21世纪高等学校数学辅导教材

高 等 数 学

全程 学·练·考

（同济大学·高等数学　下册　第五版）

谢崇远　曾　冰　张秀华　编著

东北大学出版社

·沈　阳·

前言

《高等数学全程学·练·考》（同济大学·第五版）是一本学习与复习大学高等数学的辅导教材．主要是为大学非数学专业本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者系统地复习“高等数学”内容，以求巩固提高所学知识，取得良好的考试成绩而编写的．在选材原则与教学要求上，该书根据原国家教委（现教育部）组织制定的《全国普通高等学校工科本科专业教学计划》中的“高等数学课程教学基本要求”以及教育部制定的2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中“高等数学”部分的考试要求确定编写内容．

本书是编著者根据多年的教学经验，依据对课程内容的研究和理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成．本书共分5章．第八章由张秀华编著，第九章，第十章由谢崇远编著，第十一章，第十二章由曾冰编著．车向凯教授对本书进行了认真的审阅，并提出了许多宝贵的意见，在此谨向他表示衷心的感谢．

本书的结构特点是，首先指出各章节教学要求、考研要求以及各章节内容的重要知识点、难点和考点，然后就高等数学的基本概念和基本方法，向读者提供大量有价值和具有典型性的例题、练习题以及

考试模拟题．

本书从国内外多种有关高等数学的教材及参考书中选取了众多具有代表性的典型例题，并精选了近十年来全国硕士研究生入学统考试题（包括数学一和数学二）．对这些典型例题进行详尽的解题思路分析和方法技巧上的指导．对容易出现错误的地方给予提醒．这对于读者深刻理解有关的基本概念，灵活运用基本方法，培养和提高综合分析问题和解决问题的能力诸多方面定会有极大的裨益．

同步练习题部分是对教材（同济大学·第五版）各章节后面的部分习题及每章的总习题的解答，便于读者学习教材时分析、对照和检查．

全书汇集了各部分章节的典型例题、练习题、全真模拟试题共近千道题．

本书的编写工作得到东北大学出版社有关同志的大力支持，他们为本书的编写提出了许多好的建议，并为全书的编审作出了大量出色的工作，这里向他们表示衷心的感谢．

限于编著者水平及撰稿时间仓促．书中如有疏漏之处，敬请读者批评指正．以便在本书再版时修改，使其更臻完善．

作者

2003年10月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

很多实际问题往往涉及多个变量相互联系、相互依赖、相互制约的情形，抽象为数学上的概念，就是多元函数。本章在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论中以二元函数的微分法为主，这些结果不难推广到n(＞2)元函数．

●一教学要求·考研要求●

（一）大学本科教学基本要求

1．理解多元函数的概念．

2．了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质．

3．理解偏导数和全微分的概念，了解全微分存在的必要条件和充分条件．

4．了解方向导数与梯度的概念及其计算方法．

5．掌握复合函数一阶偏导数的求法，会求复合函数的二阶偏导数．

6．会求隐函数的偏导数．

7．了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面与法线，并会求出它们的方程．

8．理解多元函数极值和条件极值的概念，会求二元函数的极值．了解求条件极值的拉格朗日乘数法，会求解一些较简单的最大值和最小值的应用问

☞ （二）全国硕士研究生入学统一考试数学中高等数学部分（数学一）的考试要求

1．理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义．

2．了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质．

3．理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性．

4．理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法．

5．掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法．

6．会用隐函数的求导法则．

7．了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程．

8．了解二元函数的二阶泰勒公式．

9．理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题．

●二知识点·难点·考点●

☞ （一）知识点

■1．二元函数的定义

设D是R2的一个非空子集，称映射f:D→R为定义在D上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

或

$$z=f(P),\ P\in D,$$

其中x,y称为自变量，z称为因变量，点集D称为该函数的定义域.

■2．二元函数的几何意义

二元函数在几何上通常表示空间曲面.

■3．二元函数的极限

设二元函数f(P)=f(x,y)的定义域为D,P0(x0,y0)是D的聚点．如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当点P(x,y)∈D∩■(P0,δ)时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数A为函数f(x,y)当(x,y)→(x0,y0)时的极限，记做

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记做

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

二元函数的极限也叫做二重极限.

■4．多元函数的连续性

定义　设二元函数f(P)=f(x,y)的定义域为D,P0(x0,y0)为D的聚点，且P0∈D，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

则称函数f(x,y)在点P0(x0,y0)连续.

该定义也可以写成ε—δ语言的形式.

定理（有界性与最大值最小值定理）　在有界闭区域D上的多元连续函数，必定在D上有界，且能取得它的最大值和最小值.

定理（介值定理）　在有界闭区域D上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

■5．偏导数

设函数z=f(x,y)在点（x0,y0）的某一邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数z=f(x,y)在点（x0,y0）处对x的偏导数．记做

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_x(x_0,y_0) \text{ 或 } f_x(x_0,y_0).$$

同样可以定义函数z=f(x,y)关于y的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

■6．混合偏导数与求导次序无关条件

如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域 D 内，必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

■7．函数的可微性

定义 如果函数z=f(x,y)在点（x,y）的全增量

$$\triangle z = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\triangle z = A\triangle x + B\triangle y + o(\rho),$$

其中 A，B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x，y 有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数z=f(x,y)在点（x,y）可微分，而A△x+B△y称为函数z=f(x,y)在点（x,y）的全微分，记作dz，即

$$dz = A\triangle x + B\triangle y.$$

定理（必要条件） 如果函数z=f(x,y)在点（x,y）可微分，则该函数在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

定理（充分条件） 如果函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续，则函数在该点可微分．

一般记dx=△z,dy=△y，则函数z=f(x,y)的全微分可写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

■8．多元复合函数的求导法则

（1）如果函数u=■(x,y),v=ψ(x,y)在点（x,y）处有偏导数，函数z=f(u,v)在对应点（u,v）处有连续偏导数，那么复合函数z=f[■(x,y),ψ(x,y)]在点（x,y）处有关于x或y偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

（2）设函数z=f(u,v,w)有连续偏导数，而函数u=■(x,y),v=ψ(x,y),w=ζ(x,y)偏导数存在，则复合函数z=f[■(x,y),ψ(x,y),ζ(x,y)]偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

（3）设函数z=f(u,x,y)具有连续偏导数，函数u=■(x,y)偏导数存在，则复合函数z=f[■(x,y),x,y]的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

（4）设z=f(u,v,w)具有连续偏导数，函数u=■(t),v=ψ(t),w=ζ(t)可微，则复合函数z=f[■(t),ψ(t),ζ(t)]可微，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

通常称它为全导数.

■9．隐函数求导公式

由方程F(x,y)=0确定的隐函数y=f(x)，且F(x,y)有连续的偏导数，Fy(x,y)≠0，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}.$$

由方程F(x,y,z)=0确定隐函数z=f(x,y)，且F(x,y,z)有连续的偏导数，Fz(x,y,z)≠0，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,\ y,\ z)}{F_z(x,\ y,\ z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,\ y,\ z)}{F_z(x,\ y,\ z)}.$$

■10．空间曲线的切线与法平面

（1）曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=w(t)\end{cases}$在$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$切线与法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)},$$

■'(t0)(x-x0)+ψ'(t0)(y-y0)+w'(t0)(z-z0)=0.

（2）曲线$\begin{cases}F(x,\ y,\ z)=0\\ G(x,\ y,\ z)=0\end{cases}$在$M_0$点切线的方向向量为：

s={Fx(M0)Fy(M0)Fz(M0)}×{Gx(M0)Gy(M0)Gz(M0)}.

■11．曲面的切平面与法线

（1）曲面F(x,y,z)=0在点M0(x0,y0,z0)的切平面与法线方程分别为

Fx(x0,y0,z0)(x-x0)+Fy(x0,y0,z0)(y-y0)+Fz(x0,y0,z0)(z-z0)=0,

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

（2）曲面z=f(x,y)在点M0(x0,y0,z0)的切平面与法线方程分别为

z-z0=fx(x0,y0)(x-x0)+fy(x0,y0)(y-y0),

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

■12．方向导数

（1）定义 设函数z=f(x,y)在点P0(x0,y0)的某个邻域U(P0)内有定义，自点P0引射线l,P(x0+tcosa,y0+tcosβ)为l上另一点，且P∈U(P0),｜PP0｜=t.

如果

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数f(x,y)在点P0沿方向l的方向导数，记做 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)}$.

（2）计算公式

函数z=f(x,y)（或u=f(x,y,z)）在可微点处沿任何方向l的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

$$\left(\text{或}\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right).$$

其中a为l与x轴正向的夹角（α,β,γ为方向l的方向角）.

■13．梯　度

设函数f(x,y)在平面区域D内具有一阶连续偏导数，则对于每一点

P0(x0,y0)∈D，向量

$$f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j}$$

称为函数f(x,y)在点P0(x0,y0)的梯度，记做gradf(x0,y0).

■14．多元函数的极值

(1) 定义 设函数z=f(x,y)在点（x0,y0）的某邻域内有定义，对于该邻域内异于（x0,y0）的点（x,y），都有f(x,y)＜f(x0,y0)，则称函数在点(x0,y0）有极大值f(x0,y0)；若都有f(x,y)＞f(x0,y0)，则称函数在点(x0,y0）有极小值f(x0,y0)．极大值、极小值统称为极值，使函数取得极值的点（x0,y0）称为极值点.

（2）函数在点（x0,y0）取极值的条件

定理（必要条件） 设函数z=f(x,y)在点（x0,y0）具有偏导数，且在点（x0,y0）处有极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0.$$

定理（充分条件） 设函数x=f(x,y)在点（x0,y0）的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又fx(x0,y0)=0,fy(x0,y0)=0，记

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,y_0)=C.$$

则f(x,y)在（x0,y0）处

①当AC-B2＞0时具有极值，且当A＜0时有极大值，当A＞0时有极小值；

②当AC-B2＜0时没有极值；

③当AC-B2=0时不能确定.

■15．多元函数极值的求法

（1）无条件极值

① 求驻点，即求方程组 $\begin{cases} f_x(x,\ y)=0 \\ f_y(x,\ y)=0 \end{cases}$ 的一切实数解．

② 对所得到的每一个驻点（x0,y0），求出相应的A,B,C.

③判定AC-B2的符号，由充分条件定理判定f(x0,y0)是否为极值、是极大值还是极小值.

（2）条件极值（拉格朗日乘数法）

求z=f(x,y)在条件■(x,y)=0下的极值.

①作辅助函数（拉格朗日函数）

L(x,y)=f(x,y)+λ ■ (x,y),

其中λ（称拉格朗日乘数）是待定常数.

②求可能极值点，解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,\ y) + \lambda\varphi_x(x,\ y) = 0 \\ L_y = f_y(x,\ y) + \lambda\varphi_y(x,\ y) = 0 \\ \varphi(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

消去λ解出x,y，则（x,y）是可能的极值点.

③判定上述点是否为极值点.

【注】 用拉格朗日乘数法解条件极值可推广到n元函数的情形．例如

求u=f(x,y,z)在约束条件■(x,y,z)=0,■(x,y,z)=0下的极值．可以作辅助函数

L(x,y,z)=f(x,y,z)+λ1■(x,y,z)+λ2■(x,y,z),

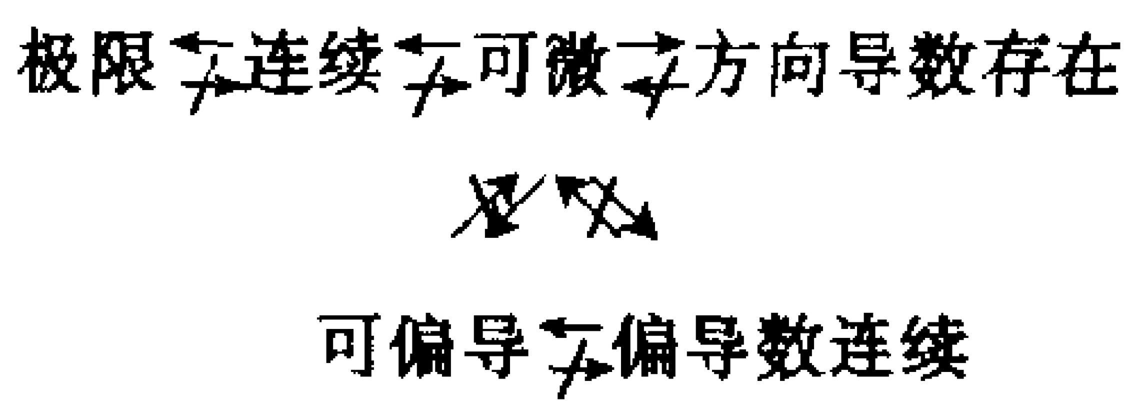
其中λ1,λ2是待定常数．求其一阶偏导数，并使之为零，然后与

■(x,y,z)=0及■(x,y,z)=0

联立求解，这样得出的方程组的解x,y,z就是可能为极值点的坐标.

如何确定所求点是否为极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

■16．极限、连续、可微、可导、方向导数的关系图



【注】“→”表示“一定成立”，“■”表示“不一定成立”.

☞ （二）难 点

■1．重极限与特殊方式极限的区别与联系

（1）当动点P以某一特殊方式趋于P0时，函数无极限，可断定函数当P趋于P0时，重极限不存在.

（2）当动点P以两个不同方式趋于P0时，函数有不同的极限值，可断定函数当P趋于P0时，重极限不存在.

（3）若先证明当P趋于P0时函数的重极限存在，再按某一特殊方式让P趋于P0求出函数的极限，则所求极限就是函数的重极限.

■2．极限、连续、可导、可微之间的关系及计算

参见（知识点）的第16条的关系图，具体可以见后面的例题部分．

■3．带有抽象函数的复合函数偏导数的计算

（1）在求“抽象”的复合函数的偏导数时，采用记号f＇i,f＇ij，其中i,j均为正整数．f＇i表示函数f对它的第i个中间变量（即f的第i个“位置”的变量）的偏导数．f″ij表示函数f＇i对它的第j个中间变量（即f＇i的第j个“位置”的变量）的偏导数．

（2）在求“抽象”的复合函数的二阶偏导数时，函数f＇i的变量关系图与函数f的变量关系图完全一致（即．f＇i与f的中间变量形式完全相同）．

■4．求隐函数的导数或偏导数

求隐函数的导数或偏导数，一般采用公式法和直接法．使用公式法时，应注意下面两点：

（1）所取的F应满足F=0;

（2）不论是求导数，还是求偏导数，公式均可归结成一句话：“负倒数”．例如：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$．

利用直接法求隐函数偏导数的步骤如下：

（1）把函数看成是中间变量，将方程两端分别对自变量求偏导数；

（2）从已求偏导数的方程中解出偏导数．

■5．求多元函数条件极值（拉格朗日乘数法）

依题意列出目标函数f，参见（知识点）15条（2）．

☞ （三）考　　点

1．多元函数表达式及定义域的求法

2．极限、连续、可导、可微概念与计算

3．偏导数全微分

（1）显函数给出的函数的偏导数或全微分．

（2）隐函数给出的函数的偏导数或全微分．

（3）复合函数的偏导数或全微分．

（4）求抽象函数的偏导数、二阶偏导数．

4．复合函数、隐函数的求导运算

5．方向导数、梯度概念与计算

6．几何应用

（1） 空 间 曲 线 的 切 线 与 法 平 面 方 程 .

（2）曲面的切平面与法线方程.

（3）利用相关知识的证明问题.

7．极值

（1）求函数的极值点、最大值点、最小值点.

（2）求函数的无条件极值.

（3）求条件极值（分析、构造目标函数）.

（4）利用条件极值证明不等式.

●三全程典型例题精析●

☞ （一）多元函数概念题

【例 8-1】 若 $f\left(x-y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，试求 $f(x,y)$的表达式.

【分析】为了求出f(x,y)，只要将已知等式的右端化成x-y与y/x的因子，故可做变量代换.

【解】 设 $u=x-y$，$v=\dfrac{y}{x}$，得 $x=\dfrac{u}{1-v}$，$y=\dfrac{uv}{1-v}$.

则
$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1-v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1-v}\right)^2=\frac{u^2(1+v)}{1-v},$$

因此
$$f(x,y)=\frac{x^2(1+y)}{1-y}\quad(y\neq 1).$$

【例8-2】 设u(x,y)=y2Φ(3x+2y)，若u(x,1/2)=x2，求u(x,y)的表达式.

【解】 由u(x,1/2)=x2得Φ(3x+1)=4x2.

设 $3x+1=w$，则 $x=\dfrac{w-1}{3}$，于是 $\Phi(w)=\dfrac{4}{9}(w-1)^2$

所以 Φ(3x+2y)=4/9(3x+2y-1)2,

故 $$u(x,y)=4/9y2(3x+2y-1)2.$$

【例8-3】 设f(x),g(x)是可微一元函数，且

$$\begin{cases} u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y), \\ u(x,0)=\sin 2x \\ u'_y(x,0)=0 \end{cases}$$

试求u(x,y)的表达式.

【分析】 由u(x,0)=sin2x可知，二元函数u(x,y)在y取常数0时的函数为一元函数sin2x. 由条件u'y(x,0)=0知，二元函数u(x,y)在点（x,0）处对y偏导数的值为0，求出复合函数f(2x+5y)+g(2x-5y)对y的偏导数为5f'(2x+5y)-5g'(2x-5y)，且在点（x,0）的表达式为5f'(2x)-5g'(2x). 所以u'y在（x,0）处的表达式是一个关于x的函数. 结合条件u'y(x,0)=0知 5f'(2x)-5g'(2x)=0，问题就容易求解了.

【解】 由题设条件知 $\begin{cases} u(x,0)=f(2x)+g(2x)=\sin 2x \\ u'_y(x,0)=5f'(2x)-5g'(2x)=0. \end{cases}$

从而有 $\begin{cases} f(x)+g(x)=\sin x \\ f'(x)-g'(x)=0. \end{cases}$

由f'(x)-g'(x)=0两边积分得

$$f(x)-g(x)=C,$$

其中C为任意常数，于是

$$f(x)=1/2(\sin x+C),\quad g(x)=1(\sin x-C).$$

所以 $u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$

$$=1/2[\sin(2x+5y)+C]+1/2[\sin(2x-5y)-C]$$

$$=1/2\sin(2x+5y)+1/2\sin(2x-5y)$$

$$=\sin 2x\cos 5y.$$

【例8-4】 求函数u=arcsin x/y2 +arcsin(1-y)的定义域.

【解】该函数的定义域应满足

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x}{y}\right|\leqslant 1 \\ |1-y|\leqslant 1. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} y^2 \geqslant x \\ 2 \geqslant y > 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y^2 \geqslant -x \\ 2 \geqslant y > 0. \end{cases}$$
这是由抛物线y2=x,y2=-x与直线y=2围成的曲边三角形（不包括原点）．

☞（二）重极限的计算和重极限不存在的判断

【例8-5】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$； (3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{(e^x-1)(\sqrt{xy+1}-1)}$； (5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=2.$

（2）利用当x→0时，1-cosx～1/2x2

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{2}.$$

（3）由2｜xy｜≤x2+y2得

$$0<\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}.$$

又
$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

（4）由恒等变换

$$\frac{x^2y}{(e^x-1)(\sqrt{xy+1}-1)}=\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\frac{x}{e^x-1}\cdot(\sqrt{xy+1}+1).$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{(e^x-1)(\sqrt{xy+1}-1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{e^x-1}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot 2=2.$$

（5）令x=ρcosθ,y=ρsinθ(ρ>0)得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta}{\rho}$$