高 等 数 学 全 程 测 试

主　编　刘艳杰　刘　满
主　审　王学理

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程测试/刘艳杰,刘满主编 .—沈阳:东北大学出版社,2002.9(2003.4 重印)
ISBN 7-81054-802-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 050088 号

出 版 者:东北大学出版社
(邮编:110004 地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)
出 版 人:李毓兴
印 刷 者:东北大学印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:850mm×1168mm 1/32
印 张:9.375
字 数:245 千字
出版时间:2002 年 9 月第 1 版
印刷时间:2003 年 4 月第 2 次印刷
责任编辑:刘宗玉
责任出版:杨华宁
封面设计:唐敏智

定 价:12.00 元

垂询电话:024—83687331(发行部) 024—83680265(传 真)
E-mail:neuph@neupress.com http://www.neupress.com

前 言

对于学习“少学时数学课”的部分本科专业的学生及大部分理工科专科学生来说，数学课似乎有更大的压力，大家往往视其为一块“难啃的骨头”。虽然学时有所减少，深度略有下降，但内容并没有太多的减少，涉猎面基本相同，故学习负担并未减轻多少。面对晦涩的叙述、抽象的概念，学子们确有望而生畏之感觉。

通过多年的数学教学实践，我们深深体会到，学好数学的关键是理清数学概念，掌握解题方法，而达到这一目的行之有效的措施就是大量演练习题。但数学习题数不胜数，而学生们又往往是课程多、时间紧，根本不可能做太多的习题。正是针对这种状况，我们准备编写一套少而精的测试题集，以辅助日常学习为出发点，以提高期末考试成绩为目的，追求的是用时少而效率高。经过大家的努力，这套“数学全程测试丛书”出版了，希望它能成为学生们学习数学课期间的良师益友。这套书的主要特点是：

1. 全部是测试题。精心选择的各类试题，既基本又典型，面广但不重复，循序渐进，重点突出，最终目标是让学生在尽可能短的时间内巩固基本概念、掌握解题方法。

2. 全程、同步测试。书的内容与教材基本一致，按教材的章节安排书的层次，全程、同步测试。“归类测试”是每章后的测试题，意在学到哪儿，就测试到哪儿，及时“消化”所学知识。期末测试则是专门为系统学习、全面巩固各科知识而准备的试卷若干套，其作用是不言而喻的。

3. 解答详尽。所有试题均给出详尽解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因；有些还结合解题过程对学习的思维方式予以指导，并提示解题技巧。

本书为丛书的“高等数学”部分，即《高等数学全程测试》。全书为分两大部分，共有测试题 51 套。第一部分为归类测试，设有九讲，每讲含三套题，要求每套 2 小时完成，每套题均含填空题、选择题 (单项)、计算题、综合题、证明题五种类型。第二部分为期末测试，分为一元函数微积分学和多元函数微积分学两讲，各有测试题 12 套，每套要求 2 小时完成。

本书主编为刘艳杰、刘满，参加编写的还有胡中盛、张晓萍、闫心丽、项荣武、李佐静。全书由刘艳杰、刘满统稿，王学理审定。

本书适用于上“少学时高等数学课”的本科生及理工专科生，对于“高等数学”任课老师，亦有很高的参考价值。

由于作者水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，还望同仁及读者不吝赐教。

作　者

2002 年 2 月

目　　录

第一部分　归类测试

第一讲　极限与导数

第一套

一、填空题　($3\times4=12$ 分)

1．$y=f(\sin 2x)$具有二阶导数，则 $y''=$______．

2．若 $y=\csc^3 x+2xe^y$，则$\frac{dy}{dx}=$______．

3．$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=$______．

4．曲线 $y=\frac{1}{x}$在点$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$处的切线方程为______．

二、选择题　($4\times3=12$ 分)

1．设在 x_0 处 $f(x)$可导，而 $g(x)$不可导，则在 x_0 处[　　]．

(A) $f(x)+g(x)$必不可导，而 $f(x)\cdot g(x)$未必不可导;

(B) $f(x)+g(x)$与 $f(x)\cdot g(x)$都可导;

(C) $f(x)+g(x)$可导且 $f(x)\cdot g(x)$不可导;

(D) $f(x)+g(x)$与 $f(x)\cdot g(x)$都不可导．

2．$f'(a)$存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$[　　]．

(A) $f'(a)$;　　(B) $f(a)-af'(a)$;

(C) $-af'(a)$;　　(D) $af'(a)$.

3. $f(x)$在$[a,b]$上连续是 $f(x)$在其上有最大、最小值的[　　].

(A) 必要条件;　　(B) 充分条件;

(C) 充分必要条件;　(D) 既非充分条件也非必要条件 .

三、计算题　($6\times5=30$ 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

2. 求 $y=x^{x\ln x}$当 $x=\mathrm{e}$, $\Delta x=\dfrac{1}{3}$时的微分 .

3. 选择 a, b 之值使当 $x\to-\infty$时, $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$为无穷小 .

4. 求$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}}$, 其中 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $c\neq1$.

5. 指出 $f(x)=\dfrac{\sin x\cdot\sqrt{1-2x+x^2}}{x(x-1)(x-3)}$的所有间断点, 并判别其类型 .

四、综合题　($8\times4=32$ 分)

1. 已知 $y=\dfrac{x^3}{x+1}$, 求 $y^{(n)}$ $(n>2,\ x\neq-1)$.

2. 已知$\begin{cases}x=3t^2+2t\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

3. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$的连续性 .

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x-1}, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

五、证明题　$(7\times 2=14$ 分$)$

1．曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)}=\sqrt{2}$．

2．若 $f(x)$ 对一切 x_1，x_2 满足等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

(1) 求 $f(0)$；

(2) 证明：$f(x)$ 在任意点 x_0 处连续．

第二套

一、填空题　$(3\times 4=12$ 分$)$

1．利用绝对值记号，将函数 $f(x)=\begin{cases} x & , x\leq 0 \\ 2x & , x>0 \end{cases}$，用一个式子表示出来，$f(x)=$______．

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ (a 为有限数)，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______．

3．$y=e^{-\frac{x}{y}}$，则 $dy=$______．

4．按近似公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ (当 $|\Delta x|$ 很小时) 有 $\sqrt{99}\approx$______．

二、选择题　$(4\times 3=12$ 分$)$

1．设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，则 $f^{(27)}(\pi)$ 的值等于[　　]．

(A) 0；　(B) $-\dfrac{1}{2^{27}}$；　(C) $2^{27}-\dfrac{1}{2^{27}}$；　(D) 2^{27}．

2．设 $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & , 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & , 1<x\leq 2 \end{cases}$，则在 $(0,2)$ 内适合 $f(2)-$

$f(0)=f'(\xi)\cdot 2$ 的 ξ 值[　　].

(A) 只有一个;　　(B) 不存在;

(C) 有两个;　　(D) 有三个.

3. 若 $y=f(x)$, 有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时, 在点 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是[　　].

(A) 与 Δx 等价无穷小;

(B) 与 Δx 同阶无穷小, 但不是等价无穷小;

(C) 比 Δx 高阶无穷小;

(D) 比 Δx 低阶无穷小.

三、计算题　(6×5 = 30 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

2. 方程 $y-x+\dfrac{1}{2}\sin x=0$ 确定的隐函数为 $x=\phi(y)$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi-1}{2}\right)}$.

3. 已知 $y=\sqrt{x}(x^2+1)^x$, 求 $\mathrm{d}y$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}$.

5. 设 $\begin{cases} x=f(t)-\pi, \\ y=f(\mathrm{e}^{3t}-1), \end{cases}$ 其中 f 可导, 且 $f'(0)\neq 0$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

四、综合题　(8×4 = 32 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases} (a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x}+c)/\sin x, & x\neq 0 \\ 10, & x=0 \end{cases}$, 确定 a, b, c 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 已知曲线的极坐标方程为 $r=2\cos\theta$, 求该曲线在极坐标点

$P\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$处的切线方程．

3．已知 $y=\frac{x^4}{1-x}$，求 $y^{(n)}(x)\ (n>4)$．

4．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+p)(x+q)}-x]=\frac{1}{2}$，求 $p+q$ 的值．

五、证明题　（7×2＝14 分）

1．证明：双曲线 $xy=a^2$ 的切线在两坐标轴之间的线段被切点平分．

2．设 $f(x)=g(x)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的邻域内连续，$g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $g'(x_0)=a$，$g(x_0)=0$，试证：$f(x)$ 在 x_0 处可导，并求 $f'(x_0)$．

第三套

一、填空题　（3×4＝12 分）

1．$f(x)=\frac{1}{1-e^{1/x^2}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的______间断点．

2．将 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $x-1$ 的幂展开到三阶 Taylor 公式为______．

3．$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1-2x^2}}$，则 $y'=$______．

4．设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $y=f(x)=x\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的微分为 $\mathrm{d}y=$______．

二、选择题　（4×3＝12 分）

1．$f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\frac{x^2-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-2)}$ 有［　　］个间断点．

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 0.

2. 若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则必有[　　].

(A) $a=2$，$b=8$;　　(B) $a=2$，$b=5$;

(C) $a=0$，$b=-8$;　(D) $a=2$，$b=-8$.

3. 若 $x\to 0$ 时，$f(x)$为无穷小，且 $f(x)$为 x^2 的高阶无穷小，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}=$[　　].

(A) 0;　(B) 1;　(C) ∞;　(D) $\dfrac{1}{2}$.

三、计算题　(6×5 = 30 分)

1. 设 $y=(x+2)(2x+3)^2(3x+4)^3$，求 $y^{(6)}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln(\sin x)}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

4. 已知 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

5. 已知 $r=a\theta$，其中(r,θ)为点(x,y)的极坐标，a 为常数，求微分 $\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}x$，并求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四、综合题　(8×4 = 32 分)

1. 考查 $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$在点 $x=0$ 处的可导性.

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n+1]{x}-\sqrt[n]{x})$ $(x>0,\ x\neq 1)$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，确定 a 值使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

4. 已知圆 $x^2+y^2=25$ 上$(y>0)$的点其纵坐标以 1.5cm/s 的速

度减小，求点的纵坐标为 4cm 时，横坐标的变化速率．

五、证明题 （$7\times2=14$ 分）

1．设对非零的 x，y 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=a$，试证：当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}$．

2．设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且非负，$f(0)=f(1)=0$，对任意 $\alpha\in(0,1)$，存在 $x_0\in[0,1]$使 $f(x_0)=f(x_0+\alpha)$成立，试证之．

第二讲　中值定理与导数的应用

第一套

一、填空题　(3×4 = 12 分)

1．按 $x+1$ 的幂展开多项式 $p(x)=x^3+3x^2-2x+4$，则 $p(x)=$______．

2．曲线 $y^2=x$ 在(0，0)点的曲率为 $k=$______．

3．$f(x)=x^3-3x$ 在区间[0，2]上的最小值是______．

4．$y=3x^4-4x^3$ 的拐点是______．

二、选择题　(4×3 = 12 分)

1．曲线 $y=x\arctan x$ 的图形[　　]．

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的；

(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凸的；

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内为凸，在 $(0,+\infty)$ 内是凹的；

(D) 在 $(-\infty,0)$ 内为凹，在 $(0,+\infty)$ 内为凸．

2．设 $a<0$，则当满足条件[　　]时函数 $f(x)=ax^3+3ax^2+8$ 为增函数．

(A) $x<-2$;　　(B) $-2<x<0$;

(C) $x>0$;　　(D) $x<-2$ 或 $x>0$.

3．$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值点的集合是[　　]．

(A) $\left\{\dfrac{1}{5},-1,1\right\}$;　　(B) $\left\{-1,\dfrac{1}{5}\right\}$;

(C) $\left\{\dfrac{1}{5},1\right\}$;　　(D) $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

三、计算题 $(6\times5=30$ 分$)$

1．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$．

2．求 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$ 的单调区间、凹凸区间、极值与拐点．

3．$f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有连续的二阶导数，且 $f'(a)\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(a)}-\dfrac{1}{(x-a)f'(a)}\right]$．

4．试确定 a，b 使 $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+2x$ 在 $x=-2$ 处取极值，在 $x=\xi(\xi\neq-2)$ 处使 $f'(\xi)=0$，但在 $x=\xi$ 处无极值．

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^x, & x>0\\ x+1, & x\leq0\end{cases}$，求函数的极值．

四、综合题 $(8\times4=32$ 分$)$

1．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可导，$f'(x)>k>0$（k 为常数），又 $f(a)<0$，试证：方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有惟一实根．

2．设可导函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3-3xy^2+2y^3=32$ 所确定，试讨论并求出 $f(x)$ 的极值．

3．证明不等式 $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$ $(0<x<1)$ 成立．

4．在椭圆 $4x^2+y^2=4$ 上任意点 $M(x,y)$（在第一象限）处的切线与 Ox 轴、Oy 轴分别交于 A 点和 B 点，(1) 试将该切线与两坐标轴围成的三角形面积 S 表示成 x 的函数；(2) 问 x 为何值时该三角形面积 S 最小，并求出此最小面积．

五、证明题 $(7\times2=14$ 分$)$

1．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在二阶连续导数，$f'_+(a)>0$，

$f(a)=f(b)=0$，证明：必存在 $\xi\in(a,b)$使 $f''(\xi)<0$.

2．设函数 $f(x)$满足 $xf''(x)-3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(1) 若 $f'(a)=0$ $(a\neq 0)$，$f(x)$在 $x=a$ 处是否取极值？为什么？

(2) 若 $f(x)$在 $x=0$ 处取极值，证明：$x=0$ 是 $f(x)$的极小值点．

第二套

一、填空题　(3×4 = 12 分)

1．曲线 $xy=1$ 在点(1，1)处的曲率半径 $R=$______．

2．$f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}=$______．

3．曲线 $y=e^{-x^2}$在区间______上是凸的．

4．曲线$\begin{cases}x=e^t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$在区间 $0\leq t\leq\pi$ 上的拐点是______．

二、选择题　(4×3 = 12 分)

1．已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取极小值 -2，则[　　]．

(A) $a=1$，$b=2$;　　(B) $a=0$，$b=-3$;

(C) $a=2$，$b=2$;　　(D) $a=1$，$b=1$.

2．$f(x)=e^{\sqrt{x}}$在$\left[\dfrac{1}{4},\sqrt{e}\right]$处的曲率为[　　]．

(A) $-\dfrac{3}{2}\sqrt{e}$;　　(B) $\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{(1+e)^3}}$;

(C) $4\sqrt{\dfrac{e}{(1+e)^3}}$;　　(D) $\dfrac{2\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^{3/2}}$.

3．已知 $f(x)=2kx^3-3kx^2-12kx$ 在区间 $[-1,2]$ 上是增函数，则 k 的取值范围是[　　]．

(A) $k<1$;　(B) $k>0$;　(C) $k<0$;　(D) k 为任何实数．

三、计算题　$(6\times5=30$ 分$)$

1．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$．

2．讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的单调性，凹凸性，极值与拐点．

3．求 $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值．

4．设函数 $y=\dfrac{4x+4}{x^2}-2$，试求函数在极值点处的曲率．

5．求曲线 $y=\ln x$ 的最大曲率．

四、综合题　$(8\times4=32$ 分$)$

1．在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上求一点，使过该点的切线被坐标轴所截的长度最短．

2．设曲线是由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给出，求曲率公式，当曲线极坐标方程为 $\rho=a\theta(a>0)$ 时，求该曲线的曲率．

3．设有一顶角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的正圆锥形容器内盛有 $b$kg 水，现往里灌水，从开始 $(t=0)$ 到 t 时刻灌水量为 at^2 L $(a, b$ 都是大于 0 的常数$)$，问何时水深 h 上升的速度最快．

4．试证：当 $x>0$ 时有 $\dfrac{1}{1+x}<\ln\dfrac{1+x}{x}<\dfrac{1}{x}$.

五、证明题　$(7\times2=14$ 分$)$

1．设 $f(x)$ 定义于 $[0,c]$，$f'(x)$ 存在且单调减小，$f(0)=0$，试证：当 $0\le a\le b\le a+b\le c$ 时恒有 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$．

2．设 $g(x)$ 有连续导数，求证：在 $g(x)$ 的任意两个相邻零点