细解答,同时在题后的点评中对解题方法、技巧等作了归纳总结;第三部分为练习题,作为教材习题的补充;第四部分为章测试题,是根据课程要求给出的模拟或全真试题。附录为习题及章测试题参考答案。

本书可作为高等学校理工类专业本科、大专学生自学和复习的辅导用书,也可作为报考研究生的强化训练辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学指导与提高/李安平主编;冀礼鹏等编.西安:西北工业大学出版社,2000.11
ISBN 7-5612-1187-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②冀… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第059848号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路127号 邮编:710072 电话:(029)8493844
网　　址: http://www.nwpup.com
印 刷 者: 西安市向阳印刷厂
开　　本: 850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张: 12.187 5
字　　数: 297千字
版　　次: 2001年11月第1版 2001年11月第1次印刷
印　　数: 1～4 000册
定　　价: 本书10.00元(上、下册共18.00元)

目　　录

(上　册)

前　　言

高等数学是理工类学生一门重要的基础课，它的理论与方法在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。为了帮助广大读者正确理解和掌握它的基本理论和方法，增强分析问题和解决问题的能力，在陕西省工科数学指导委员会的统一组织下，作者编写了这套高等数学辅导教材。

本书是以高等数学基础理论中一些典型题目的分析解答为中心，与同济大学主编的《高等数学》(第 4 版)(高等教育出版社)教材相配套的学习指导书。可以作为学生自学和复习的辅导用书，也可作为高等数学习题课的教学参考书，还可作为高年级同学报考研究生的辅导用书。

本书的章节及其内容与《高等数学》(第 4 版)教材完全对应。各章内容都分为四部分：第一部分为内容提要，简要介绍该章的内容，其中突出了重点和难点，帮助学生在学习和复习时概括了解学习内容；第二部分为典型例题分析，例题的选择力求覆盖课程内容的基本知识点，在给出详细解答的基础上，对一些典型题的解法以点评的形式作了归纳总结；第三部分为练习题，作为教材习题的补充；第四部分为章测试题，用于检验学生对该章内容掌握的程度，每套测试题的试卷结构及难易程度略高于教学大纲的要求。附录为习题及章测试题参考答案及提示。

本书由李安平任主编，冀礼鹏、井爱雯任副主编，参加编写的人员是李安平、冀礼鹏、井爱雯、王国正、王莉、刘利华、潭宏武。

在编写本书的过程中得到了西北工业大学出版社的大力帮助和支持，在此表示衷心的感谢。本书由王寿生、孟昭孝做了认真的

审校，他们提出了许多宝贵的建议，特此感谢。

由于时间仓促和编者的水平有限，本书从选题到语言表述难免存在不少缺点、错误，恳请读者予以批评和指正。

希望本书能对读者有所帮助。

编　者

2001 年 9 月于西安

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

(一) 函数

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量，当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的特性

(1) 函数的单值性与多值性：当自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数.

(2) 函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果" $x \in D, f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果" $x \in D, f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 函数的单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 I　D，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的).

(4) 函数的有界性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 X　D，

如果存在正数 M，使得与任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)| \leq M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(5) 函数的周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x \in D$ 有 $x \pm T \in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2 \subset D_1$，那么对于每个数值 $x \in D_2$，有确定的数值 $u \in W_2$ 与之对应，由于 $W_2 \subset D_1$，因此有确定的 y 值与 u 值对应. 这样，对于每个数值 $x \in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，而 u 称为中间变量.

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

(二) 极限

1. 数列的极限

定义　如果 $\forall \varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a 是数列 $\{u_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a$.

2. 函数的极限

定义　如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = A)$$

3. **极限运算法则**

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, **则**

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(2) $\lim f(x) g(x) = \lim f(x) \lim g(x) = AB$.

特别地, $\lim cf(x) = c\lim f(x) = cA$, c **为常数**.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

4. **极限存在准则**

(1) **若在点** x_0 **的某个邻域内(除去点** x_0**)**, **有** $F(x) \leq f(x) \leq \Phi(x)$, **且** $\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \Phi(x) = A$, **则** $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

(2) **如果数列** $\{u_n\}$ **单调增加**, **以** M **为上界**, **则数列有极限**, **而且极限值不大于** M; **如果数列** $\{u_n\}$ **单调减少**, **以** m **为下界**, **则数列有极限**, **而且极限值不小于** m.

5. **两个重要极限**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

6. **无穷大量与无穷小量**

若函数(或数列)以零为极限, **则称该函数(或数列)为无穷小量**; **非零无穷小量的倒数为无穷大量**.

7. **无穷小量的阶**

设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ **都是** x **的同一极限过程的无穷小量**

(1) **若** $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, **则称** $\alpha(x)$ **是比** $\beta(x)$ **高阶的无穷小量**, **记作** $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

(2) **若** $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, **则称** $\alpha(x)$ **与** $\beta(x)$ **是同阶无穷小量**.

(3) **若** $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, **则称** $\alpha(x)$ **与** $\beta(x)$ **为等阶无穷小量**, **记**

作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0$($k$ 为常数),则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$,且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(三) 连续

1. 函数在一点的连续性

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 x_0 点处是连续的.

2. 函数的间断点及分类

若函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1) 在 $x = x_0$ 没有定义;

(2) 虽在 $x = x_0$ 有定义,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽在 $x = x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续,点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,且 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 都存在,则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点;不是第一类间断点的任何间断点,称为第二类间断点.

在第一类间断点中,若 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$,则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

3. 连续函数的运算

(1) 若 $f(x)$, $g(x)$ 都在 x_0 处连续,则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$($g(x_0) \neq 0$) 在 x_0 都连续.

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续,$f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 连续,则复合函

数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也连续.

(3) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 那么

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界;

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有最大值和最小值;

(3) (介值定理) 若 μ是介于 $f(a), f(b)$ $(f(a) \neq f(b))$ 间的任何一个数, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = \mu$.

(4) 若 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

二、典型例题分析

例 1.1 试判断下列各对函数是否相同

(1) $f(x) = \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x$, $g(x) = 1$;

(2) $f(x) = \lg \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $g(x) = \lg \varphi(x) - \lg \psi(x)$;

(3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x}$, $g(x) = \tan x$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$, 且

$$f(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

而 $g(x) = 1$, 定义域为$(-\infty, +\infty)$, 所以 $f(x) \equiv g(x)$.

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域为$\begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ \psi(x) > 0 \end{cases}$或$\begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ \psi(x) < 0 \end{cases}$的全体, 而 $g(x)$ 的定义域只是使不等式组$\begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ \psi(x) > 0 \end{cases}$的 x 全体, 两者不尽相同.

所以，只有当$\begin{cases}\varphi(x) > 0 \\ \psi(x) > 0\end{cases}$有解，而$\begin{cases}\varphi(x) < 0 \\ \psi(x) < 0\end{cases}$无解时，$f(x) \equiv g(x)$，而当$\begin{cases}\varphi(x) < 0 \\ \psi(x) < 0\end{cases}$有解时，$f(x) \neq g(x)$.

(3) 因为

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x} = \begin{cases} \tan x, & 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi \\ -\tan x, & 2k\pi - \pi \leq x \leq 2k\pi \end{cases}$$

所以 $f(x) \neq g(x)$.

点评 由函数定义知，函数关系 $y = f(x)$ 成立必须包含三个因素，即自变量 x 的取值范围(定义域)；因变量 y 依赖于自变量 x 的变化的法则(对应规律)；所有对应的 y 值组成的数集(值域). 在这三个因素中，定义域和对应规律起决定作用，通称为函数关系的两要素. 因此，只有当两函数的定义域及对应规律完全相同时，才能说两个函数是相同的或相等的.

例 1.2 指出函数 $y = e^{\arctan\sqrt{x^2-1}}$ 是怎样复合成的.

解 $y = e^v$, $v = \arctan u$, $u = \sqrt{t}$, $t = w - 1$, $w = x^2$

点评 正确地分析一个复合函数怎样由基本初等函数经过有限次的复合而成，在微积分中是很重要的. 复合函数的复合过程是由里到外，而分析复合层次的分析过程是由外到里的，以本例为例：

$$\xrightarrow{\text{函数的复合过程}}$$

$$\underleftarrow{w = x^2,\ t = w - 1,\ u = \sqrt{t},\ v = \arctan u,\ y = e^v}$$

分析过程

例 1.3 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

试求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = f(u)\big|_{u=g(x)} = \begin{cases} 2u, & 0 < u \le 1 \\ u^2, & 1 < u \le 2 \end{cases}\Bigg|_{u=\ln x} =$

$$\begin{cases} 2\ln x, & 0 < \ln x \le 1 \\ (\ln x)^2, & 1 < \ln x \le 2 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 2\ln x, & 1 < x \le e \\ \ln^2 x, & e < x \le e^2 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = g(u)\big|_{u=f(x)} = \ln(u)\big|_{u=f(x)} =$$

$$\begin{cases} \ln 2x, & 0 < x \le 1 \\ \ln x^2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

点评 一般,设

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \\ f_2(x), & x \in I_2 \end{cases}, \quad y = g(x), \quad x \in I$$

其中 I_1, I_2, I 为定义区间,当求复合函数 $f[g(x)]$ 时,先求

$$J_1 = \{x \mid g(x) \in I_1\}, \quad J_2 = \{x \mid g(x) \in I_2\}$$

从而得

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g(x)], & x \in J_1 \cap I \\ f_2[g(x)], & x \in J_2 \cap I \end{cases}$$

当求复合函数 $g[f(x)]$ 时,先求

$$k_1 = \{x \mid f_1(x) \in I\}, \quad k_2 = \{x \mid f_2(x) \in I\}$$

从而得

$$g[f(x)] = \begin{cases} g[f_1(x)], & x \in k_1 \cap I \\ g[f_2(x)], & x \in k_2 \cap I \end{cases}$$

例 1.4 下列函数哪些是周期函数?并求出周期函数的周期 T.

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \cos\dfrac{1}{x}$.

解 根据周期函数的定义,若 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函

数,则有

$$f(x+T)=f(x)$$

(1) 因为 $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$

所以

$$[\sin(x+T)-\sin x][\sin(x+T)+\sin x]=0$$

$$\sin\frac{2x+T}{2}\cdot\cos\frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2x+T}{2}\cdot\sin\frac{T}{2}=0$$

由此可得

$$\sin\frac{2x+T}{2}=0 \qquad (1)$$

或

$$\cos\frac{T}{2}=0 \qquad (2)$$

或

$$\cos\frac{2x+T}{2}=0 \qquad (3)$$

或

$$\sin\frac{T}{2}=0 \qquad (4)$$

由方程(1),(3)不难看出,T 与 x 有关,因而不能由这两个方程求出 T,由方程(2)可求出 $T=\pi$,由方程(4)可以求出 $T=2\pi$,因此 $y=\sin^2 x$ 是周期为 π的周期函数.

(2) 因为 $\cos\frac{1}{x+T}-\cos\frac{1}{x}=0$

所以 $$2\sin\frac{2x+T}{2x(x+T)}\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0$$

由此可得

$$\sin\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0 \qquad (1)$$

或

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0 \qquad (2)$$

由方程(1),(2)看出,T 与 x 有关,不能由它们解出 T,因此 $y=\cos\frac{1}{x}$ 不是周期函数.

点评 判断一个函数是否是周期函数和求周期函数的周期的步骤:

(1) 列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$;

(2) 由上述方程解出 T;

(3) 若 $T>0$, 且为满足方程的最小值时, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且函数的周期等于 T; 若 $T\leq 0$ 或 T 与 x 有关, 则 $f(x)$ 不是周期函数.

例 1.5 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$, 并且已知当 $y=1$ 时有 $z=x$, 试求函数 $f(x)$ 及 z 的分析表达式.

解 以 $y=1$ 时 $z=x$ 代入 z 的表达式得

$$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1)$$

设 $\sqrt[3]{x}-1=t$, 则 $x=(1+t)^3$ 代入上式得

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t$$

所以, $f(x)$ 及 z 的分析表达式分别为

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

$$z=\sqrt{y}+x-1$$

例 1.6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是奇函数, $f(1)=a$, 且对于任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 问 a 取什么值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 因为 $$f(x+2)-f(x)=f(2)$$

令 $x=-1$, 所以

$$f(1)-f(-1)=f(2)$$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数, 所以

$$f(-x)=-f(x)$$

所以 $$f(1)+f(1)=f(2)$$

即 $$f(2)=2a$$

再令 $x=3$，所以

$$f(5)-f(3)=f(2)$$

所以 $f(5)=f(3)+f(2)=f(1+2)+f(2)=$

$$f(1)+f(2)+f(2)=5a$$

(2) $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，则对任意 x，有 $f(x+2)=f(x)$，又因为

$$f(x+2)-f(x)=f(2)$$

所以 $f(2)=0$，即 $2a=0$，$a=0$.

例 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求函数 $y=f(4x^2)$ 的定义域.

解 令 $t=4x^2$，所以 $f(4x^2)=f(t)$，所以定义域 $0\leq t\leq 1$ 即 $0\leq 4x^2\leq 1$，得 $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$.

所以函数 $y=f(4x^2)$ 的定义域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

例 1.8 用 ε-N 方法证明数列 $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$ 的极限为 1.

证 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{2^n-1}{2^n}-1\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ 即 $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{2^n-1}{2^n}-1\right|<\varepsilon$

所以，此数列的极限为 1.

点评 (1) 数列极限的定义，只能用来验证数 A 是否为某数列 u_n 的极限，而不能用来求极限.

(2) 极限存在时，对于 $\forall A>0$，能找到的 N 不是惟一的，一

般任取一个即可,通常取较小的.如本例中取 $N = \left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$.

(3) 用极限定义验证极限时,要特别注意推理中的逻辑关系,验证极限时用的是“反推”过程,即“欲使 …,只要 …”.

(4) " $\varepsilon > 0$,求 N 的解题思路是:

① 由不等式 $|u_n - A| < \varepsilon$ 出发寻找保证此不等式成立的 n 和 ε 之间的关系式;

② 在证明过程中,一定要使下一步的成立保证上一步的成立,这样才能使求得 N 后,当 $n > N$ 时保证 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立.

例 1.9　试用极限的定义验证: $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = 9$.

证　对于 " $\varepsilon > 0$,要找到这样的 $\delta > 0$,使当 $0 < |x - x_0| < \delta$,即 $0 < |x + 3| < \delta$ 时,恒有 $|x^2 - 9| < \varepsilon$ 而

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |(x - 3)||(x + 3)|$$

满足上述关系的 δ 有无穷多个,由于需要找出一个(它不一定是最小的),因此可以在 $x_0 = -3$ 的某个邻域内来考虑.不妨设 $|(x + 3)| < 1$.

所以　$-1 < x + 3 < 1,\quad -4 < x < -2$

所以　$-7 < x - 3 < -5,\quad |(x - 3)| < 7$

则有　$|(x - 3)(x + 3)| < 7|(x + 3)| < \varepsilon$

即　$$|(x + 3)| < \frac{\varepsilon}{7}$$

由此可知,对于 " $A > 0$,取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$,当 $0 < |x + 3| < \delta$ 时,恒有不等式 $|x^2 - 9| < \varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = 9$.

点评　(1) 与数列极限一样,函数的极限定义只能用来验证极限而不能计算极限.

(2) 由 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 找出 δ 的推理方法和由 $|u_n - A| < \varepsilon$ 找出 N 的推理方法一样,都采用反推的方法,均要求下一步的成