

高职高专公共课系列教材

高等数学学习指导

主 编 崔鸿志 刘路漫
副主编 曾庆健 曾庆武 黄溪生

东北大学出版社

·沈 阳·

崔鸿志 刘路漫 2006

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习指导 / 崔鸿志, 刘路漫主编. — 沈阳: 东北大学出版社, 2006.5
ISBN 7-81102-242-7

. 高... . 崔... 刘... . 高等数学-高等学校: 技术学校-教学参考资料 .O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 023452 号

出版者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: www.neupress.com

印刷者: 沈阳市第六印刷厂

发行者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 184mm × 260mm

印 张: 14.25

字 数: 430 千字

出版时间: 2006 年 5 月第 1 版

印刷时间: 2006 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑: 李 平 刘宗玉

责任校对: 李 莉

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 23.00 元

前 言

本书是金秀岩主编的高职高专教材《高等数学》的配套辅导教材，是在参考金秀岩主编的《高等数学学习指导》的基础上编写而成，是理工类高职高专各专业学生学习《高等数学》必备的辅导教材，也可作为高职高专经济类各专业以及自学考试、专升本学生学习《高等数学》的辅导教材。

本书具有以下特点：

1. 每章包含四部分内容：一、基本内容归纳；二、典型例题解析；三、习题解答；四、单元测试题解答。

2. 紧密结合教材，并配合教学内容归纳概括概念、定理、法则和公式，着重分析问题和作深入浅出的说明，以帮助读者加深理解、增强记忆和正确运用。

3. 结合教材列举了针对性较强的例题，并对每章的全部习题和单元测试题进行了较详细的解答。

参加本书编写的人员及分工如下：各章节的“基本内容归纳”及“典型例题解析”部分：孙卫东编写第一章、第二章、第三章；李宝娣编写第四章、第十章、第十一章；崔鸿志、杨平编写第五章、第六章；曾庆武编写第七章、第八章；曾庆健编写第九章。各章单元测试题的解答，黄溪生；各章节习题解答，刘路漫。本书由崔鸿志、刘路漫担任主编，曾庆健、曾庆武、黄溪生担任副主编。曾庆健担任主审。

本书在编写过程中，金秀岩同志审阅了全部书稿并提出一些修改意见，在此表示衷心的感谢。由于编者水平所限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，诚望广大读者批评指正，不胜感谢。

编者

2005年12月

目 录

第一章 预备知识.....	1	一、中值定理	57
第一节 基本内容归纳.....	1	二、罗必塔法则	57
一、函数概念.....	1	三、几种未定型的运算方法	57
二、函数定义域的求法.....	1	四、函数单调性的判定法	58
三、函数的几种特性.....	2	五、函数的极值及其求法	58
四、反函数.....	2	六、最大值、最小值问题	59
五、复合函数.....	2	七、曲线的凹向与拐点	59
六、初等函数.....	2	八、函数图形的描绘	60
第二节 典型例题分析.....	2	第二节 典型例题分析	60
第三节 习题解答.....	5	第三节 习题解答	65
第四节 单元测试题解答.....	8	第四节 单元测试题解答	78
第二章 极限与连续	12	第五章 不定积分	83
第一节 基本内容归纳	12	第一节 基本内容归纳	83
一、函数极限	12	一、不定积分的定义	83
二、函数极限的运算	13	二、不定积分的性质	83
三、两个重要极限、无穷小的比较	14	三、积分表	83
四、函数的连续性	15	四、积分法	83
五、函数在区间上的连续性	16	五、常用第一换元积分法类型	84
六、闭区间上连续函数的性质	16	六、常用第二换元积分法类型	85
第二节 典型例题分析	16	七、常用分部积分法类型	85
第三节 习题解答	23	第二节 典型例题解析	85
第四节 单元测试题解答	30	第三节 习题解答	88
第三章 导数与微分	33	第四节 单元测试题解答	97
第一节 基本内容归纳	33	第六章 定积分及其应用.....	101
一、基本概念	33	第一节 基本内容归纳.....	101
二、基本公式	34	一、定积分的概念.....	101
三、求导法则和微分法则	35	二、定积分的性质.....	102
第二节 典型例题分析	36	三、微积分基本公式.....	102
第三节 习题解答	40	四、积分方法.....	103
第四节 单元测试题解答	53	五、广义积分.....	103
第四章 中值定理与导数的应用	57	六、定积分的元素法.....	104
第一节 基本内容归纳	57	七、曲边梯形面积公式.....	104
		八、体积公式.....	105
		第二节 典型例题解析.....	105

第三节 习题解答.....	112	第四节 单元测试题解答.....	178
第四节 单元测试题解答.....	121	第十章 无穷级数.....	181
第七章 空间解析几何简介.....	125	第一节 基本内容归纳.....	181
第一节 基本内容归纳.....	125	一、常数项级数的概念和性质.....	181
一、直角坐标系.....	125	二、正项级数 $\left[\begin{array}{l} u_n, u_n > 0 \\ n=1 \end{array} \right]$	
二、向量代数.....	125	收敛性判别法.....	182
第二节 典型例题分析.....	127	三、任意项级数收敛的判别法.....	182
第三节 习题解答.....	130	四、几种常用级数的敛散性.....	183
第四节 单元测试题解答.....	137	五、函数项级数.....	183
第八章 多元函数微分学.....	141	六、幂级数的性质.....	183
第一节 基本内容归纳.....	141	七、傅立叶级数的相关概念.....	184
一、多元函数的极限与连续性.....	141	八、几种常用初等函数的幂级数展开式	
二、偏导数 微分.....	142	184
三、多元微分学的应用.....	143	第二节 典型例题解析.....	184
第二节 典型例题分析.....	144	第三节 习题解答.....	188
第三节 习题解答.....	148	第四节 单元测试题解答.....	196
第四节 单元测试题解答.....	154	第十一章 常微分方程简介.....	200
第九章 多元函数积分学.....	158	第一节 基本内容归纳.....	200
第一节 基本内容归纳.....	158	一、微分方程的概念.....	200
一、二重积分的概念与性质.....	158	二、一阶线性微分方程.....	200
二、二重积分的计算.....	159	三、二阶常系数线性微分方程.....	201
三、曲线积分.....	160	第二节 典型例题分析.....	201
第二节 典型例题解析.....	163	第三节 习题解答.....	206
第三节 习题解答.....	166	第四节 单元测试题解答.....	218

第一章 预备知识

第一节 基本内容归纳

一、函数概念

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量. 数集 D 叫做这个函数的定义域, 函数值全体组成的集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为这个函数的值域. 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

确定函数的两个要素:

(1) 函数的定义域. 如果两个函数的定义域不同, 函数就不相同.

(2) 对应关系. 它表明了函数 y 与自变量 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的. 这个“一定的法则”就是 x 与 y 之间的对应关系, 即函数关系. 因此, 如果两个函数的对应关系不同就是两个不同的函数. 而且在两个函数中虽然定义域相同, 但对应关系不同, 仍是两个不同的函数.

函数的表示方法一般有: (1) 公式法 (也称解析法); (2) 表格法; (3) 图示法.

二、函数定义域的求法

函数类型	定义域的求法
分式函数	分母不等于零.
偶次根式函数	根式内的量不能取负值. 如: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 所以 $1-x^2 \geq 0$, 即 $-1 \leq x \leq 1$
奇次根式函数	根式内的量取任意实数.
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	真数必须取正值. 如: $f(x) = \log_2(1-x)$, 所以 $1-x > 0$, 即 $x < 1$
正弦函数 $y = \sin x$ 余弦函数 $y = \cos x$	x 取一切实数.
正切函数 $y = \tan x$ 余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ $x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
反正弦函数 $y = \arcsin x$ 反余弦函数 $y = \arccos x$	$ x \leq 1$
有限项组成的函数	先求出每一项的定义域, 再取其共同部分.
分段函数	求几个表达式的定义域的并集.

三、函数的几种特性

性质	函数类型	满足条件	备注
奇偶性	偶函数	$f(-x) = f(x)$	图形关于 y 轴对称
	奇函数	$f(-x) = -f(x)$	图形关于原点对称
单调性	单调增加函数	对于 D 中的任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$	
	单调减少函数	对于 D 中的任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$	
有界性	有界函数	对于所有 $x \in D$, 存在正数 M , 使 $ f(x) \leq M$ 成立	
周期性	周期函数	若存在一个正数 T , 对任何 $x \in D$ 都有 $f(x \pm T) = f(x)$	

四、反函数

(1) 定义: 设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作函数, 则由 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 而函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

习惯上, 总是用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此, 把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$, 称 $y = f^{-1}(x)$ 和 $y = f(x)$ 互为反函数.

(2) 性质: 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形, 在同一个直角坐标系下, 关于直线 $y = x$ 对称.

五、复合函数

定义 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = g(x)$, 且 $g(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 那么, y 通过中间变量 u 也是 x 的函数, 称后一个函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作 $y = f[g(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

注 在复合函数 $y = f(g(x))$ 中, 特别注意中间变量函数 $u = g(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 否则不能构成复合函数. 例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 4$ 就不能复合成一个复合函数. 因为函数 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 而 $u = x^2 + 4$ 的值域为 $[4, +\infty)$, 故 $[4, +\infty) \not\subset [-1, 1]$.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成, 并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

第二节 典型例题分析

例 1 求函数 $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{1}{x}$ 的定义域.

分析 所给的函数是由 $\sqrt{3-x}$, $\arcsin \frac{1}{x}$ 构成的, 所以所给函数的定义域为这两个函数定

义域的公共部分 .

解 由题意有

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

而 $(-\infty, -1] \cap (-\infty, 0) \cap (0, +\infty) \cap (-\infty, 3] = (-\infty, -1]$
 $(-\infty, -1] \cap [1, +\infty) \cap (-\infty, 3] = [1, 3]$

所以所求定义域为: $(-\infty, -1] \cup [1, 3]$.

例 2 求下列函数定义域 .

(1) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; (2) $y = \sqrt{3x + 2}$; (3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$.

解 (1) 因为 $1 - x^2 \neq 0$, 所以 $x \neq \pm 1$, 所以定义域为 $\{x \mid x \neq \pm 1, x \in \mathbb{R}\}$;

(2) 因为 $3x + 2 \geq 0$, 所以 $x \geq -\frac{2}{3}$, 所以定义域为 $\left\{x \mid x \geq -\frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}\right\}$;

(3) 因为 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 所以定义域为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

例 3 设函数 $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$, 求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-x)$, $f(x+1)$.

解 $f(0) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f(-x) = \frac{1 - (-x)}{1 + (-x)} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$f(x+1) = \frac{1 - (x+1)}{1 + (x+1)} = \frac{-x}{x+2}$$

例 4 将下列函数分解成若干简单函数, 并求出定义域 .

(1) $y = \arctan \ln(1 + x^2)$; (2) $y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}}$; (3) $y = [1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}]^4$.

解 (1) 令 $v = 1 + x^2$, $u = \ln v$, 则 $y = \arctan u$, 故所给函数的复合关系为
 $y = \arctan u, u = \ln v, v = 1 + x^2$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $y = \sqrt{u}, u = \tan v, v = \frac{x}{2}$, 定义域为 $(2n\pi, (2n+1)\pi) (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(3) $y = u^4$, $u = 1 - v^{\frac{1}{2}}$, $v = 1 - x^2$, 定义域是 $[-1, 1]$.

注 函数分解原则:由内到外,逐层分解;或由外向内,逐层分解.这要视具体情况采取不同方法.

例 5 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 < x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + x & 0 < x < 3 \end{cases}$, (1)求定义域;(2)求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$,

$f(1)$ 的值.

解 (1) 定义域为 $[-2, 0) \cup \{0\} \cup (0, 3] = [-2, 3]$.

(2) 因为 $-2 \in [-2, 0)$, 所以选用表达式 $f(x) = x^2$ 求 $f(-2)$, 即 $f(-2) = (-2)^2 = 4$. 因为 $0 \in \{0\}$, 而与之相对应的函数表达式为 $f(x) = 2$, 所以 $f(0) = 2$.

因为 $-1 \in [-2, 0)$, 而与之相对应的函数表达式为 $f(x) = x^2$, 所以 $f(-1) = (-1)^2 = 1$.

又因为 $1 \in (0, 3]$, 而与之相对应的函数表达式为 $f(x) = 1 + x$, 所以 $f(1) = 1 + 1 = 2$.

注 自变量的取值范围叫做函数的定义域.由于许多读者对分段函数不太熟悉,对这种函数定义域的求解比较陌生,因此理解函数定义域的概念是关键.

例 6 在下列各题中,判定所给函数是否表示同一个函数(要求简要说明理由).

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(2) $f(x) = \lg(x^2 - 6x + 9)$, $g(t) = 2\lg|t - 3|$;

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$;

(4) $f(x) = \sin(\arcsin x)$, $g(x) = \arcsin(\sin x)$;

(5) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \lg(1+x) - \lg(1-x)$.

解 (1) 不同,定义域不同,因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 而 $g(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

(2) 相同.两函数的定义域相同;对应关系也相同.

(3) 相同.两函数的定义域相同;对应关系相同.

(4) 不同.定义域不同,因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 而 $g(x)$ 中的定义域为 \mathbb{R} .

(5) 相同.两函数的定义域都是 $\{x | -1 < x < 1\}$, 对应关系相同.

例 7 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ , 重量是 P , 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F , 使物体从静止开始移动(如图 1-1), 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的关系式.

分析 力的分析如图 1-2 所示, 而 $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$, 由力的平衡条件得

$$\begin{cases} F_x - R = 0 \\ F_y + N - P = 0 \end{cases} \begin{cases} F_x = R = \mu N \\ N = P - F_y \end{cases}$$

将 $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$ 及 $N = P - F_y$ 代入 $F_x = \mu N$ 即得结论.

解 力的分析如图 1-2 所示, 则有

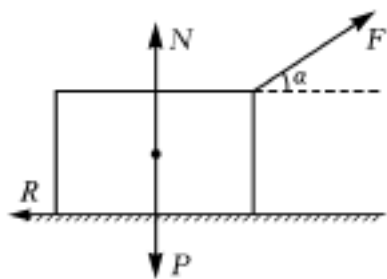


图 1-1

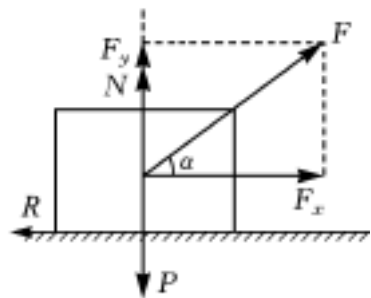


图 1-2

$$\begin{cases} F\cos\theta - R = 0 \\ F\sin\theta + N - P = 0 \\ R = \mu N \end{cases} \quad \begin{cases} F\cos\theta = R \\ N = P - F\sin\theta \\ R = \mu N \end{cases}$$

所以

$$F\cos\theta = \mu(P - F\sin\theta)$$

$$F = \frac{\mu P}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

第三节 习题解答

习题 1-1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 (x) 是否相同?为什么?在哪一区间内它们是相同的?

(1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $(x) = 1$; (2) $f(x) = \lg x^2$, $(x) = 2\lg x$;

(3) $f(x) = x$, $(x) = (\sqrt{x})^2$; (4) $f(x) = x$, $(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由三角函数定义知道无论 x 取什么值, $f(x) = 1$; 函数 (x) 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由函数的定义知道无论 x 取什么值, $(x) = 1$, 由此可知, 函数 $f(x)$ 和 (x) 的定义域相同, 对应法则也相同, 所以函数 $f(x)$ 和 (x) 相同.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数 (x) 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为函数 $f(x)$ 和 (x) 的定义域不同, 所以函数 $f(x)$ 和 (x) 不相同.

在 $(0, +\infty)$ 内, 由对数的运算性质, $f(x) = \lg x^2 = 2\lg x = (x)$, 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 和 (x) 相同.

(3) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数 (x) 的定义域为 $[0, +\infty)$, 因为函数 $f(x)$ 和 (x) 的定义域不同, 所以函数 $f(x)$ 和 (x) 不相同.

在 $[0, +\infty)$ 上, 由根式的运算性质, $(x) = (\sqrt{x})^2 = x = f(x)$, 因此, 在 $[0, +\infty)$ 上, 函数 $f(x)$ 和 (x) 相同.

(4) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数 (x) 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由根式的运算性质, $(x) = x$. 由此可知, 函数 $f(x)$ 和 (x) 的定义域相同, 对应法则也相同, 所以函数 $f(x)$ 和 (x) 相同.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \arccos \frac{2x-3}{3}$; (2) $y = \sqrt{25-x^2}$; (3) $y = \sqrt{x^2-16}$;

(4) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$; (5) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; (6) $y = \frac{1}{\lg(2-x)}$.

解 (1) 因为关系式中含有反余弦, 要使函数有意义, 由反余弦的定义知: $\left| \frac{2x-3}{3} \right| \leq 1$, 解这个不等式, 得 $0 \leq x \leq 3$, 所以函数的定义域为 $[0, 3]$.

(2) 因为关系式中含有偶次根式, 要使函数有意义, 须满足: $25-x^2 \geq 0$, 解这个不等式, 得 $-5 \leq x \leq 5$, 所以函数的定义域为 $[-5, 5]$.

(3) 因为关系式中含有偶次根式, 要使函数有意义, 须满足: $x^2-16 \geq 0$, 解这个不等式, 得 $x \geq 4$ 或 $x \leq -4$, 所以函数的定义域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

(4) 因为关系式中既含有分式又含有偶次根式, 要使函数有意义, 须满足

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

解这个不等式组, 得 $x < 1$ 但 $x \geq -2$, 所以函数的定义域为 $[-2, 1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(5) 因为关系式中既含有分式又含有偶次根式,而偶次根式又在分母上,要使函数有意义,须满足: $9 - x^2 > 0$,解这个不等式,得 $-3 < x < 3$,所以函数的定义域为 $(-3, 3)$.

(6) 因为关系式中既含有分式又含有对数式,要使函数有意义,须满足

$$\begin{cases} \lg(2-x) \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

解这个不等式组,得 $x < 2$ 但 $x \geq 1$,所以函数的定义域为 $[1, 2)$.

3. 设 $f(x) = \sqrt{9+x^2}$,求下列函数值: $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(x_0+h)$.

解 $f(0) = \sqrt{9+0^2} = 3$

$$f(1) = \sqrt{9+1^2} = \sqrt{10}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{9+\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2+1}{a^2}} = \frac{\sqrt{9a^2+1}}{|a|}$$

$$f(x_0+h) = \sqrt{9+(x_0+h)^2}$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ x-1, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$,求:(1)定义域;(2)计算 $f(0)$, $f(1)$.

解 (1) 由函数表达式知:函数的定义域为 $(-2, 2)$;

$$(2) f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1; f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0.$$

5. 已知 $F(x) = x^3 + x \cos x$,证明: $F(-x) = -F(x)$.

证明 因为 $F(-x) = (-x)^3 + (-x) \cos(-x) = -x^3 - x \cos x = -F(x)$,所以 $F(-x) = -F(x)$.

6. 已知 $f(x) = \sin^2 x - 5x^2$,证明: $f(-x) = f(x)$.

证明 因为 $f(-x) = \sin^2(-x) - 5(-x)^2 = \sin^2 x - 5x^2 = f(x)$,所以 $f(-x) = f(x)$.

7. 若 $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$,证明: $f(x+2\pi) = f(x)$.

证明 因为 $f(x+2\pi) = 3 \sin(x+2\pi) - 4 \cos(x+2\pi) = 3 \sin x - 4 \cos x = f(x)$,所以 $f(x+2\pi) = f(x)$.

8. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \sqrt[3]{x+1}; \quad (2) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

解 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$,得 $x = y^3 - 1$,所以函数 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$,得 $x = \frac{1-y}{1+y}$,所以函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

习题 1-2

1. 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) y = e^{-x} - e^x; \quad (2) y = x(x-1)(x+1); \quad (3) y = \tan x;$$

$$(4) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}; \quad (5) y = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad (6) y = f(x) - f(-x).$$

解 (1) 由于 $y(-x) = e^{-(-x)} - e^{-x} = e^x - e^{-x} = -(e^{-x} - e^x) = -y(x)$,所以函数是奇函数.

(2) 由于 $y(-x) = (-x)(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -y(x)$,所以函数是奇函数.

(3) 由于 $y(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -y(x)$,所以函数是奇函数.

(4) 由于 $y(-x) = \frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = y(x)$,所以函数是偶函数.

(5) 由于 $y(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = y(x)$,所以函数是偶函数.

(6) 由于 $y(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -y(x)$,所以函数是奇函数.

2. 函数 $y = \sin 3x$ 的周期是多少?

解 因为函数 $y = \sin x$ 的周期是 2π , 所以有 $y = \sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3\left[x + \frac{2\pi}{3}\right]$, 即有

$$\sin 3x = \sin 3\left[x + \frac{2\pi}{3}\right]$$

所以函数 $y = \sin 3x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$.

3. 判断下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y = \tan x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; (2) $y = 2^x, (-\infty, +\infty)$;

(3) $y = 2^{-x}, (-\infty, +\infty)$; (4) $y = 1 - 3x^3, (-\infty, +\infty)$.

解 (1) 设 $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-\frac{\pi}{2} < x_1 - x_2 < 0$

$$\tan x_1 - \tan x_2 = \frac{\sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2} < 0$$

所以函数 $y = \tan x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.

(2) 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, 又 $2^{x_1} > 0, 2^{x_2} > 0$, 因此

$$\frac{2^{x_1}}{2^{x_2}} = 2^{x_1 - x_2} < 1$$

所以函数 $y = 2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

(3) 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, 又 $2^{-x_1} > 0, 2^{-x_2} > 0$, 因此

$$\frac{2^{-x_1}}{2^{-x_2}} = 2^{-(x_1 - x_2)} > 1$$

所以函数 $y = 2^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递减.

(4) 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, 则

$$1 - 3x_1^3 - (1 - 3x_2^3) = 3(x_2^3 - x_1^3) = 3(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0$$

所以函数 $y = 1 - 3x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递减.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 内的奇函数, 如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调增加, 试证明 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内也单调增加.

证明 设 $x_1, x_2 \in (-1, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则有 $-x_1 > -x_2$, 因为 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内是奇函数, 所以有

$$f(x_1) = -f(-x_1), f(x_2) = -f(-x_2)$$

又 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调增加, 因此有 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $f(-x_2) - f(-x_1) < 0$, 所以

$$f(x_1) - f(x_2) = f(-x_2) - f(-x_1) < 0$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内也单调增加.

习题 1-3

1. 写出下列函数是怎样复合而成的.

(1) $y = (1 + x)^{20}$; (2) $y = (\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2$; (3) $y = 2^{\sin^2 x}$;

(4) $y = \log_a \sin e^{x+1}$; (5) $y = \arccos \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$; (6) $y = \arctan \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$.

解 (1) $y = (1 + x)^{20}$ 是由 $y = u^{20}$ 和 $u = 1 + x$ 复合而成的;

(2) $y = (\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2$ 是由 $y = u^2$, $u = \arcsin v$, $v = \sqrt{w}$ 和 $w = 1 - x^2$ 复合而成的;

(3) $y = 2^{\sin^2 x}$ 是由 $y = 2^u$, $u = v^2$ 和 $v = \sin x$ 复合而成的;

(4) $y = \log_a \sin e^{x+1}$ 是由 $y = \log_a u$, $u = \sin v$, $v = e^w$ 和 $w = x + 1$ 复合而成的;

(5) $y = \arccos \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ 是由 $y = \arccos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \ln w$ 和 $w = x^2 - 1$ 复合而成的;

(6) $y = \arctan \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ 是由 $y = \arctan u$, $u = \sqrt[3]{v}$ 和 $v = \frac{x-1}{2}$ 复合而成的.

2. 证明: (1) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$; (2) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{证明 (1) } \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{-x+y} + e^{x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x-y} - e^{-x+y} + e^{x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y) \end{aligned}$$

所以 $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$

$$\begin{aligned} \text{(2) } 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} &= 2 \cdot \frac{e^{\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

所以 $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$

3. 已知水渠的横断面为等腰梯形. 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (如图 1-3), 当过水断面 ABCD 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 L ($L = AB + BC + CD$) 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

解 由 B 作 AD 的垂线, 垂足为 E, 则由等腰三角形的性质有

$$AB = CD, \quad \angle BAE = 40^\circ, \quad AB = \frac{h}{\sin 40^\circ}, \quad AE = h \cot 40^\circ$$

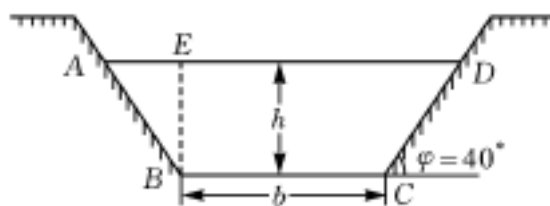


图 1-3

又因为

$$S_0 = \frac{1}{2} (BC + AD) h = \frac{1}{2} (b + b + 2h \cot 40^\circ) h = h(b + h \cot 40^\circ)$$

即 $S_0 = h(b + h \cot 40^\circ)$

由此可得 $BC = b = \frac{S_0}{h} - h \cot 40^\circ$

所以 $L = AB + BC + CD = \frac{2h}{\sin 40^\circ} - h \cot 40^\circ + \frac{S_0}{h} \quad (0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$

第四节 单元测试题解答

一、填空题(每空 4 分,共 20 分)

1. 设函数 $f(x) = |1+x| + \frac{15(x+1)}{|2x-7|}$, 则 $f(-4) = \underline{0}$.

解 $f(-4) = |1+(-4)| + \frac{15(-4+1)}{|2(-4)-7|} = 0$

2. 设函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$, 则定义域为: $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

解 由函数的定义域得 $-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$, 所以定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

3. 设 $f(x) = 2 - \lg(x+2)$, 则 $f^{-1}(x) = \underline{10^{2-x} - 2}$.

解 设 $y = f(x)$, 由已知得 $\lg(x+2) = 2 - y$, 根据对数的定义得 $x+2 = 10^{2-y}$, 即 $x = 10^{2-y} - 2$, 所以已知函数的反函数为

$$f^{-1}(x) = 10^{2-x} - 2$$

4. 设 $f(x-1) = x^2(x-1)$, 则 $f(x) = \underline{(x+1)^2 x}$.

解 设 $X = x - 1$, 则 $x = X + 1$ 代入已知条件得 $f(X) = (X+1)^2 X$, 即

$$f(x) = (x+1)^2 x$$

5. 设 $y = \cos 3x$, 则它的周期 $T = \underline{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $\cos x$ 的周期是 2π , $\cos x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$, 所以 $\cos 3x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$.

二、单项选择题(每题 4 分, 共 20 分)

1. 设函数 $f(x) = \sin x^2$, 且 $(x) = x^2 + 1$, 则 $f[(x)] =$

[(A)]

(A) $\sin(x^2 + 1)^2$; (B) $\sin^2(x^2 + 1)$;

(C) $\sin(x^2 + 1)$; (D) $\sin^2 x^2 + 1$.

解 由于 $f[(x)] = f(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1)^2$, 故选(A).

2. 下列函数中是偶函数的有

[(D)]

(A) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; (B) $f(x) = x^2 \sin x$;

(C) $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; (D) $f(x) = x \sin x$.

解 (A) 由于 $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(B) 由于 $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(C) $f(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{a^x(a^{-x} - 1)}{a^x(a^{-x} + 1)} = -\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(D) $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

故选(D).

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则 $f(x+a) + f(x-a)$ ($0 < a < 1$) 的定义域为

[(D)]

(A) $[a-1, a+1]$; (B) $[-a-1, -a+1]$;

(C) $[1-a, a-1]$; (D) $[a-1, 1-a]$.

解 $f(x+a)$ 的定义域由 $-1 \leq x+a \leq 1$ 得 $-a-1 \leq x \leq -a+1$, 即 $[-a-1, -a+1]$. 同理可得 $f(x-a)$ 的定义域为 $[a-1, a+1]$, $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为 $[-a-1, -a+1]$ 和 $[a-1, a+1]$ 的交集 $[a-1, 1-a]$ 故选(D).

4. 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形在同一个直角坐标系下对称于直线

[(C)]

(A) $y = 0$; (B) $x = 0$; (C) $y = x$; (D) $y = -x$.

解 略.

5. 已知函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = f\left[\frac{1}{x}\right]$, 则 $f(x) =$

[(D)]

(A) x ; (B) $\frac{1}{x}$; (C) $x - \frac{1}{x}$; (D) $x + \frac{1}{x}$.

解 只有 D 满足关系式 $f(x) = f\left[\frac{1}{x}\right]$, 故选(D).

三、计算题(每小题 5 分, 共 35 分)

1. 求函数 $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$ 的定义域.

解 由 $\lg \frac{5x - x^2}{4} \geq 0$, 得 $\frac{5x - x^2}{4} \geq 1$, 即 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ 解得 $1 \leq x \leq 4$.

所以, 函数的定义域为 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$.

2. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f(x+1)$.

解 $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$; 同理

$$f(2) = 0$$

$$f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x+1) = x^2 - x$$

3. 设函数 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

$$\text{解 } f[f(x)] = \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}, \quad f\{f[f(x)]\} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

4. 写出函数 $y = \lg^2 \arccos x^3$ 的复合关系.

解 函数由 $y = u^2$, $u = \lg v$, $v = \arccos t$ 和 $t = s^3$ 复合而成.

5. 如果 $y = \sqrt{u}$, $u = 2 + v^2$, $v = \cos x$, 将 y 表示成 x 的函数.

$$\text{解 } y = \sqrt{2 + \cos^2 x}$$

6. 判断函数 $y = 1 - 3x^2$ 的单调性.

解 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_2 - y_1 = -3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$, 所以, 函数在区间 $(-\infty, 0]$ 内为单调递增函数.

当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_2 - y_1 = -3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < 0$, 所以, 函数在区间 $[0, +\infty)$ 内为单调递减函数.

7. 判断函数 $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^{-1} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

所以函数为奇函数.

四、应用题(每小题 5 分, 共 35 分)

1. 设一矩形面积为 A , 试将周长 S 表示为宽 x 的函数, 并求其定义域.

解 设矩形的长为 y (如图 1-4), 则由题意得: 矩形面积 $A = xy$, 周长 $S = 2x + 2y$. 于是 $y = \frac{A}{x}$, 代入周长公式, 得

$$S = 2x + 2 \cdot \frac{A}{x} = 2 \left[x + \frac{A}{x} \right] \quad (x > 0)$$

2. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱, 试将圆柱的体积表示为其高的函数, 并确定其定义域.

解 设圆柱高为 h , 圆柱底面半径为 R (如图 1-5), 则圆柱底面半径

$$R = \sqrt{r^2 - \left[\frac{h}{2} \right]^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - h^2}$$

所以, 圆柱的体积

$$V = h R^2 = \frac{1}{4} h(4r^2 - h^2) \quad (0 < h < 2r)$$

3. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形储油筒, 试将它的全面积表示成底半径的函数, 并确定其定义域.

解 设圆柱底面半径为 r , 高为 h (如图 1-6), 由 $V = h r^2$ 得 $h = \frac{V}{r^2}$, 则圆柱形储油筒全面积

$$S = 2rh + 2r^2 = \frac{2V}{r} + 2r^2 \quad (r > 0)$$

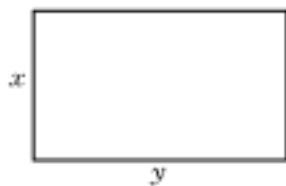


图 1-4

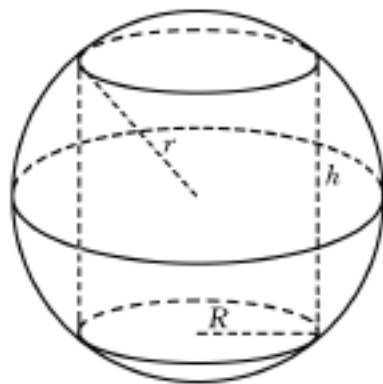


图 1-5

4. 拟建一个容积为 V 的长方体游泳池, 设它的底为正方形, 如果池底所用材料单位面积造价是四周单位面积造价的 2 倍, 试将总造价表示成底边长的函数, 并确定此函数的定义域.

解 设底面边长为 x , 高为 h , 单位面积造价为 a (如图 1-7), 则由题意有

$$V = x^2 h$$

于是, 高为

$$h = \frac{V}{x^2}$$

总造价为

$$f(x) = (4xh + 2x^2)a = 2a \left[\frac{2V}{x} + x^2 \right] \quad (x > 0)$$

5. 求如图 1-8 所示的锯齿形波的函数关系.

解 当 $x \in (-T, T]$ 时函数为 $y = |x|$, 将 $x \in (-T, T]$ 时函数 $y = |x|$ 的图象向右平移 $2T$ 个单位, 即可得其函数为

$$y = |x - 2T| \quad x \in (T, 3T]$$

把 $x \in (-T, T]$ 时函数 $y = |x|$ 的图象向左平移 $2T$ 个单位, 即可得其函数为

$$y = |x + 2T| \quad x \in (-3T, -T]$$

综上所述, 可得如图锯齿形波的函数关系为

$$y = |x - 2kT| \quad x \in (-T + 2kT, T + 2kT], k \text{ 取整数}$$

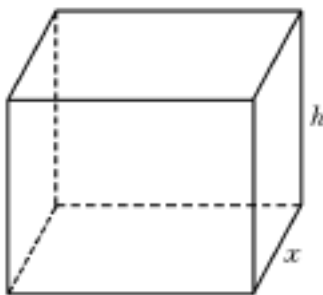


图 1-7

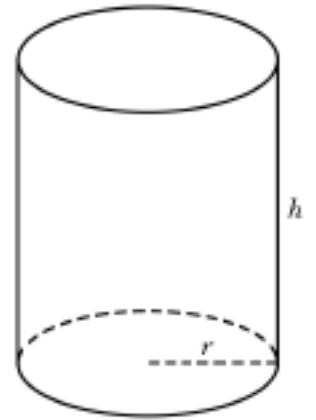


图 1-6

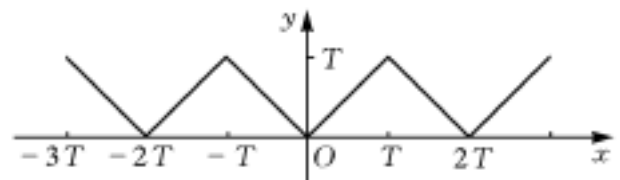


图 1-8

第二章 极限与连续

第一节 基本内容归纳

一、函数极限

1. $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义. 如果当 x 从 x_0 点的左侧趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^-)$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右邻域内有定义. 如果当 x 从 x_0 点的右侧趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^+)$$

注 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义与函数在该点是否存在极限无关.

2. $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 有定义. 如果当 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 有定义. 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ ($a > 0$) 有定义. 如果当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

3. 函数极限存在的充分必要条件

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$