

高等数学考研题典

王学理 编著

东北大学出版社

© 王学理 2002

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学考研题典 / 王学理编著 .— 沈阳 : 东北大学出版社 ,
2002.9 (2003.6 重印)

ISBN 7-81054-702-8

I . 高... II . 王... III . 高等数学—研究生—入学考试—试题
IV . O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 054275 号

出 版 者 : 东北大学出版社

地址 : 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编 : 110004

电话 : 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真 : 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail : neuph @ neupress.com

http : // www . neupress . com

印 刷 者 : 东北大学印刷厂

发 行 者 : 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸 : 140mm × 203mm

印 张 : 17.875

字 数 : 465 千字

出版时间 : 2002 年 9 月第 1 版

印刷时间 : 2003 年 6 月第 2 次印刷

责任编辑 : 刘宗玉

责任校对 : 张 力

封面设计 : 唐敏智

责任出版 : 杨华宁

定 价 : 22.00 元

© 王学理 2002

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学考研题典 / 王学理编著 .— 沈阳 : 东北大学出版社 ,
2002.9 (2003.6 重印)

ISBN 7-81054-702-8

I . 高... II . 王... III . 高等数学—研究生—入学考试—试题
IV . O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 054275 号

出 版 者 : 东北大学出版社

地址 : 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编 : 110004

电话 : 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真 : 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail : neuph @ neupress.com

http : // www . neupress . com

印 刷 者 : 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者 : 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸 : 140mm × 203mm

印 张 : 17.875

字 数 : 465 千字

出版时间 : 2002 年 9 月第 1 版

印刷时间 : 2003 年 6 月第 2 次印刷

责任编辑 : 刘宗玉

责任校对 : 张 力

封面设计 : 唐敏智

责任出版 : 杨华宁

定 价 : 22.00 元

前 言

高等数学作为“考研数学”的最主要组成部分（占60%以上），其重要性是不言而喻的。如果高等数学考得不好，数学成绩肯定要被大打折扣。因此，考生们都非常重视高等数学的学习。其办法大致是：参加考研辅导班、记大量的笔记、做大量的习题，但结果往往是搞得身心疲惫，考试成绩还不理想。

作者认为，在读的本科生读懂了教科书，做完老师留的作业，期末考试顺利通过，这只是有了一个高等数学的基础。以这种水平去“考研”肯定是不行的。那么，应该寻求一条什么样的途径、采用什么方法才能如愿以偿呢？

第一步是将教科书重新细读，做完课后全部习题，这个工作量并不太大，但水平已有提高。

第二步是请名师指点，也可以参加一个不是徒有虚名的考研辅导班，找一本好的辅导书，做一些归类性质的提高题，在解题方法和技巧上下功夫，加深对高等数学内容的理解，悟出其中的道理。

第三步是做一些模拟试题。

从2003年开始，考研科目中“数学”以满分150分记入总成绩，而值得注意的是，现在很难找到一本适合考生们演练的“习题集”。因为市面上流行的各类“考研辅导”、“真题全解”等等，往往是习题紧接答案，读这样的书几乎是在看“习题解答”，读者得不到什么锻炼，因为考题中是不给答案的，实际上连提示也没有。参加考研辅导班是可以的，但找到适合于自己的水平、能切实提高应试能力的考研辅导班也非易事，其结果经常是不但没得到什么辅导，宝贵的时间还浪费了。

综上所述，加之对多年讲授高等数学、辅导考研数学的体会、经验的思考，作者认为：对于已经学完高等数学课的学生来说，能有一本囊括各种类型高等数学问题的试题集，并认真去做，定能有收获。但对于书中试题数量多少、难易程度的选择，则是十分困难的，既要有难度达到提高能力的目的，又不能搞题海战术浪费十分宝贵的时间，同时书后还应附以详解以备考生在必要时参考。

正是出于这些考虑，作者编写出这本《高等数学考研题典》，希望它能助广大考生一臂之力。本书分十二讲，共精选各类测试题 1016 道，这些题目绝大部分来自历年全国“考研”试题和各高校考研试题。每讲均有内容提要，意在用较少的篇幅，叙述重要定义、结论，予以宏观指导。之后是归类试题，即按内容分类，每类由若干道试题组成。精心选择的各类试题，突出了典型性，面广且不重复，既循序渐进、又重点突出，大部分题均有一定份量，最终目的是让学生在尽可能短的时间内巩固基本概念、掌握解题方法、提高应试能力。所有试题均给出详细解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因。还向读者介绍了许多方便快捷的解题方法，有的还给出多种解法，这些方法是作者多年教学经验的总结，它会大大加强读者对高等数学的理解并有助于水平的提高。

建议考生们独立完成三分之二试题的演练。实在做不出的时候再看试题详解。最后通读一遍试题详解，找出自己的不足之处。

最后再一次提醒读者，少看习题解答类的书籍。要靠自己看书、做题，悟出高等数学的真谛，解题能力有质的飞跃。

本书是作者从事几十年高等数学教学、研究心血的结晶。今天把它奉献给立志考研的学子们，希望它能成为你们打开成功之门的一把金钥匙。

王学理

2002 年 6 月

目 录

第一部分	归类测试	1
第一章	一元函数的极限	1
第二章	一元函数的连续性与可导性	13
第三章	微分中值定理与导数的应用	25
第四章	不定积分	35
第五章	定积分与广义积分	44
第六章	定积分应用	58
第七章	向量代数与空间解析几何	67
第八章	多元函数微分学	78
第九章	重积分的运算及其应用	91
第十章	曲线积分与曲面积分	105
第十一章	无穷级数	126
第十二章	常微分方程	142
第二部分	习题详解	156
第一章	一元函数的极限	156
第二章	一元函数的连续性与可导性	184
第三章	微分中值定理与导数的应用	212
第四章	不定积分	240
第五章	定积分与广义积分	269
第六章	定积分应用	309

第七章	向量代数与空间解析几何.....	332
第八章	多元函数微分学.....	361
第九章	重积分的运算及其应用.....	399
第十章	曲线积分与曲面积分.....	429
第十一章	无穷级数.....	486
第十二章	常微分方程.....	519

第一部分 分类试题

第一章 一元函数的极限

一、内容提要

(一) 主要定义

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a), 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

极限不存在时, 说 $\{x_n\}$ 发散.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

4. $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. 无穷大量简称为无穷大.

5. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$, 且 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称

$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$ ，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小，记作 $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ，当 $C = 1$ 时，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小，记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 。

(二) 重要结论

1. 若 $\lim f(x) = A$ ， $\lim g(x) = B$ ，则有

$$\lim [f(x) + g(x)] = A + B, \quad \lim [f(x)g(x)] = AB$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

2. 极限存在准则

I. 单调有界数列必有极限。

II. 若 $x_n \leq y_n \leq z_n$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 。

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小。

4. $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$ ，此处 $\lim \alpha(x) = 0$ 。

5. 洛比达 (L'Hospital) 法则

$\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ (或 ∞)， $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ ，则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

7. 若在 $\cup(\hat{x}, \delta)$ 内 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$)，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，那么 $A \geq 0$ ($A \leq 0$)。

8. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，且 $A > 0$ ($A < 0$)，则必有 $\cup(\hat{x}, \delta)$ 使在此领域中 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)。

9. 若极限存在, 则其值必然惟一.

10. 任何有界数列都有收敛的子数列.

11. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

12. 若 $\lim \varphi(x) = \infty$, 则 $\lim \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)} \right]^{\varphi(x)} = e$.

13. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$.

注 以上三条中的 $\varphi(x)$ 不等于 0.

14. $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

16. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$).

注 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ 立刻得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

17. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = \lim A(x) = \lim B(x) = 0$, 且 $\alpha(x) \sim A(x)$, $\beta(x) \sim B(x)$, 则有

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{A(x)}{B(x)}$$

和 $\lim [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim [1 + A(x)]^{\frac{1}{A(x)}} = e^{\lim \frac{A(x)}{A(x)}}$

注 分母 $\beta(x), B(x)$ 不能取 0.

18. 不为零的无穷小的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小.

19. 若 $a_0 b_0 \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c} \right)^{bx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

21. 设 $\lim \varphi(x) = 1$, $\lim \psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导, 且

$\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ 存在, 则

$$\lim \varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \exp \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

22. 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha = o(\beta)$ 且 $\beta \sim \tilde{\beta}$, 则 $\alpha + \beta \sim \tilde{\beta}$.

23. 设 $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ 均为 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小, 且 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 又

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = C$ ($C \neq -1$), 则

$$\alpha + \beta \sim \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$$

注 $C \neq 1$ 时, $\alpha - \beta \sim \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$.

24. 设 $f(x)$ 在 a, b 上连续, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left[a + \frac{k}{n}(b-a) \right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

25. $\lim u(x)^{v(x)}$ 呈 1^∞ 型, 则

$$\lim u(x)^{v(x)} = \exp \lim [u(x) - 1]v(x)$$

26. $\lim \varphi(x) = 0, \lim \psi(x) = 0$, 则

$$\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}} = e^{\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}$$

若 $\varphi(x) \sim \tilde{\varphi}(x), \psi(x) \sim \tilde{\psi}(x)$, 又有

$$\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}} = e^{\lim \frac{\tilde{\varphi}(x)}{\tilde{\psi}(x)}}$$

27. $\lim \varphi(x) = 0, \lim \omega(x) = \infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)}$$

二、归类试题

(一) 用代数方法求极限

0001 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$.

0002 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}{(n+1) + 2(n+2) + 3(n+3) + \dots + n(n+n)}$.

0003 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$.

0004 设有 $\{x_n\}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

0005 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + n}$.

0006 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

0007 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \dots \sqrt{3}}}}$ (共有 n 个根号).

0008 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(5x+6)^{50}}$.

0009 求 $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

0010 设 $|x| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})]$.

(二) 利用定义与准则研讨极限

0011 利用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x} = 0$.

0012 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

0013 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n + \frac{1}{n}} \right]$.

0014 设 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, ...

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}} \quad (n \text{ 个根号}), \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

0015 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

0016 设 $-1 < x_0 < 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

0017 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

0018 设 $a > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$.

0019 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$, 其中 $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

0020 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $a > 0$, $x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

0021 利用不等式 $\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}$.

0022 设 α, β 为正实数, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$ 的值.

0023 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{n + \frac{1}{k}}$.

0024 设 $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(三) 重要极限的使用(主要是第二个重要极限)

0025 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1}$.

0026 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

0027 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

0028 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$.

0029 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{2n}$.

0030 设 $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

0031 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x \tan x}$.

0032 设 a, b, c, h, k 为常数, a, c 不是零, 试证

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c} \right)^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}, \text{ 并以此求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+8}{3x+2} \right)^{5x+4} .$$

(四) 等价替换的使用

0033 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

0034 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan 2x} - \sqrt{1-\tan 2x})(1-\cos x^2)}{x^2(e^x-1)\sin 3x \cdot \ln(1+5x)}$.

0035 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \tan^2 3x]^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

0036 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}$.

0037 $a > 0, a \neq 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

$$0038 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{x^2} \sin^{3/2} t dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt}.$$

0039 已知当 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 + \alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 求 α 的值.

0040 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (e^{2x} - 1)(\tan 3x)(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})]^{1/(2^{3x} - 1)(1 - \cos 5x)}$$

$$0041 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\sqrt{4+x^3} - 2}.$$

$$0042 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{\sin^4 2x}.$$

$$0043 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x \sin x}.$$

0044 设 a, b 为常数, 且 $a > 0$, 求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{ax}) \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)$$

$$0045 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

$$0046 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}.$$

$$0047 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x \cdot (e^{\arcsin 3x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{(1 - \cos x) \cdot \ln(1 + \sin 2x)}.$$

$$0048 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\arctan^3 3x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - 1)]^{1/(e^{x^3} - 1)(1 - \cos x)}.$$

(五) 极限式中常数的确定

$$0049 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b\right) = 0, \text{ 求 } a, b \text{ 的值}.$$

$$0050 \quad \text{设} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = l, \text{ 求 } a \text{ 和 } l \text{ 的值}.$$

0051 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$, 求 a, b 的值.

0052 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$, 求 a, b 的值 ($a > 0$).

0053 试确定 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c$ ($c \neq 0$).

0054 试确定 a, b 的值, 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时 x 的 5 阶无穷小, 并求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5}$.

0055 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 求 a, b 的值.

0056 求 c 值, 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c t e^{2t} dt$.

0057 设 $f(x) = \frac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, p, q 取何值时, $f(x)$ 为无穷小? 又 p, q 取何值时, $f(x)$ 为无穷大量?

0058 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{f(x)}{\sin x}} - 1}{x(e^x - 1)} = A$ ($A \neq 0$), 求 a 和 b , 使 $f(x) \sim ax^b$.

0059 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{ax^2 + bx + c} - kx - m] = 0$ ($a > 0$), 求 k, m , 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - kx - m)$ 的值.

(六) 洛比达 (L'Hospital) 法则

0060 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

0061 求 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$.

0062 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ ($a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$).

0063 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$).

0064 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^p} dt}{x^q}$ ($p, q > 0$).

0065 $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right]^{\frac{1}{x^2}}$.

0066 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^n$ (n 为自然数).

0067 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

0068 设 $a < 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3}$.

0069 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x \sin^4 x}$.

0070 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2e^{2x} + 2e^x}{x \sin^2 x}$.

0071 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x \sin x)_x^{\frac{1}{2}}$.

0072 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)}{h}$$

(七) 求极限的其他方法

0073 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$.

0074 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

0075 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $f''(0)=4$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,