高等数学解题指南

北京大学数学科学学院

周建莹　李正元　编

北 京 大 学 出 版 社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指南/周建莹,李正元编. - 北京:北京大学出版社, 2002.10

ISBN 7-301-05853-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①周… ②李… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2002)**第** 064390 **号**

书　　　名: 高等数学解题指南
著作责任者: 周建莹　李正元　编
责 任 编 辑: 刘　勇
标 准 书 号: ISBN 7-301-05853-5/O·0550
出　版　者: 北京大学出版社
地　　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话: 邮购部 62757515　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京大学印刷厂
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
890×1240　A5 开本　22.625 印张　610 千字
2002 年 10 月第 1 版　2003 年 5 月第 2 次印刷
印　　　数: 4001-8000 册
定　　　价: 25.00 元

内 容 简 介

本书是理工医农各专业的大学生学习"高等数学"课的辅导教材。两位作者在北京大学从事高等数学教学四十年,具有丰富的教学经验,深知学生的疑难与困惑。他们围绕着该课的基本内容与教学要求,根据学生初学时遇到的难点与易犯的错误,通过精心挑选的典型例题进行分析、讲解与评注,给出归纳和总结,以帮助学生更好地理解"高等数学"课的内容,掌握其基本理论和正确的解题方法与技巧。全书共分 13 章,内容包括:一元微积分,空间解析几何,多元微积分,无穷级数(包含傅里叶级数)与常微分方程等。在每一节中,设有基本理论内容提要,典型例题的讲解与分析,以及供学生自己做的练习题等部分,书末附有练习题的答案。为了适应不同程度学生的要求,本书还较系统地讲解了适量的综合题和一定难度的例题(以* 号标出),这些内容不仅可以开拓学生的解题思路,帮助学生学好高等数学,而且还可作为考研复习之用。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校理工医农各专业大学生学习高等数学的学习辅导书,也可供成人教育、自学考试的学生阅读,对青年教师及报考研究生的大学生来说,本书也是较好的教学参考书和考研复习用书。

作 者 简 介

周建莹　北京大学数学科学学院教授。1960 年毕业于北京大学数学力学系，从事高等数学教学工作四十年，具有丰富的教学经验；周建莹教授对高等数学中的典型例题和解题方法有系统的归纳、总结，编写的教材有《高等数学(生化医农类)》(1985 年第 1 版，2002 年修订版，北京大学出版社)、《高等数学简明教程》(北京大学出版社，1999)。

李正元　北京大学数学科学学院教授。1963 年毕业于北京大学数学力学系，从事高等数学、数学分析等课程教学工作四十年，具有丰富的教学经验；李正元教授对高等数学解题思路、方法与技巧有深入研究、系统归纳和总结，编写的教材和学习辅导书有《高等数学》、《数学复习全书》、《数学分析》、《数学分析习题集》。

目　录

第一章　微积分的准备知识

§ 1　函　　数

内 容 提 要

1. **函数概念**

函数的定义　设在某一过程中有两个变量 x 与 y，若对变量 x 在其变化域 X 中的每一个值，依照某一对应规则，变量 y 都有惟一确定的一个值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时称 x 为自变量，称 y 为因变量．自变量 x 的变化域 X 称为函数的定义域，而相应的因变量 y 的变化域 Y 称为函数的值域．

函数的对应规则与定义域是函数定义中的两个要素．

2. **函数的图形**

函数 $y = f(x)\ (x \in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in X\}.$$

一般情形下，它是 Oxy 平面上的一条或几条曲线，任何一条平行于 y 轴的直线，与曲线 $y = f(x)$ 至多相交于一点．

3. **函数的几种常见特性**

有界性　若存在一个实数 M，使对一切 $x \in X$，都有

$$f(x) \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界的，并称 M 为 $f(x)$ 的一个上界．

类似地，若存在一个实数 N，使对一切 $x \in X$，都有

$$f(x) \geq N,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有下界的，并称 N 是 $f(x)$ 的一个下界．

既有上界又有下界的函数称为有界函数．即若存在两个实数 M 与 N，使得

$$N \leq f(x) \leq M, \quad \text{对任意的 } x \in X, \tag{1.1}$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数．函数有界性的一个等价的定义是：若存在一个大于零的常数 K，使

$$|f(x)| \leq K, \quad \text{对任意的 } x \in X,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数, 并称常数 K 为 $f(x)$ 在 X 上的一个界.

奇偶性 设有函数 $y=f(x), x \in X$, 其中 X 关于原点对称(即: 若 $x \in X$, 则 $-x \in X$).

若 $f(-x)=-f(x)$, 对任意的 $x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$, 对任意的 $x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于 y 轴.

单调性 对任给的 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调上升的(单调下降的). 在 X 上单调上升与单调下降统称为在 X 上单调. 单调上升(下降)也称为单调递增(递减). 又若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调上升或严格递增(严格单调下降或严格递减).

周期性 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若存在常数 $l > 0$, 对任给的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+l)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 为 $f(x)$ 的一个周期. 周期函数一定有无穷多个周期, 若其中有一个最小的正数 T, 则称 T 为周期函数的最小周期, 简称周期.

4. 复合函数

设有函数

$$y = f(u), \ u \in U; \quad u = \varphi(x), \ x \in X, \ \text{值域为 } U',$$

若 $U' \subset U$, 则在 X 上确定了一个新函数

$$y = f[\varphi(x)], \quad x \in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数, u 称为中间变量.

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y. 若对 Y 中每一个 y 值, 都可由方程 $y=f(x)$ 惟一地确定出一个 x 的值, 则得到一个定义在 Y 上的函数, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Y.$$

易知, 严格单调函数必有反函数, 并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)$ $(x \in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ 的图形在同一个坐标系中是相同的.

习惯上, 为了强调对应规律 f^{-1}, 并将因变量仍记作 y, 通常将反函数写为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)$ $(x \in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

6. **基本初等函数、初等函数**

基本初等函数是指以下六类函数: 常数函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数, 称为初等函数.

典型例题分析

1. 将函数 $y=2x+|2-x|$ 用分段函数表示.

解 根据绝对值的定义, 当 $x\leq 2$ 时, $|2-x|=2-x$; 当 $x>2$ 时, $|2-x|=x-2$, 所以

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leq 2, \\ 3x-2, & x>2. \end{cases}$$

2. 形如 $f(x)=kx+l$(其中 k,l 为常数) 的函数称为线性函数. 问: 线性函数 $f(x)$ 在哪些区间上有界? 在哪些区间上无界? $f(x)$ 是否是奇函数? 是否是偶函数? $f(x)$ 何时单调上升? 何时单调下降? 并求: $f(\sin x)$, $\sin(f(x))$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f(f(\sin x))$ 的表达式. 其中哪些是线性函数?

答 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上都是有界函数, 因为当 $x\in[a,b]$ 时, 有

$$|f(x)|\leq|k|\cdot|x|+|l|\leq|k|\cdot m+|l|,$$

其中 $$m=\max(|a|,|b|).$$

$|k|m+|l|$ 是一个确定的常数, 故上述不等式说明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的. $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上都是无界函数. 当 $k\neq 0$ 且 $l=0$ 时 $f(x)$ 是奇函数; 当 $k=0$ 时 $f(x)$ 是偶函数; 当 $kl\neq 0$ 时 $f(x)$ 既非奇函数, 也非偶函数. 当 $k\geq 0$ 时 $f(x)$ 单调上升, 当 $k\leq 0$ 时 $f(x)$ 单调下降.

$$\begin{aligned} f(\sin x)&=k\sin x+l, \\ \sin(f(x))&=\sin(kx+l), \\ f(f(x))&=f(kx+l)=k(kx+l)+l \\ &=k^2x+(k+1)l, \\ f(f(f(x)))&=f(k^2x+(k+1)l)=k[k^2x+(k+1)l]+l \end{aligned}$$