高等数学期末测试

主　编　侯玉娟　韩廷武　潘东升　王学理
副主编　曲　如　全成万　杨逢建

东北大学出版社
沈　阳

侯玉娟　等 2004

图书在版编目（CIP）数据

高等数学期末测试 / 侯玉娟，韩廷武，潘东升，王学理主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.6

ISBN 7-81054-949-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①侯… ②韩… ③潘… ④王…　Ⅲ.高等数学—高等院校—教学参考资料　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 090306 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市第六印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：12.25

字　　数：314 千字

出版时间：2004 年 6 月第 1 版

印刷时间：2004 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：孟　颖　刘宗玉

责任校对：冬　雨

封面设计：唐敏智

责任出版：秦　力

定　　价：15.00 元

前　言

对于理工科大学新生来说,“高等数学”是一段崎岖的山路，而期末考试就是设在这山路终点的关口．大家都想顺利通过，并考出好的成绩，但越是临近期末考试，越有茫然无措之感：如何复习才能更有效呢？试题难度如何？数量多少？都有什么题型呢？

针对学生们的疑惑，我们认为尽早接触模拟试题，并系统演练是最好的复习方法，既能熟悉试卷，又能发现问题，十分有助于期末成绩的提高．正是出于这些考虑，我们精心编写了这本“高等数学期末测试”．全书包括期末测试题三十套，分一、二两部分，各十五套．两个部分前十套均是参照有关理工科院校考试真题而编撰的期末考试模拟试题，它们与真题十分接近；后五套是作者精心编写的测试题，难度比真题稍大．本书所编试题范围与现行理工科高等数学教材完全一致，第一部分的内容包括：一元函数的极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何；第二部分内容包括：多元函数微分学及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数和常微分方程．

期末测试题留有适当的空白，读者可直接作为试卷来做，书中给出全部详细解答，个别题目还给出多种解法、证法，读者自己做后可对照答案，找出差距与不足，以便更快进步．

从题型上看，几乎每套题都包括填空题、选择题、计算题、综合题与证明题；从内容上看，涵盖了“高等数学”的所有重要内容；从解题方法上看，在答案中向读者介绍了许多方便快捷的解题手段．相信通过认真阅读本书，读者会对“高等数学”整个教学内容有一个更好的掌握，解题能力和分析问题、解决问题的能力也会有一个很大的提高，学生们所关心的期末考试也会有一个满意的成绩．这一切并不仅仅是作者的美好愿望，而且也是他们多年教学实践多次验证了的事实．

为了体现近代数学思想，并与其他科目标识一致，本书中向量用 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示，多元函数取极限用 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ 表示，特此声明．

参加本书编写的还有岳晓宁、王竞波、石有印．还要特别感谢凌正权老师提供的大量原始资料，它已成为编写本书的重要基本素材．

由于篇幅所限，本书未对“高等数学”进行系统的总结，敬请读者见谅．

编　者

2004 年 3 月 8 日

目　　录

第一部分　上学期期末测试试题

第一套

一、填空题(3 分×4 = 12 分)

1．设 $f(x)$处处连续，且 $f(2)=3$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}f\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=$______．

2．函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 在闭区间______单调减．

3．$\int\tan^2 x\mathrm{d}x=$ ______．

4．已知 $a=3i-j-2k$，$b=i+2j-k$，则 a，b 夹角的余弦为______．

二、选择题(4 分×4 = 16 分)

1．$f(x)=x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是(　　)．

(A) 有界函数；　(B) 单调函数；　(C) 奇函数；　(D) 偶函数．

2．设 $f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$，则 $f'(1)$的值等于(　　)．

(A) $101!$；　(B) $-100!$；　(C) $-\dfrac{101!}{100}$；　(D) $\dfrac{100!}{99}$．

3．定积分$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}|\sin 2x|\mathrm{d}x$ 的值是(　　)．

(A) $\dfrac{1}{2}$；　(B) $\dfrac{3}{2}$；　(C) $-\dfrac{1}{2}$；　(D) $-\dfrac{3}{2}$．

4．直线$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系是(　　)．

(A) 平行，但直线不在平面上；　(B) 直线在平面上；

(C) 垂直相交；　(D) 相交但不垂直．

三、计算题(6 分×4 = 36 分)

1．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1-x^2}{x^2(\mathrm{e}^{x^2}-1)}$．

2．设 $y=\cos^2 x\ln x$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$．

3．设 $y=y(x)$由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$所确定($x\neq0$，$y\neq0$)，求 $\mathrm{d}y$.

4．设$\begin{cases} x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u, \\ y=\int_0^t \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 其中 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

5．求$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

6．计算$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

四、(6 分)　设 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln(1+x), & -1<x\leq0, \end{cases}$ 求 $f(x)$的间断点，并说明间断点的所属类型 .

五、(8 分)　**求过点**$(2, 0, -3)$，**且与直线**$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$**垂直的平面方程**．

六、(8 分)　**求由曲线** $y=x^3$ **与** $y=2x-x^2$ **所围成的平面图形的面积**．

七、(8 分)　**曲线** $y=\frac{1}{3}x^6\ (x>0)$**上哪一点的法线在** y **轴上的截距为最小**？

八、(6 分)　**设** $f(x)$**在**$[a, b]$**上连续，在**(a, b)**内二阶可导，且** $f(a)=f(b)\geq 0$，**又有** $f(c)<0\ (a<c<b)$．**试证：在**(a, b)**内至少存在两点** ξ_1，ξ_2，**使** $f''(\xi_1)>0$，$f''(\xi_2)>0$．

第二套

一、填空题(3 分×4 = 12 分)

1．若 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^{a}\cos\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处右连续，则 a______ .

2．$\displaystyle\int\left[\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right]^{2}\mathrm{d}x=$______ .

3．若 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续，则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{3x}^{\sin x^{2}} f(t)\mathrm{d}t=$______ .

4．设$|a+b|=|a-b|$，$a=(3,-5,8)$，$b=(-1,1,z)$，则 $z=$______ .

二、选择题(4 分×4 = 16 分)

1．方程 $x^{3}-3x+1=0$ 在区间$(0,1)$内(　　) .

(A) 无实根；　(B) 有惟一实根；　(C) 有两个实根；　(D) 有三个实根 .

2．已知 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^{2}}{1+t^{2}},\\ y=\dfrac{2t}{1+t^{2}},\end{cases}$ 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$为(　　) .

(A) $\dfrac{t^{2}-1}{2t}$；　(B) $\dfrac{1-t^{2}}{2t}$；　(C) $\dfrac{x^{2}-1}{2x}$；　(D) $\dfrac{2t}{t^{2}-1}$.

3．半径为 R 的半球水池已装满水，要将水全部吸出水池，需做功 W 为(　　) .

(A)$\displaystyle\int_{0}^{R}\pi(R^{2}-y^{2})\mathrm{d}y$；　(B)$\displaystyle\int_{0}^{R}\pi y^{2}\mathrm{d}y$；

(C)$\displaystyle\int_{0}^{R}\pi y(R^{2}-y^{2})\mathrm{d}y$；　(D)$\displaystyle\int_{0}^{R}\pi y^{2}\cdot y\mathrm{d}y$.

4．设向量 $a\neq 0$，$b\neq 0$，指出以下结论中的正确结论为(　　) .

(A) $a\times b=0$是 a 与 b 垂直的充要条件；

(B) $a\cdot b=0$ 是 a 与 b 平行的充要条件；

(C) a 与 b 的对应分量成比例是 a 与 b 平行的充要条件；

(D) 若 $a=\lambda b$ (λ 是实数)，则 $a\cdot b=0$.

三、计算题(7 分×5 = 35 分)

1．计算数列极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+2}}-1\right)$.

2．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{y}+xy=\mathrm{e}$ 所确定，求 $y''(0)$ ．

3． $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}$ ．

4．求不定积分 $\int x^{2}\arctan x\,\mathrm{d}x$ ．

5．计算 $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^{3}x-\sin^{5}x}\,\mathrm{d}x$ ．

四、(6 分)　求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程．

五、(6 分)　**讨论函数** $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0\end{cases}$ **在** $x=0$ **处的连续性与可导性**.

六、(10 分)　**求由** $y=2-x^2$，$x=\sqrt{y}$，$y=-x$ **在上半平面围成图形的面积**.

七、(9 分)　**在椭圆** $4x^2+y^2=4$ **上任意点** $M(x, y)$ (**点** M **在第一象限**)**处的切线与** Ox **轴**，Oy **轴分别交于** A **和** B **点**. (1) **试将该切线与两坐标轴围成的三角形的面积** S **表示为** x **的函数**；(2) **问** x **为何值时**，**三角形面积** S **最小**？**并求出此最小面积**.

八、(6 分)　**设函数** $f(x)$**是二阶可导函数**，$x=a$，$x=b$ $(a<b)$**是方程** $f(x)=0$**的相邻两个根**，**又存在** $c\in(a, b)$，**使** $f(c)<0$. **试证**：(1) **在** (a, b)**内** $f(x)<0$；(2) **在** (a, b)**内至少存在一点** η，**使** $f''(\eta)>0$.

第三套

一、填空题(4 分×3 = 12 分)

1. $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$ ______ .

2. d ______ $= \left[\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{x} \right] dx^2$.

3. 与三点 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$, $M_3(3, 1, 3)$决定的平面垂直的单位向量 $a_0 =$ ______ .

二、选择题(4 分×3 = 12 分)

1. 当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)$是 x^2 的(　　) .

(A) 高阶无穷小;　　(B) 同阶无穷小, 但不是等价无穷小;

(C) 低阶无穷小;　　(D) 等价无穷小 .

2. 若 $g(x) = x^c e^{2x}$, $f(x) = \int_0^x e^{2t}\sqrt{3t^2+1}\,dt$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则必有(　　) .

(A) $c = 0$;　　(B) $c = -1$;　　(C) $c = 1$;　　(D) $c = 2$.

3. 已知$|a| = 1$, $|b| = \sqrt{2}$, $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{4}$, 则$|a + b| =$ (　　) .

(A) $\sqrt{5}$;　　(B) $1 + \sqrt{2}$;　　(C) 2;　　(D) 1 .

三、计算题(7 分×5 = 35 分)

1. 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

2. $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$, 求 y' .

3. **设函数**$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1), \end{cases}$ **求**$\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

4. **求不定积分**$\displaystyle\int \frac{d x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

5. **计算**$\displaystyle\int_a^{2a} x\ln(x+a)\,d x$.

四、(9 **分**) **设** $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| > 1, \\ -x, & |x| \le 1, \end{cases}$**研究** $f(x)$**的连续性与可导性**.

五、(9 分)　已知直线 $L:\begin{cases} x-y=3, \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ 及点 $P_0(2,1,-2)$，求点 P_0 到直线 L 的距离．

六、(9 分)　已知曲边三角形由抛物线 $y^2=2x$ 及直线 $x=0$，$y=1$ 所围成．求：(1) 曲边三角形的面积；(2) 该曲边三角形绕 $y=0$ 旋转所成旋转体的体积．

七、(8 分)　设可导函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3-3xy^2+2y^3=32$ 所确定，试讨论并求出 $f(x)$ 的极值．

八、(6 分)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[2,4]$ 上有连续导数，且 $f(2)=f(4)=0$．证明：

$$\max_{2\le x\le 4}|f'(x)|\ge\left|\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

第四套

一、填空题(4 分×3 = 12 分)

1. $\int 3x\sqrt{1-x^2}\,dx =$ ______ .

2. 曲线 $y = xe^{3x}$ 的拐点坐标是______ .

3. 已知向量 $a=(2,1,-1)$，若向量 b 与向量 a 平行，且 $a\cdot b=3$，则 $b=$ ______ .

二、选择题(4 分×3 = 12 分)

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\cos x + x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ x^2+1, & x\geq 0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$的(　　) .

(A) 可去间断点;　(B) 跳跃间断点;　(C) 振荡间断点;　(D) 连续点 .

2. 曲线 $y=\ln x$，$y=\ln a$，$y=\ln b$ $(0<a<b)$及 y 轴所围图形的面积为 S，则 S 等于(　　) .

(A) $\int_{\ln a}^{\ln b}\ln x\,dx$;　(B) $\int_{e^a}^{e^b} e^x\,dx$;　(C) $\int_{\ln a}^{\ln b} e^y\,dy$;　(D) $\int_{e^b}^{e^a}\ln x\,dx$.

3. 若函数 $y=f(x)$有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，在点 $x=x_0$ 处的微分 dy 是(　　) .

(A) 与 Δx 等价无穷小;　(B) 与 Δx 同阶无穷小，但不是等价无穷小;

(C) 比 Δx 高阶无穷小;　(D) 比 Δx 低阶无穷小 .

三、计算题(6 分×5 = 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(ax+e^{bx})^{1/x}$，($a$，$b$ 为正常数) .

2. 已知 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y' .

3. **设函数** $x=x(t)$**由方程** $t-\int_1^{x-t} e^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ **所确定，求**$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}$.

4. **求不定积分**$\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

5. **计算**$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

四、(8 **分**)　**求** a，b **之值，使**$\lim\limits_{n\to\infty}(5n-\sqrt{an^2+bn+1})=2$.

五、(8 **分**)　**试证：当** $x\geq 0$ **时，有不等式** $xe^{-x}\leq\ln(1+x)$.

六、(8 分)　已知平面 Π 为 $3x-y+2z-5=0$ 和直线 L: $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ 的交点为 M_0，在平面 Π 上求过点 M_0，且和直线 L 垂直的直线方程．

七、(8 分)　试在曲线段 $y=x^2\ (0<x<8)$ 上求一点 M 的坐标，使得由曲线在 M 点的切线与直线 $x=8$，$y=0$ 所围成的三角形面积最大．

八、(8 分)　设有一容器，上半段是底半径为 1m，高为 2m 的圆柱体，下半段是半径为 1m 的半球体，盛满水，求将其中水全部吸出所需做的功．

九、(6 分)　已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$，当 x 在 $(0, 1)$ 内时有交点，试证：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$．