普通高等教育‘十五’国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学训练教程

同济大学　天津大学　编

高等教育出版社

责任编辑　胡乃礐
封面设计　杨立新
责任绘图　宗小梅
版式设计　陆瑞红
责任校对　存　怡
责任印制

郑 重 声 明

内容提要

本书是由同济大学、天津大学编写的普通高等教育‘ 十五 ’国家级规划教材，是与同济大学、天津大学、浙江大学、重庆大学所编的教育部高职高专规划教材《高等数学》配套的学习辅导书。

本书的编写体例与主教材一致。各章均由内容总结、例题解析、习题选解、自我检测题与简解等四部分组成，并在书末附录中配有综合检测题与简解和模拟考试卷与答案各两套。本书的内容总结简明扼要，例题解析翔实精准，习题选解面宽清晰，自我检测难易适中。通过使用本书，可以使学生理解基本概念，掌握基本知识，增强应用能力，提高数学素养。

本书主要面向使用教育部高职高专规划教材《高等数学》的学生，也可作为使用其他高等数学教材的高职高专学生自学或‘ 专升本 ’学员的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学训练教程/同济大学，天津大学编. —北京：高等教育出版社，2003.5

ISBN 7－04－012400－9

Ⅰ.高... Ⅱ.①同...②天... Ⅲ.高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 015791 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	年　月第　版
印　　张	32	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	780 000	定　　价	33.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19 号)，提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　　言

本书是与同济大学、天津大学、浙江大学、重庆大学所编的教育部高职高专规划教材《高等数学》配套的学习辅导用书。主要面向使用该教材的学生。由于编写的独立性风格，也可作为使用其他高等数学教材的高职高专学生自学或"专升本"学员的复习参考用书，适当兼顾使用同济大学等编的《高等数学》主教材的教师教学参考的需要。

本书章序及其内容叙述、解题方法、记号等与主教材一致。

全书各章均由内容总结、例题解析、习题选解、自我检测题与简解等四部分组成。书末附录中编入四个阶段的综合检测题与简解和第一、第二学期期终模拟考试卷与答案各两套。

书中较多的检测训练有利于读者理解基本概念，熟练基本运算，掌握基本内容，增强应用能力，为全面提高学生的数学素养，继续深造打下坚实基础。

内容总结　简要介绍本章的主要内容，整理并列出该章的基本概念、定理、公式和重要结论，必要时列表说明或给出学习有关知识的注意事项，为全面掌握课程内容提供方便，便于读者复习时查阅。

例题解析　围绕本章的重点、难点，在主教材已有的例题和习题之外再增加一些具有代表性的例题作为补充，进一步扩大对本章知识、概念、运算、应用等诸多方面的覆盖，以便强化基本训练。对于某些例题不仅给出求解的详细过程或多种解法，还给出了解题思路，解法指导或错解释疑等，并针对高职高专这一层面学生容易产生的疑惑由浅入深地进行解释，难度比主教材中部分较难例题有所降低，力争当好不见面的辅导教师。但考虑到便于层次教学使用，也适当选择了一些历届"专升本"入学考试试题。

习题选解　在主教材中选出 30% 以上的较有典型性或具有一定难度的习题给出详解，供读者解题时参考。主教材各章的总复习题 A，B 两类一一详尽解答。在某些题解中，编者还通过加注的方式说明解证这类习题的一般方法及易犯的一些错误，以便引起读者的重视。习题选解中的习题和题号与主教材的习题完全一致，读者可以在独立练习的基础上方便地对照、参考或校对。

需特别申明的是主教材各章的总复习题 B 的难度较大，超出高职高专学生的高等数学基本要求。本书虽然对总复习题 B 给出详解，我们仍建议高职高专学生可以不看不练这部分习题，仅供某些更高要求的读者参考。

近几年来，由于我国高等教育迅猛发展，对高职高专学生的高等数学的基本要求也在不断调整、更新，读者使用本书时也要以"与时俱进、因势而变、改革创新、因材施教、有利教学"的态度合理选择，以便达到预期的教学效果。

自我检测题，阶段综合检测题及期终模拟考试卷等为读者精选了难易基本适中，与各章或各个阶段、各个学期所学基本概念、基本运算、基本内容密切相关的题目。书中还逐一给出简解。独立完成这些题目，可以达到举一反三，巩固提高的功效。如果读者在复习的基础上，在规定的

时间内独立完成各次检测题，完全可以达到《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》。只要再复习总结，强化练习也完全可以达到"专升本"对高等数学的要求。

本书是"内容总结简明扼要，例题解析翔实精准，习题选解面宽清晰，自我检测难易适中"，体现了"以应用为目的，以必需够用为度"编写高职高专教材的原则。

参加本书编写的有：同济大学李生文（第一、二、三章），韩仲豪（第五、六章），郭景德（第七、八、九章），天津大学齐植兰（第四、十、十一章）。由李生文教授总体策划、修改统稿及技术处理等。

本书的编写和出版得到所在学校的有关领导的大力支持和帮助，同济大学应用数学系郭镜明教授审阅了初稿，提出了许多宝贵意见。在此我们一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中不足和考虑不周之处肯定不少，错误也在所难免，我们期待着专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2002 年 12 月

目　　录

第一章　函数及其图形

函数是客观世界中变量与变量之间相互依赖关系的反映,是高等数学的主要研究对象,也是高等数学最重要的基本概念之一.

学习本章,应该重点理解函数概念及其简单性质 熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、值域、几种特性及其图形 正确理解基本初等函数和初等函数的概念 理解复合函数的概念,会正确分析复合函数的复合过程 能求简单函数的反函数 并要具备对简单实际问题建立相应的函数关系式的能力.

一、内 容 总 结

(一) 集合

1. 集合　集合是指具有某个共同属性的一些对象的全体.组成集合的一个一个对象称为该集合的元素.通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合.用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就记为 $a\in A$ 如果 b 不是集合 A 的元素,就记为 $b\overline{\in}A$(或 $b\notin A$).对于给定的集合 A,元素 $x\in A$ 或 $x\overline{\in}A$,二者必择其一.

在研究和处理问题时,把考虑对象的全体称为全集,并用 U 表示 ;不含任何元素的集合称为空集,记为 .

2. 两个集合间的关系

(1) 如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素,就称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或者记为 $B\supseteq A$;

(2) 如果集合 A 与集合 B 含有相同的元素,就称 A 与 B 相等,记为 $A=B$(或 $B=A$),此时 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

3. 集合的主要运算

(1) 集合的并　设 A 和 B 是两个集合,所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(或称为和集),记作 $A\cup B$ 或($B\cup A$).

(2) 集合的交　设 A 和 B 是两个集合,所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$(或 $B\cap A$).

(3) 集合的差　设 A 和 B 是两个集合,所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 减 B 的差集,记作 $A-B$(或 $A\setminus B$ 或 B_A^c).特别,设 A 是一个集合,U 是包含 A 的全集,把 $U-A$ 称为 A 的余集,记作 A^c.

(4) 集合运算律

① 交换律　$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律　$A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D$;$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$.

③ **分配律** $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$;$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$.

④ **对偶律** $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$;$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

4．**绝对值及其性质**

(1) **绝对值的定义** 对于任意一个实数 x,它的绝对值为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ x, & x<0. \end{cases}$$

(2) **绝对值的性质** 设 a,b 为任意实数,则有

① $|a|=\sqrt{a^2}$;　② $|a|\geqslant 0$,且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$;

③ $|-a|=|a|$;　④ $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

⑤ $|a+b|\leqslant |a|+|b|$;　⑥ $||a|-|b||\leqslant |a-b|$;

⑦ $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;　⑧ $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}(a\neq 0)$.

5．**区间**

本书中常见的实数集合是区间,设实数 a 小于实数 b,则

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$;

无限区间 $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathbf{R}\}$.

6．**邻域** 点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,记作 $\mathrm{U}(x_0,\delta)$,即 $\mathrm{U}(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$;在 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0 所得集合,记作 $\mathring{\mathrm{U}}(x_0,\delta)$,称为点 x_0 的去心 δ 邻域,即 $\mathring{\mathrm{U}}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

(二) 函数

1．**函数概念**

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,简记为 D_f,D_f 中的 x 所对应的全体 y 值所组成的数集称为函数 $f(x)$的值域,简记为 R_f.

2．**函数的几种特性**

(1) **有界性** 设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in I$,对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 I 内有界.

(2) **单调性** 设函数 $y=f(x)$的值在区间 $I\subset D_f$ 内,随着自变量 x 的增大而增大,即对于 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调增加的;

如果函数 $y=f(x)$的值在区间 $I\subset D_f$ 内,随着自变量 x 的增大而减小,即对于 I 内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调减少的.

(3) **奇偶性** 对于函数 $y=f(x)$,其定义域 D_f 关于坐标原点对称,如果对于任意的 $x\in D_f$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;如果对于任意的 $x\in D_f$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

(4) 周期性　设有函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的实数 T,对于每一个 $x\in D_f$,满足 $(x\pm T)\in D_f$,总有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$是周期函数.通常所说周期函数的周期是指函数的最小正周期.

3．反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 R_f,如果对任意一个 $y\in R_f$,D_f 内只有一个数 x 与 y 对应,此 x 适合 $f(x)=y$,这时把 y 看作自变量,x 视为因变量,就得一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$(相对于反函数,把函数 $y=f(x)$称为直接函数).习惯上,函数 $y=f(x)$的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与直接函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

4．复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$的定义域为 D_g,如果 $u=g(x)$的值域 $R_g\subseteq D_f$,那么称 $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$为定义在 D_g 上的由函数 $y=f(u)$经 $u=g(x)$复合而成的复合函数,而 u 称为中间变量.$y=f[g(x)]$的定义域与值域,分别记作 $D_{f\circ g}$与 $R_{f\circ g}$.

(三) 初等函数

1．基本初等函数

(1) 常数　$y=C$(C 为常数),定义域为$(-\infty,+\infty)$,偶函数;

(2) 幂函数　$y=x^{\mu}$(μ 为常实数),定义域随 μ 而异;

(3) 指数函数　$y=a^x$(a 为常数且 $a>0$,$a\neq 1$),定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,其图形都通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少.

特别,$y=\mathrm{e}^x$ 是工程中常用的指数函数,其中底数 $\mathrm{e}=2.718\,281\cdots$

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,$a\neq 1$),定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图形总在 y 轴的右侧,且通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少.

特别,$y=\log_{\mathrm{e}} x$ 称为自然对数,记作 $y=\ln x$.

(5) 三角函数

函数名称	函数记号	定 义 域	值　域	周　期	奇 偶 性
正弦	$y=\sin x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	2π	奇
余弦	$y=\cos x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	2π	偶
正切	$y=\tan x$	$\mathbf{R}\setminus\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \middle\| n\in\mathbf{Z}\right\}$	$\mathbf{R}$	π	奇
余切	$y=\cot x$	$\mathbf{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	π	奇
正割	$y=\sec x$	$\mathbf{R}\setminus\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \middle\| n\in\mathbf{Z}\right\}$	$\mathbf{R}\setminus(-1,1)$	2π	偶
余割	$y=\csc x$	$\mathbf{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}\setminus(-1,1)$	2π	奇

(6) 反三角函数

① 反正弦函数　$y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，在$[-1,1]$上单增且有界；

② 反余弦函数　$y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，在$[-1,1]$上单减且有界；

③ 反正切函数　$y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，奇函数，在$(-\infty,+\infty)$内单增且有界；

④ 反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，在$(-\infty,+\infty)$内单减且有界.

2. 初等函数

由基本初等函数(包括常数)经过有限次的四则运算和复合运算并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

(四) 分段函数

在自变量的不同取值范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数.

(五) 充分条件、必要条件与充要条件

如果由 A 能推出 B，用 $A\Rightarrow B$ 表示，则 A 是 B 的充分条件；B 是 A 的必要条件.

如果 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，即 $A\Leftrightarrow B$，则 A 与 B 互为充分必要条件.

二、例 题 解 析

例1　用区间表示下列不等式的变量 x 的变化范围：

(1) $|x+2|\geqslant 5$；　　(2) $\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$；

(3) $|x^2-3|\leqslant 1$；　　(4) $x<x^2-12<4x$.

解　(1) 由不等式$|x+2|\geqslant 5$去掉绝对值符号，得

$$x+2\geqslant 5 \text{ 或 } x+2\leqslant -5,$$

于是　$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -7$.

因此不等式$|x+2|\geqslant 5$所表示的区间为

$$(-\infty,-7]\cup[3,+\infty).$$

(2) 不等式$\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$化为

$$-1<5-\frac{1}{x}<1,$$

即

$$-6<-\frac{1}{x}<-4.$$

不等式各项变号并改变不等号的方向，得

$$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}\quad (x\text{ 必为正数}),$$

所以　不等式$\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$表示的区间是$\left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right]$.

(3) 由 $|x^2-3|\leqslant 1$ 化为 $-1\leqslant x^2-3\leqslant 1$，

从而得到不等式

$$2\leqslant x^2\leqslant 4.$$

解不等式组

$$\begin{cases} x^2\leqslant 4, \\ x^2\geqslant 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|\leqslant 2, \\ |x|\geqslant\sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2, \\ x\geqslant\sqrt{2} \quad \text{或} \quad x\leqslant -\sqrt{2}. \end{cases}$$

于是

$$-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2} \quad \text{或} \quad \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,$$

利用区间表示为

$$[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2].$$

(4) 不等式 $x<x^2-12<4x$ 化为不等式组

$$\begin{cases} x^2-4x-12<0, \\ x^2-x-12>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-6)<0, \\ (x+3)(x-4)>0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} -2<x<6, \\ x<-3 \text{ 或 } x>4. \end{cases}$$

即　不等式所表示的区间为 $(4,6)$.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$；　　　　(2) $g(x)=\ln(x^2-x-2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.

解　(1) 为使函数 $f(x)$ 有意义，必须分式中分母 $x^2-4\neq 0$；分子的平方根下 $x+1\geqslant 0$. 因此要使这个分式函数有意义，应满足

$$\begin{cases} x^2-4\neq 0, \\ x+1\geqslant 0, \end{cases}$$

即　$x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2$. 故函数 $f(x)$ 的定义域 $D_f=[-1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 函数 $g(x)$ 的表达式中，含有对数函数和无理分式函数，要 $g(x)$ 有意义，x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x+2>0, \end{cases}$$

先解不等式

$$x^2-x-2>0, \text{即} (x+1)(x-2)>0.$$

不等式的左边是一个多项式，可用图 1－1 的方法确定它的符号. 于是，不等式的解为

$$x<-1 \text{ 或 } x>2.$$

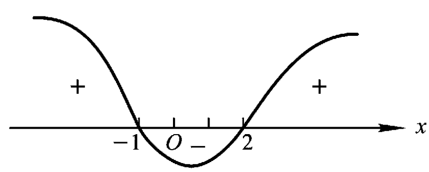

图 1－1

则不等式组化为

$$\begin{cases} x<-1 \text{ 或 } x>2, \\ \quad x+2>0, \end{cases}$$

从而得函数 $g(x)$ 的定义域 $D_g=(-2,-1)\cup(2,+\infty)$.

注意　在解本题时，不能忘记分母 $x+2\neq 0$，也不要误认为对数函数 $\ln(x^2-x-2)$ 中 $x^2-x-2\geqslant 0$，否则就会得出错误的定义域.

关于求函数定义域问题，如果函数是由实际问题得出，其定义域要根据实际问题而定；对于用算式给出的函数，只须使算式有意义就可以. 应注意以下几点：

① 分母不能为零；

② 负数不能开偶次方；

③ 对数的真数是正数；

④ 反三角函数 $y=\arcsin x$ 与 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$.

例 3 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $\varphi(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域.

解 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 是由 $f(u)$ 与 $u=x+\frac{1}{3}$ 复合而成. 依函数概念知，函数由两个要素—对应法则和定义域所确定，与自变量所选用什么样的字母无关. 因此 $f(u)$ 与 $f(x)$ 是表示的同一个函数. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，故 $f(u)$ 的定义域也是 $[0,1]$，将 $u=x+\frac{1}{3}$ 代入 $f(u)$ 后，得

$$0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant 1,$$

于是 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 的定义域是

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}.$$

类似地，可得 $f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域是

$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3},$$

解不等式组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

最后求得 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域 $D_\varphi=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

注意 常见的错误解法是：

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{3}\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant\frac{4}{3}\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 的定义域 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，类似地又有 $-\frac{1}{3}\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{3}\Rightarrow f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$. 因此 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

从表面上看答案似乎没有错误，其实 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 与 $f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域都是错误的. 犯错误的主要原因是对 $f(u)$ 与 $f(x)$ 表示同一个函数的概念还没有理解.

例 4 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=\ln(1-x)\ (x\leqslant 0)$；

(2) $g(x)=\sqrt{x-x^2}$；

(3) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

当 $x=0$ 时，$f(0)=\ln 1=0$，

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$ 的值域 $R_f=[0,+\infty)$.

(2) $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ 要有意义，必须 $x-x^2\geqslant 0$，则其定义域为 $[0,1]$.

记 $\bar{y}=x-x^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

显然当 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ 时，可取最大值，即 $x=\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取最大值 $\frac{1}{2}$.

当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，可取最小值 0，即 $g(x)$ 取最小值 0.

所以，$g(x)$ 的值域 $R_g=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(3) $\varphi(x)$ 中的分母 $\sqrt{x^2+5x+6}>0$，当分母趋于零时，$\varphi(x)$ 趋于正无穷大；当分母趋于正无穷大时，$\varphi(x)$ 趋于零，因此 $\varphi(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$.

例 5 下列各对函数恒等吗？为什么？请指出它们在什么区间上是恒等的？

(1) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$，$g(x)=x+3$；

(2) $f(x)=x-1$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$；

(4) $f(x)=\arctan x$，$g(x)=\arctan\frac{1}{x}$.

解 (1) 不恒等.

$f(x)$ 的 $D_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$，$g(x)$ 的 $D_g=(-\infty,+\infty)$. 由确定函数的两要素知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不恒等.

如果只考虑在区间 $(-\infty,3)$ 或在区间 $(3,+\infty)$ 的情形，即 $x-3\neq 0$ 时

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3=g(x).$$

故 $f(x)\equiv g(x)$ 的区间为 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 不恒等.

虽然两个函数的定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$，但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不相同，$g(x)$ 是 $(x-1)^2$ 的算术根，即 $g(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$ 若只考虑 $x\in[1,+\infty)$ 时的情形，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1=f(x)$，此时是恒等的.

(3) 不恒等.

$f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$ 的定义域由不等式组

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$$

确定，即 $D_f=[1,+\infty)$；

对于 $g(x)$，要求根号下的 $x^2-1\geqslant 0$，即 $D_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 两个函数的定义域不相同.

当 $x\in[1,+\infty)$时，$g(x)=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}=f(x)$，两个函数此时恒等.

(4) 不恒等.

两个函数的定义域不同，对应法则也不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对应的值没有相同的情形.

注意　判断两个函数是否恒等应牢记定义域和对应法则是否相同，当且仅当定义域相同，对应法则也相同时，两个函数才恒等.

例 6　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x<3,\\ x^2-3, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

求 $f(4)-f(1.5)$.

解　对于分段函数，其特点是在不同的区间上，函数有不同的表达式. 当需要计算某点 x 的函数值时，首先要看清 x 属于定义域中哪一个区间，然后用相应的表达式求该点的 $f(x)$值.

因为 $x=4$ 在区间$[3,+\infty)$内，所以由 $f(x)$的定义得

$$f(4)=4^2-3=13.$$

因为 $x=1.5$ 在区间$(-\infty,3)$内，则由函数 $f(x)$的定义得

$$f(1.5)=1.5+2=3.5,$$

于是

$$f(4)-f(1.5)=13-3.5=9.5.$$

例 7　将下列函数写成分段函数：

(1) $f(x)=|x^2-2|$；　　　　(2) $g(x)=x-[x]$　$(0\leqslant x<3)$.

解　(1) 分段函数在高等数学讨论函数的极限、连续、导数、积分等问题时有着广泛应用，读者务必学会将带有绝对值符号的函数化为分段函数.

当 $x\leqslant-\sqrt{2}$时，$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\geqslant 0$，由绝对值的定义，得

$$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

当$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$，同理可得

$$f(x)=-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=(x+\sqrt{2})(\sqrt{2}-x).$$

当 $x\geqslant\sqrt{2}$时，$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\geqslant 0$，于是有

$$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

综上，得

$$f(x)=\begin{cases}(x+\sqrt{2})(\sqrt{2}-x), & -\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\\ (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}), & x\leqslant-\sqrt{2}\ \text{或}\ x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

(2) 函数 $g(x)=x-[x]$中的$[x]$是主教材上给出的取整函数，即

$$[x]=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$$

因此