

高等数学同步学习辅导

(上册)

(第2版)

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是高等数学的同步学习辅导书,书中每节均设6个栏目,包括以下内容:对高等数学的主要知识点进行梳理、归总;剖析重点、难点和易误点;选择有代表性的典型例题进行分析和求解,从而揭示高等数学的解题方法与技巧;配置了两级测试练习题,以提高学生基本运算、推理及应试的能力;附有测试题答案及提示,供学生自测。

本书可作为本科生学习高等数学的同步学习辅导书,也可作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导(上册)(第2版)/西北工业大学高等数学教研室编.
—2版.西安:西北工业大学出版社,2003.5

ISBN 7-5612-1366-2

. 高 西 高等数学-高等学校-教学参考资料
. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036120 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-8493844

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西向阳印务有限公司

开 本:850 mm × 1 168 mm 1/32

印 张:20.5

字 数:520 千字

版 次:2001 年 8 月第 1 版 2003 年 5 月第 2 版第 4 次印刷

印 数:18 001 ~ 24 000 册

定 价:25.00 元(上、下册) 本册定价:13.00 元

前 言

学习高等数学课程时,不少学生感到教学进度快。虽然上课能听懂,但独自解题时会有不少的困惑和疑虑,遇到灵活性较大、综合性较强的题,更是无从下手。我们编写这本同步学习辅导书,供学生课外阅读,以起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。

本书共分12章(与高等数学(同济·四版、五版)教材相配套),每章分为若干节(与教学次序相同),最末节为综合问题。每节分为“知识网络导学”、“重点难点剖析”、“典型例题分析”、“基础知识训练”、“能力提高测试”、“参考答案与提示”等栏目。

【知识网络导学】 概括本节所对应的教材内容中的知识要点,阐述扼要、清晰。

【重点难点剖析】 对于教与学中的“重点”、“难点”以及“易误点”进行整理提炼、着重剖析。

【典型例题分析】 讲究选题的布局,例题的典型性,注重解题思路的分析,对解题方法给出引导性的归纳总结。

【基础知识训练】 这部分是给学生配备的基础练习题,通过多种题型,检查学生掌握该节基础知识的程度。

【能力提高测试】 这部分也是练习题,题目具有一定的难度和综合性,以检查学生对知识的灵活运用能力,帮助学生对所学知识全面、深入地理解与掌握。

【参考答案与提示】 给出了每题的答案,并对较难的题给出了提示或简答。

全书试图给学生贯穿这样的思想:在学习中需要熟悉概念、性质,更需要明了其要素;需要多做几类练习题,更需要明了分析问

题的着眼点及解题的思路。引导学生学会将计算方法条理化,总结出规律性的东西,提高利用基本计算方法的思想去解决问题的能力。

本书可作为高等学校工科高等数学的同步教学参考书,也可作为考研应试者考前复习、强化训练的指导书。

参加本书编写工作的有西北工业大学数学与信息科学系陆全、肖亚兰、李云珠,符丽珍,王雪芳、杨月茜、刘华平、孟亚琴、刘哲、林伟、郑红婵等同志,全书由陆全、肖亚兰统纂定稿。

由于水平所限,书中错误及疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2001年4月

目 录

(上册)

第一章 函数与极限.....	1
§ 1 函数	1
§ 2 极限.....	10
§ 3 函数的连续性.....	36
§ 4 综合问题.....	48
第二章 导数与微分	59
§ 1 导数概念.....	59
§ 2 导数运算.....	66
§ 3 微分.....	80
§ 4 综合问题.....	84
第三章 中值定理与导数的应用	91
§ 1 利用洛必达法则求极限.....	91
§ 2 微分中值定理	105
§ 3 函数性态研究	128
§ 4 综合问题	148
第四章 不定积分.....	168
§ 1 不定积分的概念 换元积分法	168
§ 2 分部积分法	189

§ 3	三种特殊类型函数的积分	198
§ 4	综合问题	213
第五章	定积分	217
§ 1	定积分的概念 积分上限函数	217
§ 2	定积分与广义积分的计算	229
§ 3	综合问题	249
第六章	定积分的应用	255
§ 1	几何应用	255
§ 2	物理应用	272
§ 3	综合问题	280
第七章	空间解析几何与向量代数	287
§ 1	向量代数	287
§ 2	平面与空间直线	300
§ 3	曲面与空间曲线 二次曲面	319
§ 4	综合问题	330

(下 册)

第八章	多元函数微分法及其应用	337
§ 1	多元函数的微分法	337
§ 2	多元函数微分的应用	368
§ 3	综合问题	386

第九章	重积分	398
§ 1	二重积分	398
§ 2	三重积分	411
§ 3	重积分的应用	423
§ 4	综合问题	433
第十章	曲线积分与曲面积分	440
§ 1	曲线积分	440
§ 2	曲面积分	471
§ 3	场论初步	497
§ 4	综合问题	504
第十一章	无穷级数	516
§ 1	数项级数的性质	516
§ 2	数项级数的审敛法	524
§ 3	幂级数	542
§ 4	傅里叶级数	562
§ 5	综合问题	572
第十二章	常微分方程	578
§ 1	微分方程的基本概念	578
§ 2	一阶微分方程	583
§ 3	高阶微分方程	603
§ 4	常系数线性微分方程	613
§ 5	综合问题	629

第一章 函数与极限

§ 1 函 数

【知识网络导学】

函数
概念

函数,分段函数

反函数,复合函数

基本初等函数,初等函数

函数
性质

有界函数 $f(x)$ $x \in X \subset D$, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$

单调增加(减少)函数 $f(x)$ $x \in I \subset D$,

当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

奇(偶)函数 $f(x)$ $x \in [-a, a]$,

$f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$)

周期函数 $f(x)$ $x \in (-\infty, +\infty)$,

存在 $T > 0$, 使 $f(x+T) = f(x)$

【重点难点剖析】

(1) 确定函数的两个要素是定义域 D 和对应规律 f . 只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时, 它们才是同一个函数.

例如, $f_1(x) = \ln(1-x^2)$ 与 $g_1(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $(-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g_1(x) = \ln[(1+x)(1-x)] = \ln(1-x^2) = f_1(x)$. 又 $f_2(x) = \ln(x^2-1)$ 与 $g_2(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ 不是同一函数. 因

为 $f_2(x)$ 的定义域为 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g_2(x)$ 的定义域为 $D_2 = (1, +\infty)$, $D_1 \cap D_2 = (1, +\infty)$.

(2) 不是任意两个函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 都能构成复合函数 $y = f[g(x)]$. 例如, $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x - 2$ 就不能构成复合函数 $y = \sqrt{\cos x - 2}$. 因为 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $D_f = [0, +\infty)$ 与 $u = \cos x - 2$ 的值域 $R = [-3, -1]$ 的交集是空集. 一般地, 当函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u = g(x)$ 的值域 R 的交集 $D_f \cap R$ 不空时, 此两函数才能构成复合函数 $y = f[g(x)]$.

将复合函数分解为若干个简单函数, 这对函数的研究会带来方便. 复合函数的分解过程是由外层到内层, 逐层进行的. 例如, $y = \sin(e^{\arctan \sqrt{x}})$ 分解为

$$y = \sin u, \quad u = e^v, \quad v = \arctan w, \quad w = \sqrt{x}.$$

【典型例题分析】

例 1.1 (1) 求 $y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$ 的定义域.

(2) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 试求 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

解 (1) 由
$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0, \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \\ (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases}$$

解得函数的定义域(图 1-1)为 $D = [-4, -\pi) \cup (0, \pi/4]$.



图 1-1

(2) 函数 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域是 $f(x+a)$ 及

$f(x - a)$ 的定义域之交集,即

$$\begin{cases} 0 < x + a < 1, \\ 0 < x - a < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -a < x < 1 - a, \\ a < x < 1 + a. \end{cases}$$

1° 当 $a < 1 - a$, 即 $a < \frac{1}{2}$

时(图 1-2), 所求函数的定义域为 $[a, 1 - a]$;



图 1-2

2° 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数的定

义域为一个点, $x = \frac{1}{2}$;

3° 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为空集, 此时函数在 $(-\infty, +\infty)$

内处处无定义.

小结 求具体函数的定义域时, 应注意对常见函数的某些限制.

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 根式中负数不能开偶次方;

(3) 零和负数不能取对数;

(4) 三角函数、反三角函数的定义域. 如 $\arcsin x$ 中 $|x| \leq 1$,

$\tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

对于应用问题中的函数, 其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 下列函数中哪个是周期函数? 周期为多少?

(1) $y = \sin(3x + 2) + |\cos x|$; (2) $y = \cos x$.

解 (1) 因为 $\sin x$ 是以 2π 为周期, 所以 $\sin(3x + 2)$ 以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期. 又 $|\cos x|$ 以 π 为周期, 于是和函数 $y = \sin(3x + 2) + |\cos x|$ 是以 $T = 2\pi \left[\frac{2}{3} \text{ 和 } 1 \text{ 的最小公倍数} \right]$ 为周期的周期函数.

(2) 假设 $y = x \cos x$ 是周期函数, 周期为 $T (> 0)$, 则有

$$(x + T) \cos(x + T) = x \cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x = 0$, 得 $T \cos T = 0$. 令 $x = \frac{T}{2}$, 得

$$\left[T + \frac{T}{2} \right] \cos \left[T + \frac{T}{2} \right] = 0, \quad \left[T + \frac{T}{2} \right] \sin T = 0.$$

由于 $T > 0$, $T + \frac{T}{2} > 0$, 可得 T 应满足的方程组

$$\begin{cases} \sin T = 0, \\ \cos T = 0, \end{cases}$$

显然此方程组无解, 故函数 $y = x \cos x$ 不是周期函数.

小结

(1) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax + b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期;

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 T_1, T_2 为周期, 则 $f(x) \pm g(x)$ 以 T_1 和 T_2 的最小公倍数为周期.

例 1.3 证明函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上即有上界又有下界.

证 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在 $M > 0$, 对任意 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 所以 $f(x)$ 有上界 M 和下界 $-M$.

反之, 设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 和下界 K_2 , 即对任意的 $x \in X$, 有 $K_2 \leq f(x) \leq K_1$, 令 $K = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $|f(x)| \leq K, x \in X$, 即 $f(x)$ 在 X 上有界.

思考题 能否用“存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| < M, x \in X$ ”来定义函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 为什么?

例 1.4 设 $f(x)$ 为 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

分析 可按单调函数的定义证明, 注意利用函数的奇偶性.

证 对任意的 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 且 $-x_1 > -x_2$. 由题设单调性知 $f(-x_1) > f(-x_2)$. 又由题设, $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数, 有

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

于是

$$-f(x_1) > -f(x_2), \quad f(x_1) < f(x_2).$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

注 本章中对函数的单调性及有界性的判定侧重于明确概念. 在第三章中将介绍利用导数性质的判定法.

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ x^2, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad g(x) = \ln x$, 求 $f[g(x)]$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f[g(x)] &= f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 < \ln x < 1 \\ \ln^2 x, & 1 < \ln x < 2 \end{cases} = \\ & \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e] \quad (0, +\infty) \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2] \quad (0, +\infty) \end{cases} = \\ & \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e], \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2]. \end{cases} \end{aligned}$$

小结 对于分段函数的复合函数, 应注意自变量和中间变量的取值范围, 这是保证运算正确的一个重要环节. 初学者容易犯这样的错误(以上题为例),

$$f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln^2 x, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

其错误所在正是未正确地给出中间变量 $u = \ln x$ 的取值范围.

$$\text{例 1.6} \quad \text{求函数 } y = f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1, \\ x^2, & 1 < x < 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases} \text{ 的反函数.}$$

分析 求反函数的步骤为:

(1) 由式 $y = f(x)$ 中解出 $x = (y)$;

(2) 对换自变量与因变量的记号, 即可得反函数 $y = (x)$.

$$\text{解 由 } y = f(x), \text{ 解得 } x = \begin{cases} y, & - < y < 1, \\ \sqrt{y}, & 1 < y < 16, \\ \log_2 y, & 16 < y < +\infty. \end{cases}$$

将式中的 x 与 y 对换, 得 $y = f(x)$ 的反函数

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & - < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 < x < 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

例 1.7 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $= 40^\circ$ (图 1-3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

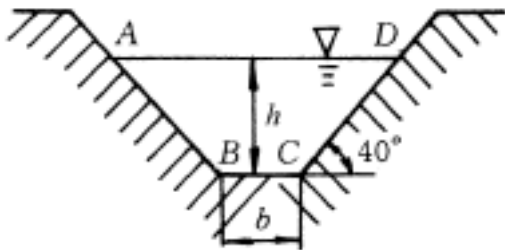


图 1-3

解 由题设知

$$AB = CD = \frac{h}{\sin 40^\circ}, \quad S_0 = \frac{h}{2} [2BC + 2h \cot 40^\circ],$$

解得

$$BC = \frac{S_0}{h} - h \cot 40^\circ,$$

故

$$L = AB + BC + CD = \frac{S_0}{h} + \frac{2h - h \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

由实际问题知, 此函数的定义域由下列不等式组确定

$$\begin{cases} AB > 0, \\ BC > 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} h > 0, \\ S_0/h - \cot 40^\circ \cdot h > 0, \end{cases}$$

即为

$$0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}.$$

【基础知识测试】

1.1 在下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的为_____.

(A) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$;

(B) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$;

(D) $f(x) = \ln[x(x - 1)]$, $g(x) = \ln x + \ln(x - 1)$.

1.2 设 $f(x) = \frac{1}{\lg(4 - x)} + \sqrt{36 - x^2}$, 则 $f(x)$ 的定义域为

_____, $f[f(-6)] =$ _____.

1.3 对于函数 $f(x) = x^2$, 能使邻域 $U(0, \quad)$ 中任一 x 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0, 2)$ 内的 _____ 所满足的关系式为

_____.

1.4 函数 $y = \tan x + \cos(5x + 1)$ 的周期为_____.

1.5 函数 $y = xe^{\cos x}$ 是_____.

(A) 奇函数;

(B) 偶函数;

(C) 单调函数;

(D) 有界函数.

1.6 证明 $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ 在 $(-\quad, -1)$ 及 $(-1, +\quad)$ 是单

调增加函数.

1.7 函数 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的反函数为_____.

1.8 下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$? 若能, 试写出复合函数的表示式, 定义域, 值域.

(1) $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = 2x - x^2$;

(2) $y = f(u) = \ln u$, $u = g(x) = \cos x - 2$;

(3) $y = f(u) = u^2 + u^3$, $u = g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

1.9 设 $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 求 } f[f(x)].$$

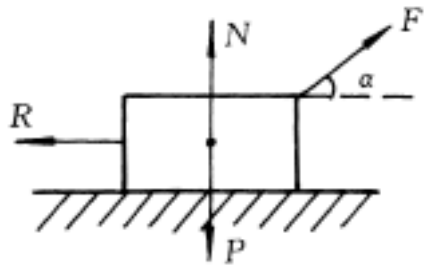


图 1-4

1.10 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ , 重量是 P . 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F , 使物体从静止开始移动 (图

1-4), 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

【能力提高测试】

1.11 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$ 且 $z/y=1 = x$. 求 $f(x)$ 及 z 的表示式.

1.12 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 对一切实数 x, y 适合 $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f(0) \neq 0$, 求证 $f(x) \geq 1$, 并利用该结果求 $f(2001)$.

1.13 设 $f(x)$ 是单调增加函数, 且 $g(x) = f(x) + h(x)$, 证明

$$g[g(x)] \leq f[f(x)] \leq h[h(x)].$$

1.14 判定下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x}; \quad (2) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1.15 设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形与 $x = a$, $x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证 $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

$$1.16 \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ x^2 + 1, & |x| \geq 1, \end{cases} \text{ 求 } f[f(x)].$$

1.17 当 a, b, c, d 满足什么条件时, 函数 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ad - bc \neq 0$)

bc 0) 与其反函数相同.

【参考答案与提示】

1.1 C .

1.2 $[-6, 3) \cup (3, 4)$, $f[f(-6)] = f(1) = \frac{1}{\lg 3} + \sqrt{35}$.

1.3 $\sqrt{2}$. 解答: 欲使 $f(x) = x^2 \in U(0, 2)$, 即 $-2 < x^2 < 2$, $|x| < \sqrt{2}$, 故只要取 $\sqrt{2}$ 作为邻域 $U(0,)$ 的半径, 就可使 $f(x) \in U(0, 2)$.

1.4 2 ; 1.5 A; 1.7 $\sinh x$.

1.8 (1) 能. $f[g(x)] = \sqrt{2x - x^2}$, 定义域为 $[0, 2]$, 值域为 $[0, 1]$;

(2) 不能.

(3) 能. $f[g(x)] = \begin{cases} 2, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

值域为 $\{0, 2\}$.

1.9 $f[(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

1.10 $F = \frac{\mu P}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$.

1.11 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, $z = \sqrt{y} + x - 1$. 提示: 将 $y = 1$, $z = x$ 代入 z 的表达式得 $f(\sqrt[3]{x} - 1) = x - 1$. 令 $t = \sqrt[3]{x} - 1$, 则 $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, $z = \sqrt{y} + x - 1$.

1.12 $f(2001) = 1$. 提示: 取 $y = 0$, 依题意有 $f(0) = f(x)f(0)$. 由 $f(0) \neq 0$ 及 x 的任意性得 $f(x) = 1$, 因此 $f(2001) = 1$.

1.13 提示: 由 $g(x) = f(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $g[g(x)]$

$f[g(x)] = f[f(x)]$, 再由 $f(x) = h(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $f[f(x)] = f[h(x)] = h[h(x)]$.

1.14 (1) 偶函数; (2) 奇函数.

1.15 $T = 2(b - a)$. 提示: 由题设有 $f(a + x) = f(a - x)$, $f(b + x) = f(b - x)$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a + (x - a)] = f[a - (x - a)] = \\ &= f[2a - x] = f[b + (2a - x - b)] = \\ &= f[b - (2a - x - b)] = f[x + 2(b - a)], \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 以 $T = 2(b - a)$ 为周期.

1.16 解:

$$f[f(x)] = \begin{cases} \sqrt{1 - f^2(x)}, & |f(x)| < 1, \\ f^2(x) + 1, & |f(x)| \geq 1, \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = |x|, & 0 < |x| < 1, \\ f[f(0)] = f(1) = 2, & x = 0, \\ (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

1.17 $a = -d$ 或 $\begin{cases} b = c = 0 \\ a = d \neq 0 \end{cases}$. 提示: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ 的反函数

为 $y = \frac{b - dx}{cx - a}$. 由 $\frac{b - dx}{cx - a} = \frac{ax + b}{cx + d}$, 得

$$(a + d)[cx^3 + (d - a)x - b] = 0,$$

故 $a = -d$ 或 $\begin{cases} b = c = 0, \\ a = d \neq 0. \end{cases}$

§ 2 极 限

【知识网络导学】

概 $\left\{ \begin{array}{l} \text{数列极限, 函数极限} \\ \text{无穷小, 无穷大; 无穷小的阶} \end{array} \right.$