高等数学同步学习辅导

(下 册)

(第 2 版)

西北工业大学高等数学教研室　编

西 北 工 业 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导(下册)(第2版)/ 西北工业大学高等数学教研室编.
—2 版. 西安:西北工业大学出版社,2003.5
ISBN 7-5612-1366-2

Ⅰ.高... Ⅱ.西... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036120 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　邮编:710072　电话:029-8493844
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张:20.5
字　　数:520 千字
版　　次:2001 年 8 月第 1 版　2003 年 5 月第 2 版第 4 次印刷
印　　数:18 001～24 000 册
定　　价:25.00 元(上、下册)　本册定价:12.00 元

前　　言

学习高等数学课程时，不少学生感到教学进度快。虽然上课能听懂，但独自解题时会有不少的困惑和疑虑，遇到灵活性较大、综合性较强的题，更是无从下手。我们编写这本同步学习辅导书，供学生课外阅读，以起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。

本书共分 12 章（与高等数学（同济·四版、五版）教材相配套），每章分为若干节（与教学次序相同），最末节为综合问题。每节分为"知识网络导学"、"重点难点剖析"、"典型例题分析"、"基础知识训练"、"能力提高测试"、"参考答案与提示"等栏目。

【知识网络导学】　概括本节所对应的教材内容中的知识要点，阐述扼要、清晰。

【重点难点剖析】　对于教与学中的"重点"、"难点"以及"易误点"进行整理提炼、着重剖析。

【典型例题分析】　讲究选题的布局，例题的典型性，注重解题思路的分析，对解题方法给出引导性的归纳总结。

【基础知识训练】　这部分是给学生配备的基础练习题，通过多种题型，检查学生掌握该节基础知识的程度。

【能力提高测试】　这部分也是练习题，题目具有一定的难度和综合性，以检查学生对知识的灵活运用能力，帮助学生对所学知识全面、深入地理解与掌握。

【参考答案与提示】　给出了每题的答案，并对较难的题给出了提示或简答。

全书试图给学生贯穿这样的思想：在学习中需要熟悉概念、性质，更需要明了其要素；需要多做几类练习题，更需要明了分析问

题的着眼点及解题的思路。引导学生学会将计算方法条理化，总结出规律性的东西，提高利用基本计算方法的思想去解决问题的能力。

本书可作为高等学校工科高等数学的同步教学参考书，也可作为考研应试者考前复习、强化训练的指导书。

参加本书编写工作的有西北工业大学数学与信息科学系陆全、肖亚兰、李云珠，符丽珍，王雪芳、杨月茜、刘华平、孟亚琴、刘哲、林伟、郑红婵等同志，全书由陆全、肖亚兰统纂定稿。

由于水平所限，书中错误及疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2001 年 4 月

目　　录

(下 册)

第八章　多元函数微分法及其应用

§1　多元函数微分法

【知识网络导学】

概念

多元函数,多元函数极限.

<u>$f(x,y)$ **在** (x_0,y_0) **连续**</u>:若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

<u>**偏导数**</u>: $f'_x(x,y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

$f'_y(x,y) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$.

<u>$z = f(x,y)$ **在** (x,y) **可微**</u>: $(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$

若 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$

$A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$.

<u>**全微分**</u>: $\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y = \dfrac{z}{x}\mathrm{d}x + \dfrac{z}{y}\mathrm{d}y$.

<u>$f(x,y)$ **沿方向** l **的方向导数**</u>:

$\dfrac{f}{l} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$.

$(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$

<u>**梯度**</u>: $\mathrm{grad}\, f(x,y) = \dfrac{f}{x}i + \dfrac{f}{y}j$.

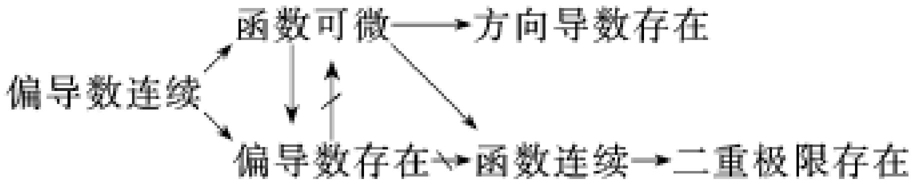
结论与方法

<u>**有关结论**</u>:

1° **多元初等函数在其定义区域内连续**;

2° **高阶混合偏导数(若偏导数连续)与求导次序无关**.

<u>**几个关系**</u>:



<u>**复合函数求导的链式法则**</u>:

$z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ **则**

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{u}\frac{u}{x} + \frac{z}{v}\frac{v}{x}, \frac{z}{y} = \frac{z}{u}\frac{u}{y} + \frac{z}{v}\frac{v}{y}.$$

<u>**隐函数求导法**</u>:

1° $F(x, y) = 0$ **确定** $y = y(x)$, **则** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$;

2° $F(x, y, z) = 0$ **确定** $z = z(x, y)$,

则 $\frac{z}{x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{z}{y} = -\frac{F_y}{F_z}$.

3° $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ **确定** $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$

则由 $\begin{cases} F_x + F_u \frac{u}{x} + F_v \frac{v}{x} = 0, \\ G_x + G_u \frac{u}{x} + G_v \frac{v}{x} = 0. \end{cases}$ **可解得** $\frac{u}{x}, \frac{v}{x}$,

同理可求 $\frac{u}{y}, \frac{v}{y}$.

<u>**方向导数计算公式**</u>:(ϕ: Ox **轴到方向** l **的转角**)

若 $f(x, y)$ **可微**,**则** $\frac{f}{l} = \frac{f}{x}\cos\phi + \frac{f}{y}\sin\phi$

【重点难点剖析】

1. 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在，下列解法哪个对？

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{1/y + 1/x} = 0$.

(2) 因分子为 xy，分母为 $x+y$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，分子是比分母高阶的无穷小，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = 0$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 0}{x+0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$.

(4) 当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y = kx^2 - x$ 趋向 $(0,0)$ 时，

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2-x\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(kx^2-x)}{x+(kx^2-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(kx-1)}{k} = \frac{-1}{k} \quad (k\neq 0),$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

答　(1) 不正确.错误在于认为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right) = \infty$，其实并非如此.例如 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{x}{x-1}\to 0}}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

(2) 不正确.错误在于认为分子是比分母高阶的无穷小，其实并非如此.例如

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} = \infty.$$

(3) 不正确.错误在于 $x\to 0$ 与 $y\to 0$ 没同时进行.先让 $y\to 0$,再让 $x\to 0$,这是另外一种意义下的极限,即二次极限.我们所研究的是二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$,而 $\begin{matrix} x\to x_0 \\ y\to y_0 \end{matrix}$ 作为记号,表示 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$.

(4) 正确.

2. $z=(y-2)\sin x\ln(y+e^{x^2})+x^2$,求 $z_x(1,2)$,下列解法对吗?

(1) 把 y 暂时看作常数,对 x 求导,得

$$z_x=(y-2)\left[\cos x\ln(y+e^{x^2})+\sin x\frac{2xe^{x^2}}{y+e^{x^2}}\right]+2x,$$

所以 $$z_x(1,2)=2.$$

(2) 由于 $z_x(1,2)=\dfrac{\mathrm{d}z(x,2)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}$,

又 $z(x,2)=x^2$,所以 $z_x(1,2)=2x\big|_{x=1}=2$.

答　两种解法均正确.法 2 比较简便.由此可提出这样一个问题:计算偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 时,能否将 $y=y_0$ 先代入 $f(x,y)$ 中,再对 x 求导?回答是可以的.事实上偏导数就是这样定义的.

若记 $\varphi(x)=f(x,y_0)$,则

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f_x(x_0,y_0),$$ 而且 $\varphi'(x_0)$ 如不存在,则 $f_x(x_0,y_0)$ 也不存在.

3. $z=\dfrac{1}{f\left(x^2+\dfrac{x}{y}\right)}$,$f$ 可导,求 z_x.下列解法对吗?

(1) 令 $u = x^2 + \frac{x}{y}$,则 $z = \frac{1}{f(u)}$,从而

$$z_x = -\frac{1}{f^2(u)} f'(u) \cdot u_x = -\frac{f'(u)}{f^2(u)} \cdot \left(2x + \frac{1}{y}\right).$$

(2) $z_x = -\frac{f'}{f^2}\left(2x + \frac{1}{y}\right)$.

(3) $z_x = -\frac{1}{f^2} f_x\left(x^2 + \frac{x}{y}\right)$.

(4) $z_x = -\frac{1}{f^2} f_x\left(2x + \frac{1}{y}\right)$.

答 (1),(2)**均正确**.(3),(4)**均不正确**.**记号** $f_x\left(x^2 + \frac{x}{y}\right)$**用得不当**, f **是一元函数的函数关系** $f(u)$,**只有** $f'(u)$,**简记为** f',**没有** f_x, f_y, **且**(3)**中求导也未进行到底**, **缺少一项** $\frac{u}{x}$, **即** $\frac{}{x}\left(x^2 + \frac{x}{y}\right)$.

4. $z = x^2 f\left(2x, \frac{y^2}{x}\right)$, f **具有二阶连续偏导数**,**求** $\frac{z}{y}, \frac{{}^2 z}{x\ y}$.

解法一 $\frac{z}{y} = x^2\left(f_1' \times 0 + \frac{2y}{x} f_2'\right) = 2xyf_2'$,

$\frac{z}{x} = 2xf + x^2\left(2f_1' - \frac{y^2}{x^2} f_2'\right) = 2xf + 2x^2 f_1' - y^2 f_2'$,**从而**

$$\frac{{}^2 z}{x\ y} = 2x\left(f_1' \times 0 + \frac{2y}{x} f_2'\right) + 2x^2\left(f_{11}'' \times 0 + \frac{2y}{x} f_{12}''\right) - 2yf_2' - y^2\left(f_{21}'' \times 0 + \frac{2y}{x} f_{22}''\right) = 2yf_2' + 4xyf_{12}'' - \frac{2y^3}{x} f_{22}''.$$

解法二 $\frac{z}{y} = x^2\left(f_1' \times 0 + \frac{2y}{x} f_2'\right) = 2xyf_2'$,

因 f 有二阶连续偏导数，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xyf'_2) =$$

$$2yf'_2 + 2xy\left(2f''_{21} - \frac{y^2}{x^2}f''_{22}\right) =$$

$$2yf'_2 + 4xyf''_{21} - \frac{2y^3}{x}f''_{22}.$$

以上两种解法均正确．法 2 较简便．法 2 注意及时利用了 f 具有二阶连续偏导数的条件，在求出 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的基础上，再接着对 x 求偏导即可，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$．而法 1 却按步就班．

另外，一定要注意 f'_1, f'_2 仍为中间变量 $u = 2x, v = \frac{y^2}{x}$ 的函数．在求二阶偏导数时，应有 $f''_{11}, f''_{12}, f''_{21}, f''_{22}$，切记不可掉项．求复合函数的高阶偏导数使用链式法则时漏项，这是常犯的错误．

5. 有人说偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 及 $f_y(x_0, y_0)$ 分别是函数 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处沿 Ox 轴方向($L = i$) 及沿 Oy 轴方向($L = j$) 的方向导数．这种说法对吗？

答：不正确．

事实上，按方向导数定义，当 $L = i$ 时，在 M_0 处

$$\frac{\partial z}{\partial L} = \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{|\Delta x|} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

而 $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$．

由此可见，前者是单侧极限，而后者是双侧极限，两者并非完

全一样 .若$\frac{z}{x}$存在,则沿 $L = i$方向的方向导数$\frac{z}{L}$也存在,且两者相等 .但反之,若$\frac{z}{L}$存在,则$\frac{z}{x}$可能不存在 .例如 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在$(0,0)$ 处沿 $L = i$方向$\frac{z}{L} = 1$,而$\frac{z}{x}$不存在 .

需特别指出的是:沿 Ox 轴负向 $L_1 = - i$, $\frac{z}{L_1} = \lim\limits_{|\Delta x| \to 0}$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{-\Delta x}$$

$= - \frac{z}{x}$, (这里假设 $f(x, y)$ 在 M_0 处的偏导数与方向导数都存在) .

类似地,沿方向 $L = j$ 的方向导数与$\frac{z}{y}$也不完全一样 .

【典型例题分析】

1. 函数、极限

例 8.1 求下列函数的定义域:

(1) $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4} + \arccos \frac{1}{x^2 + y^2}$;

(2) $u = \ln(z^2 - x^2 - y^2)$; (3) $u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x}}{\sqrt{3x - x^2 - y^2}}$.

解 (1) 应有$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \\ \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 1, \end{cases}$ 即 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$,

故定义域为圆环:$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

(2) 为使对数函数有意义,应有 $z^2 - x^2 - y^2 > 0$,即

$$|z| > \sqrt{x^2 + y^2}.$$

故定义域是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的上部及 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的下部:$|z| > \sqrt{x^2 + y^2}$.

(3) 要使原式有意义,需要保证分母不为 0,且根号内非负,即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \geq 0, \\ 3x - x^2 - y^2 > 0, \end{cases}$$

从而定义域为:$2x \leq x^2 + y^2 < 3x$.

例 8.2 表达式 $z = \int_0^1 (x + ty)^2 \mathrm{d}t$ 是否是 x, y 的二元函数?

解 因积分变量为 t,暂时将 x, y 看作常量.对 t 积分,得

$$z = \int_0^1 (x + ty)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 (x^2 + 2txy + y^2 t^2) \mathrm{d}t =$$

$$x^2 + xyt^2 \Big|_0^1 + \frac{y^2}{3} t^3 \Big|_0^1 = x^2 + xy + \frac{1}{3} y^2,$$

从而表达式 $z(x, y)$ 是 x, y 的二元函数.

例 8.3 设 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$,求 $f(x, y)$ 的表达式.

解法一 (换元法) 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$.从中解出 $x = \frac{u}{1 + v}$,

$y = \frac{uv}{1 + v}$,则

$$f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = f(u, v) = \frac{u^2}{(1 + v)^2} - \frac{u^2 v^2}{(1 + v)^2} = \frac{u^2 (1 - v)}{1 + v},$$

所以

$$f(x, y) = \frac{x^2 (1 - y)}{1 + y}.$$

解法二 (变形法) 将 x^2-y^2 变形为含 $x+y$ 与 $\frac{y}{x}$ 的式子.因

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

所以 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

例 8.4 **求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2y^2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)+xy\cos x-x^2y^2}{x}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

解(1) **方法** 1 **由于** $|2xy|\leq x^2+y^2$,**故有** $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$, " $\varepsilon>0$, **取** $\delta=2\varepsilon$, **则当** $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$**时**,**就有** $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,**所以** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

方法 2 **因** $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 1$,**而** $x\to 0$,**所以**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}x=0.$$

(2) 因$\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}$是初等函数,(0,1) 是连续点,从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{2-xy}{x^2+y^2}=\frac{2-xy}{x^2+y^2}\Big|_{(0,1)}=2.$$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}=$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2.$$

(4) 不妨设 $x>0, y>0$.因为 $x^2+y^2\geq 2xy>0$,则

$$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2},\quad 0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2y^2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2y^2},$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2y^2}=0$,由夹逼准则,得$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2y^2}=0$.

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)+xy\cos x-x^2y^2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}y+$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}y\cos x-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}xy^2=\lim\limits_{y\to 1}y+1-0=2.$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}=$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{\dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}}\left(\text{因为}\sin\frac{x^2+y^2}{2}\sim\frac{x^2+y^2}{2}\right)=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}=0\left(\text{因 }0\leq\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{2x^2y^2}{2|xy|}=|xy|\right).$$

小结:

(1) 由于二重极限定义中动点 $p(x,y)$ 趋向点 $p_0(x_0,y_0)$ 的方式是任意的,因而平面上的点 p 趋向于 p_0 的方式可有无穷多种,

比起一元函数的极限只有左、右两个单侧极限来说,要复杂得多.

(2) 求函数 $f(x,y)$ 的二重极限常用的方法有:

1°利用连续的定义及初等函数的连续性.如 $p_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

2°用二重极限的定义去验证函数的极限.

3°利用极限的性质(如四则运算,夹逼定理).

4°消去分子分母中极限为零的因子.

5°转化成一元函数的极限问题,利用一元函数中已知的极限.

例 8.5 讨论下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\dfrac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x^2)}{2x^5}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x^2}{2x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$ 不存在,故原极限不存在.

(2) 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

其值因 k 而异,故原极限不存在.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} (x+y)\dfrac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}2x\dfrac{1+4x}{1-4x}=0$,

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2\to 0}} (x+y)\dfrac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}(x+x^2)\dfrac{x^2+(x+x^2)^2}{x^2-(x+x^2)^2}=\lim\limits_{x\to 0}$
$\dfrac{-(1+x)(x^2+2x+2)}{x+2}=-1$,故原极限不存在.