高等数学与经济数学

编著 费伟劲

主审 姚力民

立信会计出版社

书　　名：高等数学与经济数学
作　　者：费伟劲
出 版 社：立信会计出版社
出版日期：2006-8-1
ISBN：7-5429-1663-7/G.6408
开　　本：16
定　　价：27.00元

序　言

《高等数学与经济数学》列为我国高等院校的专业基础课程，受到各院校的普遍重视。在第十一个五年计划内，高等职业技术教育将会高速发展，以适应新世纪经济社会发展对人才的需求。面对高等教育中高职和高专这样一个特殊的学习群体，编写一本有针对性、普适性的教材，成为许多读者的愿望。在上海商学院领导的支持与鼓励下，我院数学教研室的老师们编写了这本《高等数学与经济数学》教材。

本教材编写者都是一些具有丰富教学实践经验的数学老师。他们长期工作在数学教学第一线，熟悉学生，掌握教学规律。在本教材的编写过程中，他们进行了广泛的调查研究和深入的切磋讨论，紧扣高职与高专的培养目标，把握“以应用为目的，以必需够用为度”的编写原则，认真细致地做好教材的编写工作。

本教材力图体现高职高专的特色，在内容的选取和手段的处理上，能调节好数学推理训练与运算技能培养的尺度，无论从概念的引入还是例题与习题的选择上，编写者投入了很多精力。另外教材的语言力求通俗精练，有利于启发式教学，有利于学生自学。

当今世界已处于新世纪的起点。面对新世纪，我们必须在全面提高教育质量上下功夫，特别是在全面推进“以德育为核心，以创新精神和实践能力为重点”的素质教育工程中作贡献。为此，我们的教材还必须向前发展，并且在实践中完善。希望使用本教材的老师们能在教学实际中注入更新功能，不断融入计算机和应用软件的使用，开拓高等数学基础的新领域，以适应信息化社会对应用型人才培养的要求。

为了表示我对上海商学院数学老师们工作的支持、鼓励和期盼，谨献此序。

上海商学院院长、研究员

二〇〇六年五月三十一日

前　言

当今世界正在发生深刻的变化。从生产力发展的阶段看，人类走过了农业经济时代、工业经济时代，正在进入知识经济时代。计算机的普及与应用不仅使科学技术、经济管理产生了革命性的变化，而且对人们传统的工作、学习、生活方式也产生了巨大的变化。作为现代的科学技术和现代的经济管理的基础学科——数学，在各方面的应用同样已经发生了根本变化。近几十年来，诺贝尔经济学奖的每一项成果都可以看作是成功应用数学的经典范例，经济学所涉及的数学基础知识越来越广泛。“高科技本质上是数学”这句话越来越得到人们的认同。正是在这样的背景下，我们深感对大学数学教学改革已势在必行，特别是教材的改革。尽管改革开放以来，随着我国教学改革不断深入，高等院校的经济数学教材建设已经取得了巨大的成绩，但仍有许多值得探讨和需要改进的地方。比如说，目前经济数学教材从内容和结构上显得雷同单一；有些教材存在着过于追求逻辑性、严密性，从概念到概念，从推理到推理，版本陈旧、实用性不强等问题。

鉴于以上考虑，并在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状的基础上，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济数学教学改革经验，借鉴国外相关教材的教学方法，按照教育部新修订的《高职高专经济数学基础课程教学基本要求》，编写了本教材。本教材有如下特点：

1. 努力贯彻“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则，结合高职高专教学特点，注意数学学科各分支的系统性，但不追求理论的完备，对一些定理、公式，或者只给出结果，或者以几何直观图予以说明。力求深入浅出，以突出理论、方法的应用和数学模型的介绍。

2. 使教材具有思想性、科学性、趣味性、实用性、前瞻性和内容伸缩性，有利于教与学。考虑教材内容、应用例题的更新，涉及内容不局限于成本、收益、利润，还涉及环境保护、金融投资、家庭理财等社会生活的方方面面，或选择一些与课堂讲授内容相关的成功的数学应用案例，使人们有一种时代感、亲近感。

3. 大学数学是一门基础课程，大学数学教育应具备工具功能，但同时也应具备思维训练和文化素质教育的功能。现有教材很少讲数学发展史，某些定理、公式虽然依惯例冠以创立者之名，但常不加注释，以致读者不知他是何许人。本书在这点上进行了有益的尝试，或揭示数学的本质属性，或阐明具有启发意义的数学思想

方法，在对数学内容的辩证分析、典型数学史料和人物的穿插融会中，渗透了数学的人文精神。

4. 通过本教材的学习，能使学生获得微积分、概率统计和线性代数的基本知识，培养学生的基本运算能力和把实际问题转化为数学模型的初步能力，并为学习相关专业的后续课程和其今后的职业生涯打下良好的基础。

本教材共分三篇八章，主要内容包括：一元函数微积分、概率论与数理统计基础、线性代数初步。每节后附有精心编写的习题，每章还配有复习题，且在书后都附有答案或提示，供参考。

教师在使用本教材时，可根据不同专业、不同学时的教学实际需要，选择若干章节讲授。

本教材是由上海商学院费伟劲编著。姚力民老师仔细审阅了教材初稿，并提出了许多中肯的意见；陈强璋教授、曲文波教授对本书的编写提供了许多有益的建议；苏海荣、邹赢等老师对所有的例题、习题答案进行了认真校对。在本教材编写过程中，上海商学院院领导、系领导和有关专家都给予了大力支持和鼓励，在此一并表示衷心的谢意！

最后，还要感谢立信会计出版社，特别是责任编辑蔡莉萍女士，没有他们的大力支持，本教材不会如此顺利地出版。

由于付梓仓促，加之学海无涯，自愧才疏学浅，鲁鱼亥豕，疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁不吝赐教，希望通过大家共同努力，经日后修订，使本教材日趋完善。

编著者

二〇〇六年七月于上海商学院

目　　录

第一篇　一元函数微积分

第二篇　概率论与数理统计基础

第三篇　线性代数初步

第一篇　一元函数微积分

第 1 章　极限与连续

§1.1　极限的概念

微积分的主要课题是研究变量的变化性态。为了利用变量的变化趋势、变化速度等要素来刻画变化过程的特征，人们提出并发展了极限的理论和方法。极限的概念是微积分有别于代数和三角的诸多概念之一。实际上，后面介绍的导数概念就是一类特殊的极限，而定积分概念又是另一类的极限，因此，极限的理论和方法构成了整个微积分的基础。

1.1.1　无穷小(大)量与变量极限

历史上，微积分曾被称为“无穷小分析”，对无穷小量的认识和使用贯穿了微积分的始终，我们就从无穷小量引进开始讨论函数的极限。

引例 1　我国战国时期的哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中有这样一句话：“一尺之棰，日取其半，万事不竭。”这就是说一根长为一尺的木棒，每天截取一半，这样的过程可以无休止地进行下去。

如果用 x 代表截取的天数，用 y 代表 x 天后剩下木棒的长度(单位：尺)，则 y 与 x 的函数关系可以用表 1-1 表示：

表 1-1

x	1	2	3	…	10	…
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	…	$\frac{1}{2^{10}}$	…

即 $y=\frac{1}{2^x}$。如果截取的过程不断地进行下去(即自变量 x 趋于无穷大时，记作 $x\to\infty$)，剩下的木棒长度(y)将会越来越小而趋于 0，但始终不等于 0，这也正是

庄子这句话的意思。

无穷大(∞是一个记号)并不表示是一个数。我们用∞来描述函数的性态:在函数定义域中的值或值域中的值会超过所有有限的界限。

有时我们还需要区分趋于无穷大的符号。如果变量 α 从某一时刻起,往后总是取正值而且无限增大,则称变量 α 趋于正无穷大,记作 $\alpha\to+\infty$;如果变量 α 从某一时刻起,往后总是取负值且 $|\alpha|$ 无限增大,则称变量 α 趋于负无穷大,记作 $\alpha\to-\infty$。

定义 1.1　设 y 是一个变量,A 为一个常数,

(1) 如果 y 无限趋于 0,则称 y 的极限为 0,并称变量 y 为无穷小量,记作 $y\to0$;

(2) 如果 $y-A$ 无限趋于 0,则称 y 的极限为 A,记作 $y\to A$;

(3) 如果 y 趋于∞,则称 y 的极限不存在,并称变量 y 为无穷大量,记作 $y\to\infty$。

当 y 是 x 的函数时,y 的变化趋势由 x 的变化趋势决定。所以 y 是否为无穷小(大)量,应视 x 的变化趋势而定。

例 1　指出当 x 趋于何值时,y 是无穷小量? 无穷大量?

(1) $y=\dfrac{1}{x}$　　　　(2) $y=\lg x$

解　借助于几何图形(见图 1-1,图 1-2),容易得到

(1) 当 $x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}\to0$,y 是无穷小量;当 $x\to0$ 时,$\dfrac{1}{x}\to\infty$,y 是无穷大量。

(2) 当 $x\to1$ 时,$\lg x\to0$,y 是无穷小量;当 $x\to+\infty$时,$\lg x\to+\infty$,y 是无穷大量;当 $x\to0^+$ 时,$\lg x\to-\infty$,y 是无穷大量。

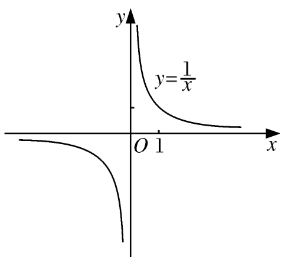

图 1-1

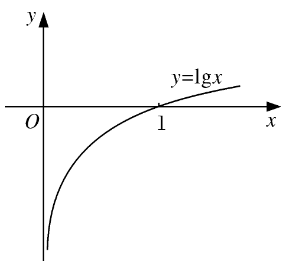

图 1-2

1.1.2　当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限

引例 2　(广告的效用)在某一地区,当一种新的耐用产品被广告推出后,使用的用户数 y(假设最多每户用一台)随着时间 t 的推移将越来越多。时间 t 可以无限延续,但由于该地区的用户数 N 是有限的,所以试用的用户数不可能无限增加,

它只能越来越接近某一常数 A(≤N),且试用该产品的新用户的增长率逐渐减慢,使用的用户数将逐渐趋于饱和状态。如果将 y 看作是 t 的函数 y= f(t),这就是当自变量 t 趋于无穷大时,函数 f(t)的极限问题。图 1-3 描述了用户数 y 随时间 t 变化的情况。

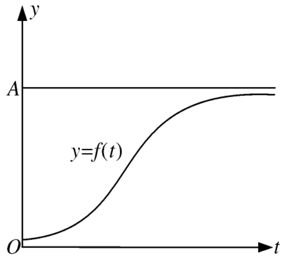

图 1-3

引例 3　考察函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图形(见图 1-1)。当 x 为正且变得越来越大时,$\frac{1}{x}$ 就变得越来越小且趋于 0;当 x 为负且它的绝对值变得越来越大时,$\frac{1}{x}$ 也变得越来越小且趋于 0。这时,称函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时以 0 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

定义 1.2　(1) 如果当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$;

(2) 如果当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$;

(3) 如果当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$。

由 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 及 $x\to\infty$ 的极限含义,我们有如下结论:

定理 1.1　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 均存在且相等。即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例 2　画出函数 $y=2^x$ 的图形,讨论极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$,$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$,$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 是否存在。

解　函数 $y=2^x$ 的图形,如图 1-4 所示。由该图可看出 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$。

由极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件知,$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在。

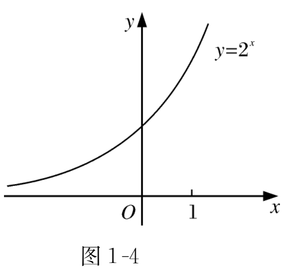

图 1-4

1.1.3　当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

这里,x_0 是一个定数。如果 $x<x_0$ 且 x 趋于 x_0,记作 $x\to x_0^-$;如果 $x>x_0$ 且 x 趋于 x_0,记作 $x\to x_0^+$;如果 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 同时发生,则记作 $x\to x_0$。

注意：当 x 无论何种方式趋于 x_0 时，x 始终不等于 x_0。

在给出定义之前，我们来看一个例子：

例 3　讨论当 $x\to 1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势。

解　此函数在 $x=1$ 处无定义。对任何 $x\neq 1$，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，因此函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图形就是挖掉点(1,2)的直线 $y=x+1$，如图 1-5 所示。

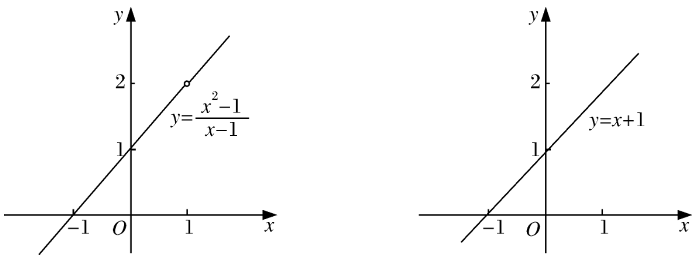

图 1-5

列出函数在 $x=1$ 附近的对应值，如表 1-2 所示。

表 1-2

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
y	1.9	1.99	1.999	1.9999	无	2.0001	2.001	2.01	2.1

从图 1-5 及表 1-2 中可以看出，当 x 无限接近于 1 时，函数 y 无限趋近于 2。我们把这个过程记作 $\lim\limits_{x\to 1}y=2$ 或 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近(点 x_0 可以除外)有定义，

(1) 如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0^- 时以 A 为**左极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x_0\to x_0^-)$；

(2) 如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0^+ 时以 A 为**右极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x_0\to x_0^+)$；

(3) 如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于某个常数 A，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时以 A 为**极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。

由 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$ 及 $x\to x_0$ 的极限含义，我们有如下结论：

定理 1.2　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在

且相等。即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$,

(1) 画出函数 $f(x)$的图形;

(2) 考察极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$及$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在。

解　(1) 函数 $f(x)$的图形,如图 1-6 所示。

(2) 一个函数用两个或多于两个数学表达式来表示,即一个函数在其定义域的不同部分用不同数学表达式来表示,称为**分段函数**。本例中的函数 $f(x)$就是。

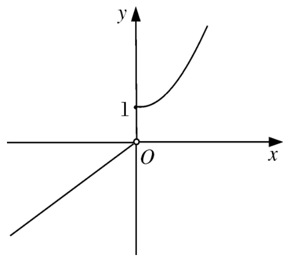

图 1-6

观察图 1-6 得:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$$

由定理 1.2 可知,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

例 5　说明函数 $y=\sin\frac{1}{x}$当 x 无论从哪一侧趋于零时都没有极限。

解　这是一个振荡太厉害的函数,如图 1-7 所示。当 x 趋于零时,其倒数$\frac{1}{x}$无限增大,而 $\sin\frac{1}{x}$的值在-1 和 1 之间重复循环取值。不存在数 A,使得当 $x\to 0$ 时 $y=\sin\frac{1}{x}$无限趋近于数 A,甚至把 x 限制为正值或负值时也是如此。即函数在 $x=0$ 处既没有右极限也没有左极限。

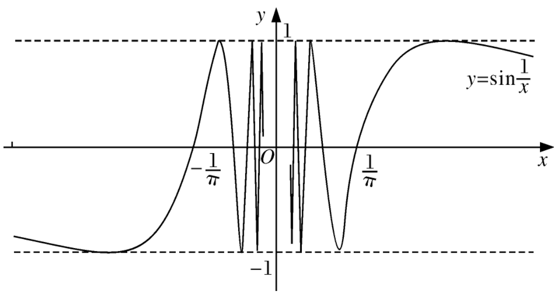

图 1-7

1.1.4　无穷小量的运算法则

从例 1 中对函数 $y=\frac{1}{x}$的讨论发现,当 $x\to\infty$时,x 是无穷大量,它的倒数$\frac{1}{x}$

却是无穷小量。

定理 1.3 (1) 非零无穷小量的倒数为无穷大量,反之亦然;

(2) 无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量。

例 6 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}$。

解 (1) 当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\cos x$ 为无穷小量,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}=\infty$$

(2) 当 $x\to+\infty$ 时,2^x 为无穷大量,所以

$$\lim_{x\to+\infty}2^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$$

例 7 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)\cos\dfrac{1}{x}$。

解 (1) 因为 $x\to1$ 时,$\ln x$ 为无穷小量,而 $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leqslant1$,即 $\sin\dfrac{1}{x-1}$ 有界,所以

$$\lim_{x\to1}\ln x\cdot\sin\frac{1}{x-1}=0$$

(2) 因为 $x\to0$ 时,e^x-1 为无穷小量,而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 有界,所以

$$\lim_{x\to0}(e^x-1)\cos\frac{1}{x}=0$$

习 题 1.1

1. 画出下列函数的图形,并求极限。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$;

(2) $f(x)=\cos x$,求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant0\\ x-1, & x>0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

2. 当 $x\to0$ 时,下列变量中哪些是无穷小量?