

高等数学习题课教程

董梅芳 周后型 张华富 编

高等教育出版社

责任编辑	文小西
封面设计	于文燕
责任绘图	尹文君
版式设计	马静如
责任校对	俞声佳
责任印制	

内容提要

本书是根据工科本科高等数学教学基本要求,在原“高等数学习题课教程”的基础上修订而成的.全书共24讲,每讲由本讲要求、例题分析与疑难解答、课内练习题、课外练习题四部分组成,并配有八个阶段的自我测验题.书末附有习题答案或提示.

本书可作为高等数学习题课教材,也可作为从事高等数学教学的教师、报考非数学专业研究生的考生及广大自学者的参考书.

图书在版编目

高等数学习题课教程/董梅芳,周后型,张华富编. —北京:
高等教育出版社, 2000

ISBN 7 - 04 - 009184 - 4

. 高... . 董... 周... 张... . 高等数学 - 解题
. 013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字

高等数学习题课教程

董梅芳 周后型 张华富 编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009

电 话 010 - 64054588 传 真 010 - 64014048

网 址 <http://www.gdpress.com.cn>

<http://www.gdpress.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷

开 本 850 × 1168 1/32 版 次 年 月 第 版

印 张 12.25 印 次 年 月 第 次印刷

字 数 300 000 定 价 12.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

前 言

高等数学习题课是高等数学教学的重要组成部分，是课堂教学的进一步深化，也是一个重要的实践性环节。而一本好的习题课教材是上好习题课的一个必要条件。

本书是根据工科本科高等数学教学基本要求，在原“高等数学习题课教程

结合东南大学近年来高等数学课程教学改革的实践，经全面修订而成。全书共 24 讲，每讲包括本讲要求、例题分析与疑难解答、课内练习题、课外练习题四个部分，并配有八个阶段的自我测验题。

本书的主要特点是内容上不面面俱到，而是针对学生学习中容易产生错误的问题和疑难问题，通过提出问题、例题分析、回答问题、内容小结等方式，帮助读者正确理解基本概念、掌握解题思路、总结解题方法。本书结构独特，例题典型，分析透彻，注重引导，一题多解，启迪思维。

本书由东南大学应用数学系张华富老

老
十九至二十四讲)

数学教研室的老师给予了大力支持和帮助，在此深表谢意！

由于编者水平所限，本书的缺点和错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

2000 年 4 月

目 录

第一讲 函数	(1)
第二讲 极限	(12)
第三讲 函数的连续性	(24)
自我测验题	(35)
第四讲 导数概念与计算	(37)
第五讲 高阶导数与函数的微分	(50)
第六讲 中值定理与洛必达法则	(61)
第七讲 导数的应用	(76)
自我测验题	(87)
第八讲 不定积	(90)
第九讲 不定积	(108)
第十讲 定积分的概念、性质及计算	(119)
第十一讲 定积分应用 反常积分概念	(136)
自我测验题	(147)
第十二讲 一阶微分方程	(150)
第十三讲 特殊类型高阶微分方程	(157)
第十四讲 微分方程应用	(171)
自我测验题	(180)
第十五讲 无穷级数	(181)
第十六讲 傅里叶级数	(201)
自我测验题	(213)
第十七讲 向量代数	(216)
第十八讲 空间解析几何	(224)
第十九讲 多元函数微分法	(238)
第二十讲 多元函数微分法的应用	(258)

自我测验题		(266)
第二十一讲	二重积分的概念与计算	(268)
第二十二讲	三重积分的概念与计算	(287)
自我测验题		(300)
第二十三讲	曲线积分的概念与计算	(301)
第二十四讲	曲面积分与场论	(325)
自我测验题		(349)
习题答案		(351)

第一讲 函 数

一、本讲要求

1. 理解函数的概念和函数符号的意义，能熟练地求出给定函数的定义域。
2. 理解反函数、复合函数、分段函数。
3. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性及其图形特征。
4. 熟悉基本初等函数的性质及图形。

二、例题分析与疑难解答

问题 1 为什么说函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素？

根据函数定义，只要定义域和对应规律确定了，函数的值域也就确定了，从而函数就完全确定。因而函数的定义域与对应规律是确定函数的两个主要因素。

试分别举出定义域不同；定义域相同、对应规律不同；定义域相同、值域也相同的不同函数的例子。

由于函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素，所以只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时，才能说它们是相同

下列各题中两函数是否相同？分别作出它们的图形。

$$y = x^2 \text{ 与 } y = x;$$

(2) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$;

(3) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ 与 $y = x + 3$;

(4) $y = x^2$ 与 $y = (x - 1)^2 + 2x - 1$.

下面的例子可帮助读者正确理解函数的符号.

例 1 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试以 $f(x)$ 求 $f(3x)$

解 [法 1]

$$\text{因 } f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{3x}{2x + (x-1)} = \frac{3 \frac{x}{x-1}}{2 \frac{x}{x-1} + 1}$$

故

$$f(3x) = \frac{3 f(x)}{2 f(x) + 1}$$

这种解法的关键在于变形.

[法 2] 先由 $y = \frac{x}{x-1}$ 解出反函数 $x = \frac{y}{y-1}$, 则有

$$f(3x) = f\left(\frac{3y}{y-1}\right) = \frac{\frac{3y}{y-1}}{\frac{3y}{y-1} - 1} = \frac{3y}{3y - y + 1} = \frac{3y}{2y + 1}$$

从而

$$f(3x) = \frac{3 f(x)}{2 f(x) + 1}$$

例 2 设

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0 \\ 2^x, & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

求 $f(x-1)$

解 下面做法对吗?

用 $x-1$ 替换 $f(x)$ 中的 x , 得

$$f(x-1) = \begin{cases} 1 & (x-1) = x, - < x < 0 \\ 2^{x-1}, & 0 < x < + \end{cases}$$

这是错误的。请找出错在何处？

正确做法如下：

令 $x - 1 = t$ ，则有

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f(t) = \begin{cases} 1+t, & - < t < 0 \\ 2^t, & 0 < t < + \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & - < x-1 < 0 \\ 2^{x-1}, & 0 < x-1 < + \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & - < x < 1 \\ 2^{x-1}, & 1 < x < + \end{cases} \end{aligned}$$

问题 2 两个函数应满足什么条件才能构成复合函数？

按照复合函数的定义，数集 B 上的函数 $y = f(u)$ A 上的函数 $u = (x)$ A 上的复合函数 $y = f((x))$ 应要求 $u = (x)$ B B ，如果这个条件不满足，它们就不能构成数集 A 上的复合函数。

例如 $y = 1 - u^2$ 与 $u = 3 + \sin x$ 就不能构成复合函数，这是因为 $y = 1 - u^2$ 的定义域为 $-1 < u < 1$ ，而 $u = 3 + \sin x$ ($- < x < +$) 的值域为 $2 < u < 4$ ，它不在 $y = 1 - u^2$ 的定义域中。

但应注意，如果在数集 A^* ($A^* \subset A$) $u = (x)$ 属于 $y = f(u)$ B ，那么 $y = f(u)$ $u = (x)$ A^* 上可构成复合函数。

例 3 设 $f(x) = x - 1$ ， $g(x) = \frac{1}{x}$ 。试确定 $f(g(x))$ $g(f(x))$ 的定义域。

解 (1) $g(x)$ $A = (-, 0) \cup (0, +)$
 为 $B_g = (-, 0) \cup (0, +)$ $f(x)$ $B = [1, +)$
 由于 B_g 中只有 $(1, +)$ $f(x)$ B 中，

而 B_g 中 $(1, +\infty)$ $A = [0, 1]$

$f(g(x))$ 的定义域 $[0, 1]$

(2) $f(x)$ $A = [1, +\infty)$ $B_f = [0, +\infty)$

$g(x)$ $B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

由于 B_f 中只 $(0, +\infty)$ $g(x)$ B 中,
而 B_f 中 $(0, +\infty)$ A 中 $(1, +\infty)$

$g(f(x))$ 的定义域 $(1, +\infty)$

本例表明 $f(g(x)) \neq g(f(x))$
没有公共点.

可见复合运算是不可交换的.

问题 3 分段函数能不能看作几个函数或看作几段函数相加?

分段函数是一个函数, 有其确定的定义域及对应规律, 切不可看作几个函数, 也不能看作几段函数相加. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \leq 0 \\ x - 2, & x > 0 \end{cases}$$

是一个分段函数, 其定义域 $(-\infty, +\infty)$

自变量 $x \leq 0$ 时, 因变量由 $1 + x^2$ 确定; 当自变量 $x > 0$ 时, 因变量由 $x - 2$ 确定. 它是一个函数而不是两个函数, 它也不能看作两段函数 $f_1(x) = 1 + x^2 (x \leq 0)$ $f_2(x) = x - 2 (x > 0)$

因为函数相加是指在共同定义域内同一自变量处的函数值相加, 而 $f_1(x) = 1 + x^2 (x \leq 0)$ $f_2(x) = x - 2 (x > 0)$

不同的函数, 它们不能相加.

至于两个分段函数能不能相加, 这要由具体情况而定.

例如 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ 与 $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

就能相加, 因为它们的定义域相同. 此时

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

而 $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 与 $g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

就不能相加, 因为它们的定义域不同.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} f(x+2) = 2f(x) & 0, 2] \\ f(x) = x(x-2) & -4, 4] \end{cases}$

分析 已知的只是 $f(x) = x(x-2)$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式.

$$f(x+2) = 2f(x) \quad (1-1)$$

要求 $f(x) = x(x-2)$ 在 $[-4, 4]$ 上的表达式. (1-1)

扩充 f 的定义域.

解 (1) 当 $x \in [2, 4]$ 时, $x-2 \in [0, 2]$ 由 (1-1) 得

x 用 $x-2$ 代替, 得

$$f(x) = 2f(x-2)$$

由于 $x-2 \in [0, 2]$ 时 $f(x-2) = (x-2)(x-4)$. (1-1)
 $x \in [2, 4]$ 时

$$f(x) = (x-2)(x-4)$$

(2) 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $x+2 \in [0, 2]$ 由 (1-1) 得

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+2)$$

由于 $x+2 \in [0, 2]$ 时

$$f(x+2) = (x+2)(x+2-2) = (x+2)x$$

所以当 $x \in [-2, 0]$ 时 $f(x) = \frac{1}{2}x(x+2)$

(3) 当 $x \in [-4, -2]$ 时, $x+2 \in [-2, 0]$ 由 (2) 得 $f(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)(x+4)$

$$f(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)(x+2+2) = \frac{1}{2}(x+2)(x+4)$$

又 $x \in [-4, -2]$ 时 $f(x) = \frac{1}{2}f(x+2) = \frac{1}{4}(x+2)(x+4)$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x+4)$$

综上所述, 在 $[-4, 4]$ 上 $f(x) = \begin{cases} (x-2)(x-4) & x \in [2, 4] \\ \frac{1}{2}x(x+2) & x \in [-2, 0] \\ \frac{1}{4}(x+2)(x+4) & x \in [-4, -2] \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x+4)}{4}, & -4 < x < -2 \\ \frac{x(x+2)}{2}, & -2 < x < 0 \\ x(x-2), & 0 < x < 2 \\ 2(x-2)(x-4), & 2 < x < 4 \end{cases}$$

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ 2 - x^2, & |x| = 1 \end{cases}$

求 (1) $f(f(x))$ (2) $f(f(x) - 3)$ (3) $f(f(x) - 4)$ (4) $f(f(x))$

解 (1) 当 $|x| < 1$ 时, $f(f(x)) = f(1) = 1$;
当 $|x| > 1$ 时, $f(f(x)) = f(0) = 1$.

所以 $f(f(x)) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \end{cases}$

(2) 当 $|x| < 1$ 时, $f(f(x)) = f(2 - x^2) = 0$;
当 $|x| > 1$ 时, $f(f(x)) = f(2) = 0$;
当 $|x| = 1$ 时, $f(f(x)) = f(1) = 1$.

所以 $f(f(x)) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$

(3) 当 $|x| < 1$ 时, $f(f(x)) = f(1) = 2 - 1^2 = 1$;
当 $|x| > 1$ 时, $f(f(x)) = f(0) = 2$.

所以 $f(f(x)) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$

(4) 当 $|x| < 1$ 时, $f(f(x)) = f(2 - x^2) = 2$;
当 $|x| = 1$ 时, $f(f(x)) = f(1) = 2 - 1^2 = 1$;
当 $|x| > 1$ 时, $f(f(x)) = f(2) = 2$.

所以 $f(f(x)) = \begin{cases} 2, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$

问题 4 有界函数、奇偶函数、周期函数有何特征?

请读者回答这个问题, 并判断下列函数中哪些是周期函数?

哪些不是周期函数？对周期函数指出其周期。

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \sin x^2$; (3) $y = \sin x$;

(4) $y = 1 + \cos \frac{x}{2}$; (5) $y = x \cos x$;

(6) $y = |\sin x| + |\cos x|$.

例 6 证明：定义 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上

偶函数与一个奇函数之和。

证明 因 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

记

$$G(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$$

$$H(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

则

$$f(x) = G(x) + H(x)$$

由于

$$G(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = G(x)$$

$$H(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)]$$

$$= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -H(x)$$

所以 $G(x)$ 是偶函数， $H(x)$ 是奇函数， $f(x)$

示为一个偶函数与一个奇函数之和。

例 7 证明： $f(x) = x - [x]$ ($[x]$ 为 x 的整数部分) 为 1 为周期的周期函数，并作出其图形。

证明 因 $f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - [x] - 1 = x - [x] = f(x)$ ，故 $f(x) = x - [x]$ 为 1 为周期的周期函数。其图形如图 1-1 所示。

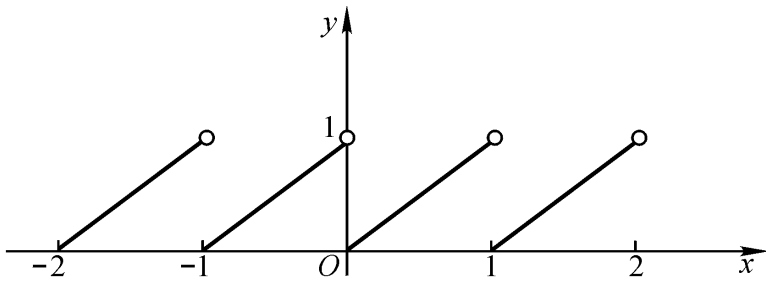


图 1 - 1

例 8 证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$

证明 对任意给定的 $M > 0$, 由于 $\frac{1}{M+1} \in (0, 1)$

取 $x_1 = \frac{1}{M+1}$, 则有 $|f(x_1)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{M+1}} \right| = M+1 > M$. 因此 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$

注意, 若设 $0 < a < 1$, 则 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(a, 1)$

为取 $M = \frac{1}{a}$, 对任意 $x \in (a, 1)$ 有 $|f(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a} = M$.

三、课内练习题

1. 选择题:

(1) 函数 $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$ 的定义域是 ()

(A) $[-2, 3]$ (B) $(-2, +\infty)$

(C) $(-\infty, -2)$ (D) $(-2, 3]$

(2) 设 $f(x) = \arccos(g(x))$, $f = \frac{1}{10}$ 等 ()

(A) 0 (B) -1

(C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{2}$

$$y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$$

$$\left(y = \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \left(y = \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$\left(y = \frac{1-x}{1+x} \right) \quad \left(y = \frac{x-1}{x+1} \right)$$

(4) 下列函数中为偶函数的

$$\left(f(x) = x^3 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\left(f(x) = \ln x + (1+x)^2 \right)$$

$$\left(f(x) = x^2 + |\sin x| \right)$$

$$\left(f(x) = \frac{[x(e-1)]^x}{(e+1)^x} \right)$$

(5) 下列函数中为 \mathbf{R} 上有界函数的

$$x \sin x \quad \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad \left((2x) \right)$$

$$y = x \sin x \quad \left(y = \sin x \cdot \cos x \right)$$

$$\left(y = x \cos x \right) \quad \left(y = \sin \frac{1}{x} \right)$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$, 求 $f(x-1)$ 及 $f(f(x))$

3. 设 $f(x) = 2^x + 3$, 求 $g(x)$ 及 $f(g(x)) = x + 4$.

4. 设 $f(x)$ 为 T 为周期的函数, 试证明: 函数 $f(ax+b)$

$\frac{T}{a}$ 为周期的函数, 其中 a 和 b 为常数, 且 $a > 0$. 并由此求

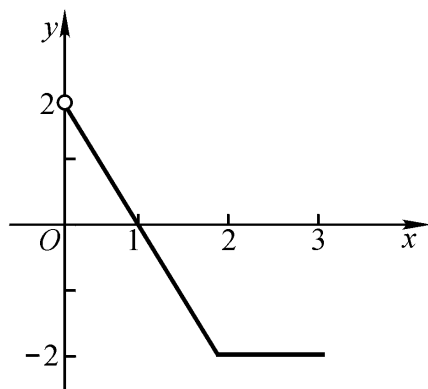
函数 $g(x) = \sin(3x+1)$

5. 已知 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, a, b, c 为常数且

$|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$

6. 已知函数 $y = f(x)$

图 1-2 所示, 试画出下列各函数的图形:



(1) $y = |f(x)|;$

(2) $y = \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]$

(3) $y = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 3) \\ f(-x) & x \in (-3, 0) \end{cases}$

(4) $y = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 3) \\ -f(-x) & x \in (-3, 0) \end{cases}$

图 1-2

7. 设某两城市之间的长途电话费在最初的 3 分钟是 (元) 1.65(元)
试求长途电话费 c 与通话时间 t 的函数关系 .

四、课外练习题

1. 下面的函数哪些是相同的 ?

$f_1(x) = 1 + 4x + 4x^2, f_2(x) = |1 + 2x|,$

$f_3(t) = 1 + 2t, f_4(y) = 1 + 2y,$

$f_5(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}, f_6(x) = \frac{(1+2x)^2}{1+2x}.$

2. 函数 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 与 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 是否是相同的函数? 为什么?

3. 设 $f(x) = x + 3$, 求函数 $g(x) = f(g(x)) = \frac{5x+1}{x}.$

4. 设 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, g(x) = \frac{1}{1+x},$ 求 $g(f(x))$
 $f(g(x))$

5. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ 求

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

6. 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 10, \\ 5, & x > 10, \end{cases}$

证明 $g(x) = 3 + 2f(x - 10)$

7. 设 $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x - 2) + g(x)$

8. 设 $f(x) + g(x) = f(x)g(x)$

$$f(g(x)) = g(f(x)) = f(f(x))$$

9. 问 a, b, c, d 满足什么条件时, 才能使

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

对其定义域内的所有 x 满足 $f(f(x)) = x$.

10. 设函数 $f(x) = \sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

条件:

(1) $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x) + \sin x$,

(2) $f(x) \geq 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

证明: $f(x) = \sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$