大学数学学习指导

高等数学与数学分析

——方法导引

姚允龙　编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书通过对历届理工科硕士研究生高等数学与数学分析入学试题的总结和分析，简要地复习了这一学科的基本概念与基本方法，同时还借助于各种典型的例子指出学生答卷和作业中常见的错误及其改正的方法。全书重点则放在解题的方法、技巧与经验上。读者从本书提出的一系列新颖有效的解法中可望开阔学习的思路，提高解题的能力。此外，各章都配有许多精选的历届研究生考题及其答案或提示。因此，本书不但可供研究生应试者用作备考的指南，而且对于在校理工科学生及自学者也是学习方法的辅导书。

高等数学与数学分析
——方法导引
姚允龙　编著
复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）
新华书店上海发行所发行　　江苏如东印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 9.5　字数 270,000
1988年2月第1版　　1988年2月第1次印刷
印数 1—12,000
ISBN7—309—00016—1/O·03
统一书号：13253·067　　定价：2.10元

前　言

本书主要供学习高等数学或数学分析的读者复习和应考之用．全书对历届理工科研究生考题进行了归纳和总结，指出了常用的解题方法、技巧和经验。因此，本书对出考题的教师也有一定的参考价值．

在章节安排上，主要是根据复习的方便而不拘泥于逻辑的次序．每章都分两部分．前一部分讲述必须掌握的基本概念和方法以及常见的错误；后一部分介绍各种解题的方法与技巧．

加深对基本概念的理解，尤其是对一些难懂或易搞错的概念的理解，这与提高解题水平是密切相关而又互相促进的．因此，本书在前一部分上化了很多笔墨．

全书提供了一系列的解题方法和技巧，同时还介绍了许多方法和技巧的经验，其中有许多在同类书中是不多见的．为了能收到事半功倍的效果，读者应选做足够数量的练习．书中例题与习题多数是历届研究生考题．习题一般附有较为详细的答案或提示，以方便读者解题时校核和思考．

本书曾得到金福临教授和欧阳光中教授等人的支持．张国梁副教授与胡家骏同志详细阅读了若干章节，并提出了许多宝贵的意见，在此，编者对他们一并表示谢意．

编　者

1986 年 8 月

目　录

第一章 导 数

导数是高等数学最重要的基本概念之一，它反映了一个变量对另一变量的**变化率**；在几何上，它表示切线的斜率．本章总结了导数(包括偏导数)及**微分**的性质和运算法则，并特别注意介绍分段函数在其分界点处的导数的求法 高阶导数的求法以及微分在微分方程变量代换中的特殊用法．读者对复合函数的链导法则应着重加以掌握．

§ 1.1

一、导数

1．**导数的定义** 设 $y=y(x)$．平均变化率 $\Delta y/\Delta x$ 的极限

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

称为 y 对 x 的导函数或导数．导数 dy/dx 也可记为 $y'(x)$，$y'_x(x)$，y'_x, y_x, y'，及 Dy．从一阶导数 y' 出发，可依次定义 $y'', y''', \cdots$，直至 n 阶导数 $y^{(n)}$．

可导点(即存在有限导数 $y'(x)$ 的点 x)必是连续点．

除去支点(当 α 不是整数时，$x=0$ 是 x^α 的支点)及分母为零的 x 外，初等函数 $y(x)$ 在其自然定义域中任意次可导，并且在每点处都可展开成幂级数．譬如 $|x|=\sqrt{x^2}$ 及 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x\neq 0$ 时可任意次求导；

但在特定点 $x=0$ 处的导数须专门讨论.

2. 左右导数 若将导数定义中的极限改为左(右)极限，则得左(右)导数 $y'_{\pm}(x)$. 左(右)可导点必是左(右)连续点. 显然，$y'(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow y'_{+}(x)=y'_{-}(x)$ 存在.

注意：左(右)导数 $y'_{\pm}(x)$ 与导数的左(右)极限 $y'(x\pm 0)$ 是两个概念，不要混淆了.

3. 导数的几何意义 导数 $y'(x)$ 表示曲线在点 $(x,y(x))$ (简称在 x 点)的切线斜率，即 $y'(x)=\operatorname{tg}\alpha$，这里 α 是过 $(x,y(x))$ 点的切线与 x 轴正向的夹角.

若 $y'(x)$ 为有限数，则过 $(x,y(x))$ 点的切线和法线方程分别为：

$$Y-y(x)=y'(x)(X-x),$$

$$Y-y(x)=-\frac{1}{y'(x)}(X-x),\quad y'(x)\neq 0.$$

这里 (X,Y) 是流动坐标. 在 $y'(x)=0$ 时，法线方程为 $X=x$.

在导数 $y'(x)=\infty$ 的 x 处有"垂直"切线 $X=x$ 及"水平"法线 $Y=y(x)$. 因此，不可导点仍可能存在切线.

4. 求导数在特定点 a 处的值 $y'(a)$ 求 $y'(a)$ 有以下三法：

(1) 利用导数定义 $y'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(a+\Delta x)-y(a)}{\Delta x}$；

(2) 先在一般的 x 下求出 $y'(x)$，再代入 $x=a$：

$$y'(a)=y'(x)|_{x=a};$$

(3) 按下面定理来求：设 $y'(x)$ 在 a 点邻近(不包括 a 点本身)存在，又设 $y(x)$ 在 a 点连续且存在极限.

$$\lim_{x\to a}y'(x)=A\quad(\text{包括 }\infty)$$

则 $y'(a)=A$. 当 A 有限时 $y'(x)$ 必在 a 点连续①.

用(2)法来求 $y'(a)$ 须遵循"先求导再代入"的次序，切不可颠倒.

---

① 根据洛必达法则，对下列 0/0 型极限，有

$$y'(a)=\lim_{x\to a}\frac{y(x)-y(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(y(x)-y(a))'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}y'(x)=A.$$

例 1 求 $y=\cos 3x$ 在 $x=\pi/2$ 的导数值.

错误做法：$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)'=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$；

正确做法：$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(\cos 3x)'|_{x=\frac{\pi}{2}}=-3\sin 3x|_{x=\frac{\pi}{2}}=3$

例 2 证明 $y=e^{-1/x^2}$ $(x\neq 0,\ y(0)=0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在任意阶连续导数，并求出 $y^{(n)}(0)$.

解 在 $x\neq 0$ 时，因为 $y(x)$ 是初等函数，故自然有任意阶连续导数. 因此，问题归结为证 $y^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 点存在且连续. 显然 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点连续，又 $x\neq 0$ 时，$y'(x)=2e^{-1/x^2}/x^3$，故(设 $t=1/x^2$).

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}y'(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(\pm\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{e^t}\right)=0 \ .$$

根据 (3) 法，导数 y' 在 $x=0$ 点也存在且连续.

在 $x\neq 0$ 时，用数学归纳法可证：

$$y^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \ ,$$

其中 $P(x)$ 是多项式，再用数学归纳法及类似于一阶导数情形的证法，可知 $y^{(n)}(0)=0$，且 $y^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 点也连续.

当 $y'(x)$ 在特定点不连续时，(3) 法不适用，须改用导数的定义来做.

例 3 求函数 $y=x^2\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0,\ y(0)=0)$ 在 $x=0$ 点的导数 $y'(0)$. 并证明 $y'(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

解 根据导数的定义，可求得

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

在 $x\neq 0$ 时，

$$y'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

可见 $\lim\limits_{x\to 0}y'(x)$ 不存在. 这表示 $y'(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

从上面例子知,不能从极限 $\lim\limits_{x\to a} y'(x)$ 不存在断言 $y'(a)$ 不存在. 而 $y'(a)$ 存在与否的最后判定应利用导数的定义.

我们常遇到如下类型的问题:

例 4 已知 $y'(\sin x)=\cos x, 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 求 $y'(x)$.

解这类题并不难,但必须弄清 $y'(\sin x)$ 的确切含义. $y'(\sin x)$ 是指 y' 在 $\sin x$ 点的值,即

$$y'(\sin x)=y'(t)|_{t=\sin x}.$$

解 已知 $y'(t)|_{t=\sin x}=\cos x, 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由于 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-t^2}$, 从而 $y'(t)=\sqrt{1-t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 再将 t 改回到 x 得:

$$y'(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

如果将 $y'(\sin x)$ 理解为 y 对 $\sin x$ 中的 x 求导,那就错了. 我们也可将 $y'(\sin x)$ 理解为 $y(\sin x)$ 对 $\sin x$ 求导,即

$$y'(\sin x)=(y(\sin x))'_{\sin x}.$$

练习

1. 求 $y=e^x$ 过 (0, 0) 点的切线方程及相应的法线方程(注意: (0, 0) 不在曲线 $y=e^x$ 上).
2. 用导数定义证明:若 $y=y(x)$ 是偶函数,则 $y', y''', \cdots$ 是奇函数, 而 $y'', y^{(4)}, \cdots$ 是偶函数(假定所出现的导数都存在).
3. $f(x)=(\sqrt{1+x}-1)/\sqrt{x}$ $(x>0, \quad f(0)=0)$, 求 $f'_+(0)$.
4. 已知 $y'\left(\frac{1}{x}\right)=x^2, y(1)=1$, 求 $y(x)$.
5. 设 $y=f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可导, $f(0)=0$, 记

$$g(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq 0, \\ f'(0), & x=0, \end{cases}$$

求证 $g(x)$ 一阶连续可导(提示:用洛必达法则)

答: 1. 切线 $y=ex$, 法线 $y-e=-e^{-1}(x-1)$;

2. $y'(-x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(-x+\Delta x)-y(-x)}{\Delta x}$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x-\Delta x)-y(x)}{-\Delta x}=-y'(x),$$

以下类似；3. $f'_+(0)=+\infty$； 4. $y=2-1/x$； 5. 从 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x'}$ $=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=g(0)$ 知 $g(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 连续．在 $x\neq 0$ 时，

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

连续；在 $x=0$ 时，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=f''(0)/2$（用洛必达法则），故 $g'(0)$ 存在，且 $g'(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

5．分界点的导数 设已给分段函数

$$y(x)=\begin{cases}\phi(x), & x<a,\\ A, & x=a,\\ \psi(x), & x>a.\end{cases}$$

现要求分界点 $x=a$ 处的导数 $y'(a)$．

首先，$y=y(x)$ 在 $x=a$ 连续 $\Longleftrightarrow\phi(a-0)=\psi(a+0)=A$．其次，与上段类似，求 $y'(a)$ 有三个常用的办法：

（1）利用左（右）导数的定义：

$$y'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\psi(a+\Delta x)-A}{\Delta x},$$

$$y'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\phi(a+\Delta x)-A}{\Delta x},$$

当 $y'_+(a)=y'_-(a)$ 且有限时，$y'(a)$ 存在且 $y'(a)=y'_+(a)=y'_-(a)$；

（2）若原来 $\phi'(a),\psi'(a)$ 是存在的且 $A=\phi(a)=\psi(a)$，则当 $\phi'(a)=\psi'(a)$ 时即知 $y'(a)=\phi'(a)=\psi'(a)$；

（3）按以下定理来求：设 $y(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $x\neq a$ 时，$\phi'(x)$，$\psi'(x)$ 在各自的定义域中存在且 $\psi'(a+0)=\phi'(a-0)=B$，则 $y'(a)=B$ 且 $y'(x)$ 在 $x=a$ 点连续．

在（2）法可行时，求 $y'(a)$ 极其简单，这时 $y'_+(a)=\psi'(a)$；$y'_-(a)=\varphi'(a)$．（3）法在求连续导数时较方便，但应强调指出，用此法时首先要验证 $y(x)$ 在 a 点的连续性．

例 5 $y(x)=|x|$，求 $y'(0)$.

解 因

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

故 $\psi(x)=x, \phi(x)=-x$. 又 $\psi'(0)=1, \phi'(0)=-1$. 得

$$y'_+(0)=\psi'(0)=1\neq y'_-(0)=\phi'(0)=-1.$$

因此 $y'(0)$ 不存在.

例 6 求 a, b 使

$$y=\begin{cases}ax+b, & x\geqslant 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$$

在 $x=0$ 点可导

解 由于 y 于 $x=0$ 处连续 $\Longleftrightarrow y(+0)=y(-0)$，由此可得 $b=1$.
又 y 于 $x=0$ 处可导 $\Longleftrightarrow y'_-(0)=y'_+(0)$，可得 $2x|_{x=0}=a$. 故 $a=0$.

练习

1. 讨论下列函数的连续性与可导性 $F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$

答：1. 可求出

$$F(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

$F(x)$ 于 $x=1$ 处连续 $\Longleftrightarrow a+b=1$，$F(x)$ 于 $x=1$ 处可导 $\Longleftrightarrow a=2, b=-1$

6. 偏导数 设已给二元函数 $z=z(x,y)$. 固定 y（或 x），则 $z=z(x,y)$ 可视为 x（或 y）的一元函数，对之求导所得的导数

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}\qquad\left(z_y=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

称为 z 对 x（或对 y）的偏导数.

从以上定义知，为求 $z_x(a,b)$，可先在 $z=z(x,y)$ 中代入 $y=b$：

$$z_x(a,b)=(z(x,b))'_x|_{x=a}.$$

同样，为求 $z_y(a,b)$，可先代入 $x=a$。

例7 设

$$z=\begin{cases}\sqrt{|xy|}\sin\dfrac{1}{x+y}+\sin(x+2y), & x+y\neq 0\\ 0 & x+y=0\end{cases}$$

求 $z_x(0,0)$ 与 $z_y(0,0)$.

解 $z_x(0,0)=(z_x(x,0))'_x|_{x=0}=(\sin x)'_x|_{x=0}=1$;

$z_y(0,0)=(z_y(0,y))'_y|_{y=0}=(\sin(2y))'_y|_{y=0}=2$.

与一元函数不一样的是，两个偏导数 z_x,z_y 的存在并不足以保证 $z(x,y)$ 连续．譬如，对于

$$z(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0,\end{cases}$$

$z_x(0,0)=z_y(0,0)=0$ 存在，但 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点显然不连续．而当 z_x,z_y 不仅存在而且连续时，$z(x,y)$ 也必连续．

注意：两个混合偏导数 z_{xy} 与 z_{yx} 未必总相等．

例8 对于下列函数 f，证明 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证 为了求出 $f_{xy}(0,0)$，须先求 $f_x(0,y)$.

$$f_x(0,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}y\frac{\Delta x^2-y^2}{\Delta x^2+y^2}=-y.$$

故 $f_{xy}(0,0)=(f_x(0,y))'_y|_{y=0}=-1$，同样可求出 $f_{yx}(0,0)=1$．故 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

但在 z_{xy} 与 z_{yx} 之一连续时，就成立 $z_{xy}=z_{yx}$．对高阶混合偏导数也有类似的结论．

二、微分

1．一元函数的微分 设 $y=y(x)$ 在 x 点可导，则

$$\Delta y=y'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

因此,当 $\Delta x\approx 0$ 时,$\Delta y\approx y'(x)\Delta x$.

若 x 是自变量,我们约定 $\Delta x=dx, dy=y'(x)dx$,并称 dy 为 y 在 x 点的微分,它是 x 与 dx 的二元函数. n 阶微分被定义为

$$d^n y=d(d^{n-1}y)=y^{(n)}(x)dx^n$$

(在此假定 $y^{(n)}(x)$ 存在,且 x 是自变量!),其中 $dx^n=(dx)^n$.对一元函数而言,可导与可微是一回事.

练习

1. 已知 $y=\sin 2x$,求 dy 与 d^2y 在 $x=\pi/4, dx=0.1$ 的值.

答:1. $dy|_{x=\pi/4, dx=0.1}=0, d^2y|_{x=\pi/4, dx=0.1}=-0.04$.

2. 多元函数的微分 设 $z=z(x,y)$.全增量 $\Delta z=z(x+\Delta x, y+\Delta y)-z(x,y)$,这里 $\Delta x, \Delta y$ 与 x,y 是完全独立的. 如果 Δz 可表成

$$\Delta z=z_x\Delta x+z_y\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

则称二元函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,而

$$dz=z_x dx+z_y dy$$

称为一阶微分($\Delta x=dx, \Delta y=dy, x,y$ 是自变量!).

须知,对多元函数,可导(即所有的一阶偏导数存在)不足以保证可微. 但在所有的一阶偏导数不仅存在而且连续时,函数必可微.

例 9 求证 $z=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点可导但不可微.

证 $z_x(0,0)=(z(x,0))'_x|_{x=0}=0, z_y(0,0)=(z(0,y))'_y|_{y=0}=0$,故 z 在 $(0,0)$ 可导. 假定 z 在 $(0,0)$ 可微(反证),则(取 $x=y=0$)

$$\Delta z=\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

但这个极限式并不成立(取 $\Delta x=\Delta y$ 即知),故 z 于 $(0,0)$ 点不可微.

若 $z=z(x, y)$ 存在所有的 n 阶连续偏导数,则 n 阶微分 $d^n z$

$\equiv d(d^{n-1}z)$ 也存在，且等于

$$d^n z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

特别 $n=2$ 时，

$$d^2z=z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2.$$

注意以上 $d^nz(n>1)$ 的公式只适用于 x,y 是自变量的场合.

设 u,v 是一元或多元可微函数，则有

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(cu)=cdu(c\text{ 是常数}),$$

$$d(uv)=udv+vdu,\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

练习

1．$u=\sin(x^2+y^2)$，求 d^2u 及 d^2u 在 $dx=y,dy=-x$ 的值.

2．求证下列函数在 $(0,0)$ 点可微并求出 $df|_{x=y=0}$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

3．设 $w=w(x,y,z)$ 二阶连续可微，写出 dw 及 d^2w 的表达式.

答：1. $d^2u=(2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2))dx^2-8xy\sin(x^2+y^2)dxdy+(2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2))dy^2$；取 $dx=y,dy=-x$ 得 $d^2u|_{dx=y,dy=-x}=2(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)$；　2. $df|_{x=0,y=0}=0$；　3. $dw=w_xdx+w_ydy+w_zdz$，$d^2w=\left(dx\dfrac{\partial}{\partial x}+dy\dfrac{\partial}{\partial y}+dz\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2w=w_{xx}dx^2+w_{yy}dy^2+w_{zz}dz^2+2w_{xy}dxdy+2w_{xz}dxdz+2w_{yz}dydz$.

3．**一阶微分形式的不变性**　一阶微分公式 $dy=y'(u)du$ 及 $dz=z_udu+z_vdv$ 在 u、v 不是自变量时仍适用．这里 dy,dz,du 及 dv 均是指对自变量的微分．特别要注意：在 u,v 不是自变量时，$du\neq\Delta u,dv\neq\Delta v$.

但 u,v 不是自变量时，二阶微分公式 $d^2y=y''(u)du^2$，$d^2z=z_{uu}du^2+2z_{uv}dudv+z_{vv}dv^2$ 一般不再成立．事实上

$$\begin{aligned}d^2y&=d(y'(u)du)=dy'(u)\cdot du+y'(u)d^2u\\&=y''(u)du^2+y'(u)d^2u,\end{aligned}$$

多了一项$y'(u)d^2u$. 类似地,

$$d^2z=d(z_u du+z_v dv)$$
$$=z_{uu}du^2+2z_{uv}dudv+z_{vv}dv^2+z_u d^2u+z_v d^2v,$$

多了两项:$z_u d^2u$ 及 $z_v d^2v$.

从中可看出,在 u,v 的二阶微分 $d^2u=0, d^2v=0$, 即 u,v 是自变量的线性函数时,二阶以至 n 阶微分仍具有形式不变性.

例 10 求三元函数 $u=g^{-\frac{1}{2}}, g=x^2+2y^2+3z^2$ 的所有二阶偏导数.

解 六个二阶偏导数一个个地求将是很麻烦的, 但利用一阶微分不变性,可一次将它们全部求出:

$$du=(g^{-\frac{1}{2}})'_g dg=-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}dg$$

$$d^2u=d\left(-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot dg+\left(-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}\right)d^2g$$
$$=\frac{3}{4}g^{-\frac{5}{2}}(dg)^2-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}d^2g$$
$$=\frac{3}{4}g^{-\frac{5}{2}}(2xdx+4ydy+6zdz)^2-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}(2dx^2+4dy^2+6dz^2).$$

dx^2 的系数是 u_{xx}, 故 $u_{xx}=3x^2g^{-\frac{5}{2}}-g^{-\frac{3}{2}}$; $dxdy$ 的系数是 $2u_{xy}$, 故 $u_{xy}=6xyg^{-\frac{5}{2}}$,等等.

例 11 已知 $w=(ax+by+cz)^n$,求 d^nw.

解 $u=ax+by+cz$ 是 x,y,z 的线性函数, 故 $w=u^n$ 的 n 阶微分 d^nw 的形式不变,即:

$$d^nw=(u^n)_u^{(n)}du^n=n!(adx+bdy+cdz)^n.$$

例 12 用新自变量 $u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ 及 $v=x$ 来变换方程

$$x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0.$$

分析 常规方法(即将 z 对 x 及 y 的偏导数用 z 对 u 及 v 的偏导来表示, 然后代入方程而得以 u,v 为自变量的方程) 所需的计算相当

繁复．在本题这种特殊情况下如果在 d^2z 中取 $dx=x$，$dy=-\sin y$，求解过程即可大大简化．

解　视 $z=z(u,v)$，$u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$，$v=x$，这意味着 x,y 是自变量，u，v 为中间变量．按题意，在 $dx=x,dy=-\sin y$ 时，

$$d^2z=z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2=0.$$

另一方面，有

$$d^2z=z_{uu}du^2+2z_{uv}dudv+z_{vv}dv^2+z_ud^2u+z_vd^2v.$$

代入 $dx=x$，$dy=-\sin y$（这时 $du=\operatorname{tg}\frac{y}{2}dx+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}dy=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\cdot 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}=0$，$dv=dx=x$，　$d^2u=\sec^2\frac{y}{2}dxdy+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}dy^2=-x\sin y,d^2v=0$）得

$$0=d^2z=x^2z_{vv}-x\sin y\cdot z_u,$$

即（代入 $x=v,\sin y=2\operatorname{tg}\frac{y}{2}\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)=2xu/(x^2+u^2)$）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

这就是所要求的方程．

下面再举几个应用这种方法的例子．

例 13　已知 $f(x,y,z)$ 可微，且 $x^2=vw,y^2=uw,z^2=uv$，求证

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+w\frac{\partial f}{\partial w}.$$

解　记 $W=f(x,y,z)$．视 x,y,z 为中间变量，u,v,w 为自变量，则按一阶微分形式不变性

$$dW=f_udu+f_vdv+f_wdw=f_xdx+f_ydy+f_zdz.$$

当 $du=u$，$dv=v$，$dw=w$ 时，$2xdx=vdw+wdv=2vw=2x^2$，从而 $dx=x$，类似得 $dy=y,dz=z$．将这些式子代入上式即获证明．

例 14　设

$$
\begin{cases}
x_1 = r\cos\theta_1 \\
x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
\qquad \cdots\cdots \\
x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{cases}
$$

求证方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = ku$ 与 $r\frac{\partial u}{\partial r} = ku$ 等价.

解 视 $r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ 为自变量, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为中间变量. 取 $dr = r$, $d\theta_i = 0$, $(i = 1, \cdots, n-1)$, 则易求出 $dx_1 = x_1, \cdots, dx_n = x_n$. 将这些式子代入微分等式

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \equiv \frac{\partial u}{\partial r} dr + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} d\theta_i$$

即得 $r\frac{\partial u}{\partial r} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = ku$.

练习

1. 设 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$, f 可导. 求证

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

2. 设 $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x+y)$. 以 w 为新函数, u, v 为新自变量, 变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z.$$

3. 设 $u = y/x$, $v = xy$, $w = x + y + z$, 若 $w = w(u, v)$ 为新函数, 试变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

答: 1. 在 $dx = x^2 - y^2 - z^2$, $dy = 2xy$ 时

$$dz = (x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y.$$

$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 的两边除以 y 后, 求微分得

$$\frac{y(2xdx + 2ydy + 2zdz) - (x^2 + y^2 + z^2)dy}{y^2} = f' \cdot \frac{ydz - zdy}{y^2}$$

代入 dx, dy 值，化简得（在 $f'\neq 2z$ 时）. $dz=2xz$，这正是所要证明的； 2. 视 $w=w(u,v)$，其中 u,v 为中间变量，而 x,y 为自变量. 在 $dx=y, dy=-x$ 时，$dz=yz_x-xz_y=(y-x)z$. 另一方面，从 $\ln z=w+x+y$，可得 $dz=z(dw+dx+dy)=z(w_u du+w_v dv+dx+dy)$. 但 $dx=y$，$dy=-x$ 时，有 $du=0$，$dv=-yx^{-2}+xy^{-2}$，于是 $dz=z(y-x)+zw_v dv$，与 $dz=(y-x)z$ 比较，得所要求的方程为 $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$； 3. x，y 取为自变量 u，v 取为中间变量，则在 $dx=x, dy=y$ 时，

$$d^2 z=z_{xx}\cdot x^2+2z_{xy}\cdot xy+z_{yy}\cdot y^2=0.$$

另一方面，对中间变量 u,v，可得 $(d^2 x=d^2 y=0)$

$$\begin{aligned}0=d^2 z&=d^2(w-x-y)=d^2 w\\&=w_{uu}du^2+2w_{uv}dudv+w_{vv}dv^2+w_u d^2 u+w_v d^2 v,\end{aligned}$$

其中 $du=(xdy-ydx)/x^2=0$，类似地 $dv=2xy$，$d^2 u=0$，$d^2 v=2xy$. 代入这些式子得 $(2xy)^2 w_{vv}+(2xy)w_v=0$，即

$$2v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

三、求导方法

1．基本求导公式 基本初等函数的求导公式、导数的四则运算公式及下列公式

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)_x'=f(x),\quad \left(\int_x^b f(t)dt\right)_x'=-f(x)$$

（其中 $f(x)$ 连续）是经常遇到的，应熟练掌握.

例 15 设 $f(x)$ 连续可微，求下列函数的导数

$$I(x)=\int_0^x tf'(x-t)dt.$$

解 作积分变量代换 $s=x-t$，将 f' 中的 x“移出来”：

$$\begin{aligned}I(x)&=\int_x^0(x-s)f'(s)(-ds)=\int_0^x(x-s)f'(s)ds\\&=x\int_0^x f'(s)ds-\int_0^x sf'(s)ds.\end{aligned}$$

于是

$$I'(x)=(x)'\int_0^x f'(s)ds+x\left(\int_0^x f'(s)ds\right)'-\left(\int_0^x sf'(s)ds\right)'$$