

# 高等数学解题指南

北京大学数学科学学院  
周建莹 李正元 编

北京大学出版社  
· 北 京 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指南/周建莹,李正元编.-北京:北京大学出版社,  
2002.10

ISBN 7-301-05853-5

.高... .周... 李... .高等数学-高等学校-解题  
.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064390 号

书 名: 高等数学解题指南

著作责任者: 周建莹 李正元 编

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05853-5/O · 0550

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62757515 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890× 1240 A5 开本 22.625 印张 610 千字

2002 年 10 月第 1 版 2003 年 5 月第 2 次印刷

印 数: 4001- 8000 册

定 价: 25.00 元

## 内 容 简 介

本书是理工医农各专业的大学学习“高等数学”课的辅导教材。两位作者在北京大学从事高等数学教学四十年，具有丰富的教学经验，深知学生的疑难与困惑。他们围绕该课的基本内容与教学要求，根据学生初学时遇到的难点与易犯的错误，通过精心挑选的典型例题进行分析、讲解与评注，给出归纳和总结，以帮助学生更好地理解“高等数学”课的内容，掌握其基本理论和正确的解题方法与技巧。全书共分13章，内容包括：一元微积分，空间解析几何，多元微积分，无穷级数(包含傅里叶级数)与常微分方程等。在每一节中，设有基本理论内容提要，典型例题的讲解与分析，以及供学生自己做的练习题等部分，书末附有练习题的答案。为了适应不同程度学生的要求，本书还较系统地讲解了适量的综合题和一定难度的例题(以\*号标出)，这些内容不仅可以开拓学生的解题思路，帮助学生学好高等数学，而且还可作为考研复习之用。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校理工医农各专业大学学习高等数学的学习辅导书，也可供成人教育、自学考试的学生阅读，对青年教师及报考研究生的大学生来说，本书也是较好的教学参考书和考研复习用书。

## 作者简介

周建莹 北京大学数学科学学院教授。1960年毕业于北京大学数学力学系,从事高等数学教学工作四十年,具有丰富的教学经验;周建莹教授对高等数学中的典型例题和解题方法有系统的归纳、总结,编写的教材有《高等数学(生化医农类)》(1985年第1版,2002年修订版,北京大学出版社)、《高等数学简明教程》(北京大学出版社,1999)。

李正元 北京大学数学科学学院教授。1963年毕业于北京大学数学力学系,从事高等数学、数学分析等课程教学工作四十年,具有丰富的教学经验;李正元教授对高等数学解题思路、方法与技巧有深入研究、系统归纳和总结,编写的教材和学习辅导书有《高等数学》、《数学复习全书》、《数学分析》、《数学分析习题集》。

# 目 录

第一章 微积分的准备知识 .....	(1)
§ 1 函数 .....	(1)
内容提要 .....	(1)
典型例题分析 .....	(3)
本节小结 .....	(8)
练习题 1.1 .....	(9)
§ 2 极限的概念、性质和若干求极限的方法 .....	(9)
内容提要 .....	(9)
典型例题分析 .....	(13)
本节小结 .....	(33)
练习题 1.2 .....	(34)
§ 3 函数的连续性, 连续函数的性质 .....	(34)
内容提要 .....	(34)
典型例题分析 .....	(36)
本节小结 .....	(43)
练习题 1.3 .....	(43)
第二章 微商(导数)与微分 .....	(45)
§ 1 微商概念及其运算 .....	(45)
内容提要 .....	(45)
典型例题分析 .....	(48)
本节小结 .....	(67)
练习题 2.1 .....	(67)
§ 2 微分的概念及其运算 .....	(69)
内容提要 .....	(69)
典型例题分析 .....	(72)
本节小结 .....	(76)



本节小结 .....	(174)
练习题 4.1 .....	(174)
§ 2 不定积分的两个计算法则——换元积分法 与分部积分法 .....	(175)
内容提要 .....	(175)
典型例题分析 .....	(178)
本节小结 .....	(189)
练习题 4.2 .....	(190)
§ 3 几类可求积的初等函数的积分法 .....	(190)
内容提要 .....	(190)
典型例题分析 .....	(195)
本节小结 .....	(205)
练习题 4.3 .....	(206)
<b>第五章 定积分</b> .....	(207)
§ 1 定积分的概念与性质 .....	(207)
内容提要 .....	(207)
典型例题分析 .....	(210)
本节小结 .....	(217)
练习题 5.1 .....	(218)
§ 2 定积分的换元积分法与分部积分法, 变上限的 定积分 .....	(219)
内容提要 .....	(219)
典型例题分析 .....	(221)
本节小结 .....	(252)
练习题 5.2 .....	(252)
§ 3 定积分的应用与广义积分 .....	(253)
内容提要 .....	(253)
典型例题分析 .....	(259)
本节小结 .....	(277)
练习题 5.3 .....	(278)
<b>第六章 空间解析几何</b> .....	(280)

§ 1	空间直角坐标系, 向量及其运算 .....	(280)
	内容提要 .....	(280)
	典型例题分析 .....	(284)
	本节小结 .....	(291)
	练习题 6.1 .....	(291)
§ 2	直线、平面与二次曲面 .....	(292)
	内容提要 .....	(292)
	典型例题分析 .....	(296)
	本节小结 .....	(312)
	练习题 6.2 .....	(312)
<b>第七章</b>	<b>多元函数微分学 .....</b>	<b>(314)</b>
§ 1	多元函数的概念、极限与连续性 .....	(314)
	内容提要 .....	(314)
	典型例题分析 .....	(316)
	练习题 7.1 .....	(322)
§ 2	偏微商与全微分 .....	(323)
	内容提要 .....	(323)
	典型例题分析 .....	(325)
	练习题 7.2 .....	(335)
§ 3	方向导数与梯度 .....	(336)
	内容提要 .....	(336)
	典型例题分析 .....	(338)
	本节小结 .....	(340)
	练习题 7.3 .....	(341)
§ 4	复合函数与隐函数的微分法 .....	(342)
	内容提要 .....	(342)
	典型例题分析 .....	(344)
	本节小结 .....	(352)
	练习题 7.4 .....	(353)
§ 5	高阶偏导数, 复合函数及隐函数的高阶偏导数 .....	(354)
	内容提要 .....	(354)

	典型例题分析 .....	( 356)
	本节小结 .....	( 364)
	练习题 7.5 .....	( 365)
§ 6	空间曲线的切线与法平面, 曲面的切平面 与法线 .....	( 366)
	内容提要 .....	( 366)
	典型例题分析 .....	( 368)
	本节小结 .....	( 372)
	练习题 7.6 .....	( 372)
§ 7	多元函数微分学在极值问题中的应用 .....	( 373)
	内容提要 .....	( 373)
	典型例题分析 .....	( 375)
	本节小结 .....	( 381)
	练习题 7.7 .....	( 381)
*§ 8	二元函数的泰勒公式 .....	( 382)
	内容提要 .....	( 382)
	典型例题分析 .....	( 384)
	练习题 7.8 .....	( 385)
第八章	重积分 .....	( 386)
§ 1	二重积分 .....	( 386)
	内容提要 .....	( 386)
	典型例题分析 .....	( 390)
	本节小结 .....	( 401)
	练习题 8.1 .....	( 403)
§ 2	三重积分 .....	( 405)
	内容提要 .....	( 405)
	典型例题分析 .....	( 409)
	本节小结 .....	( 420)
	练习题 8.2 .....	( 421)
§ 3	重积分的应用 .....	( 423)
	内容提要 .....	( 423)

典型例题分析 .....	(424)
本节小结 .....	(435)
练习题 8.3 .....	(435)
<b>第九章 曲线积分与格林公式 .....</b>	<b>(438)</b>
§ 1 曲线积分的概念与计算 .....	(438)
内容提要 .....	(438)
典型例题分析 .....	(441)
本节小结 .....	(450)
练习题 9.1 .....	(451)
§ 2 格林公式及其应用 .....	(453)
内容提要 .....	(453)
典型例题分析 .....	(454)
本节小结 .....	(459)
练习题 9.2 .....	(460)
§ 3 第二型曲线积分与路径无关问题, $Pdx + Qdy$ 的原函数问题 .....	(461)
内容提要 .....	(461)
典型例题分析 .....	(464)
本节小结 .....	(470)
练习题 9.3 .....	(471)
<b>第十章 曲面积分, 高斯公式与斯托克斯公式 .....</b>	<b>(472)</b>
§ 1 曲面积分的概念与计算 .....	(472)
内容提要 .....	(472)
典型例题分析 .....	(475)
本节小结 .....	(486)
练习题 10.1 .....	(486)
§ 2 高斯公式, 向量场的通量与散度 .....	(488)
内容提要 .....	(488)
典型例题分析 .....	(489)
本节小结 .....	(491)
练习题 10.2 .....	(492)

§ 3	斯托克斯公式, 向量场的环量与旋度 .....	(493)
	内容提要 .....	(493)
	典型例题分析 .....	(495)
	本节小结 .....	(499)
	练习题 10.3 .....	(499)
§ 4	算子符号 $\nabla$ 及其性质, 散度与旋度计算 .....	(500)
	内容提要 .....	(500)
	典型例题分析 .....	(501)
	练习题 10.4 .....	(503)
<b>第十一章 无穷级数 .....</b>		<b>(504)</b>
§ 1	级数的基本概念与性质 .....	(504)
	内容提要 .....	(504)
	典型例题分析 .....	(505)
	本节小结 .....	(508)
	练习题 11.1 .....	(508)
§ 2	级数的收敛性判别法 .....	(509)
	内容提要 .....	(509)
	典型例题分析 .....	(511)
	本节小结 .....	(524)
	练习题 11.2 .....	(524)
§ 3	幂级数的收敛域与幂级数的性质 .....	(526)
	内容提要 .....	(526)
	典型例题分析 .....	(528)
	本节小结 .....	(536)
	练习题 11.3 .....	(538)
§ 4	函数的幂级数展开 .....	(538)
	内容提要 .....	(538)
	典型例题分析 .....	(541)
	本节小结 .....	(547)
	练习题 11.4 .....	(548)
§ 5	傅里叶级数 .....	(548)

内容提要 .....	( 548)
典型例题分析 .....	( 553)
练习题 11.5 .....	( 561)
* § 6 函数项级数 .....	( 562)
内容提要 .....	( 562)
典型例题分析 .....	( 564)
本节小结 .....	( 570)
练习题 11.6 .....	( 571)
* 第十二章 含参变量的积分, 傅里叶变换 与傅里叶积分 .....	( 572)
§ 1 含参变量的常义积分所确定的函数及其性质 .....	( 572)
内容提要 .....	( 572)
典型例题分析 .....	( 573)
练习题 12.1 .....	( 577)
§ 2 含参变量的无穷积分的一致收敛性 .....	( 577)
内容提要 .....	( 577)
典型例题分析 .....	( 579)
本节小结 .....	( 581)
练习题 12.2 .....	( 581)
§ 3 含参变量的无穷积分的性质 .....	( 581)
内容提要 .....	( 581)
典型例题分析 .....	( 582)
本节小结 .....	( 589)
练习题 12.3 .....	( 589)
§ 4 函数与 B 函数 .....	( 590)
内容提要 .....	( 590)
典型例题分析 .....	( 591)
本节小结 .....	( 594)
练习题 12.4 .....	( 594)
§ 5 傅里叶变换与傅里叶积分的定义, 计算傅里叶变换 与作频谱图 .....	( 594)

内容提要 .....	( 594)
典型例题分析 .....	( 597)
本节小结 .....	( 601)
练习题 12.5 .....	( 601)
§ 6 傅氏积分的收敛性与函数的傅氏积分展开 .....	( 601)
内容提要 .....	( 601)
典型例题分析 .....	( 602)
练习题 12.6 .....	( 604)
§ 7 傅氏变换的性质 .....	( 604)
内容提要 .....	( 604)
典型例题分析 .....	( 606)
本节小结 .....	( 611)
练习题 12.7 .....	( 611)
<b>第十三章 常微分方程 .....</b>	<b>( 612)</b>
§ 1 基本概念 .....	( 612)
内容提要 .....	( 612)
典型例题分析 .....	( 613)
练习题 13.1 .....	( 614)
§ 2 一阶微分方程的解法 .....	( 614)
内容提要 .....	( 614)
典型例题分析 .....	( 618)
本节小结 .....	( 626)
练习题 13.2 .....	( 626)
§ 3 二阶线性微分方程 .....	( 628)
内容提要 .....	( 628)
典型例题分析 .....	( 632)
本节小结 .....	( 643)
练习题 13.3 .....	( 644)
§ 4 几种特殊类型的高阶微分方程 .....	( 645)
内容提要 .....	( 645)
典型例题分析 .....	( 646)

练习题 13.4 .....	(647)
§ 5 含有两个未知函数的常系数线性微分方程组 .....	(647)
内容提要 .....	(647)
典型例题分析 .....	(648)
练习题 13.5 .....	(649)
§ 6 微分方程的应用 .....	(649)
内容提要 .....	(649)
典型例题分析 .....	(649)
练习题 13.6 .....	(656)
练习题答案与提示 .....	(658)

# 第一章 微积分的准备知识

## § 1 函 数

### 内 容 提 要

#### 1. 函数概念

函数的定义 设在某一过程中有两个变量  $x$  与  $y$ , 若对变量  $x$  在其变化域  $X$  中的每一个值, 依照某一对应规则, 变量  $y$  都有惟一确定的一个值与之对应, 我们就称变量  $y$  是变量  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时称  $x$  为自变量, 称  $y$  为因变量. 自变量  $x$  的变化域  $X$  称为函数的定义域, 而相应的因变量  $y$  的变化域  $Y$  称为函数的值域.

函数的对应规则与定义域是函数定义中的两个要素.

#### 2. 函数的图形

函数  $y = f(x)$  ( $x \in X$ ) 的图形是指点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}.$$

一般情形下, 它是  $Oxy$  平面上的一条或几条曲线, 任何一条平行于  $y$  轴的直线, 与曲线  $y = f(x)$  至多相交于一点.

#### 3. 函数的几种常见特性

有界性 若存在一个实数  $M$ , 使对一切  $x \in X$ , 都有

$$f(x) \leq M,$$

则称函数  $f(x)$  在  $X$  上是有上界的, 并称  $M$  为  $f(x)$  的一个上界.

类似地, 若存在一个实数  $N$ , 使对一切  $x \in X$ , 都有

$$f(x) \geq N,$$

则称  $f(x)$  在  $X$  上是有下界的, 并称  $N$  是  $f(x)$  的一个下界.

既有上界又有下界的函数称为有界函数. 即若存在两个实数  $M$  与  $N$ , 使得

$$N \leq f(x) \leq M, \quad \text{对任意的 } x \in X, \quad (1.1)$$

则称  $f(x)$  在  $X$  上是有界函数. 函数有界性的一个等价的定义是: 若存在一个大于零的常数  $K$ , 使

$f(x) \leq K$ , 对任意的  $x \in X$ ,

则称  $f(x)$  在  $X$  上是有界函数, 并称常数  $K$  为  $f(x)$  在  $X$  上的一个界.

**奇偶性** 设有函数  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ , 其中  $X$  关于原点对称(即: 若  $x \in X$ , 则  $-x \in X$ ).

若  $f(-x) = -f(x)$ , 对任意的  $x \in X$ , 则称  $y = f(x)$  为  $X$  上的奇函数.

若  $f(-x) = f(x)$ , 对任意的  $x \in X$ , 则称  $y = f(x)$  为  $X$  上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于  $y$  轴.

**单调性** 对任给的  $x_1, x_2 \in X$ , 若  $x_1 < x_2$  时有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在  $X$  上是单调上升的(单调下降的). 在  $X$  上单调上升与单调下降统称为在  $X$  上单调. 单调上升(下降)也称为单调递增(递减). 又若  $x_1 < x_2$  时有  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称  $f(x)$  在  $X$  上严格单调上升或严格递增(严格单调下降或严格递减).

**周期性** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上定义, 若存在常数  $l > 0$ , 对任给的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $f(x+l) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数,  $l$  为  $f(x)$  的一个周期. 周期函数一定有无穷多个周期, 若其中有一个最小的正数  $T$ , 则称  $T$  为周期函数的最小周期, 简称周期.

#### 4. 复合函数

设有函数

$$y = f(u), u \in U; u = \varphi(x), x \in X, \text{ 值域为 } U.$$

若  $U \subseteq U$ , 则在  $X$  上确定了一个新函数

$$y = f[\varphi(x)], x \in X,$$

称为  $y = f(u)$  与  $u = \varphi(x)$  的复合函数,  $u$  称为中间变量.

#### 5. 反函数

设函数  $y = f(x)$  的值域为  $Y$ . 若对  $Y$  中每一个  $y$  值, 都可由方程  $y = f(x)$  唯一地确定出一个  $x$  的值, 则得到一个定义在  $Y$  上的函数, 称为  $y = f(x)$  的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), y \in Y.$$

易知, 严格单调函数必有反函数, 并且其反函数也是严格单调的.

函数  $y = f(x)$  ( $x \in X$ ) 与其反函数  $x = f^{-1}(y)$  ( $y \in Y$ ) 的图形在同一个坐标系中是相同的.

习惯上, 为了强调对应规律  $f^{-1}$ , 并将因变量仍记作  $y$ , 通常将反函数写为

$$y = f^{-1}(x), x \in Y,$$

它的图形与  $y = f(x)$  ( $x \in X$ ) 的图形关于直线  $y = x$  对称.

## 6. 基本初等函数、初等函数

基本初等函数是指以下六类函数：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数。

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数。

### 典型例题分析

1. 将函数  $y = 2x + 2 - x$  用分段函数表示。

解 根据绝对值的定义，当  $x \leq 2$  时， $2 - x = 2 - x$ ；当  $x > 2$  时， $2 - x = x - 2$ ，所以

$$y = \begin{cases} x + 2, & x \leq 2, \\ 3x - 2, & x > 2. \end{cases}$$

2. 形如  $f(x) = kx + 1$  (其中  $k, 1$  为常数) 的函数称为线性函数。

问：线性函数  $f(x)$  在哪些区间上有界？在哪些区间上无界？ $f(x)$  是否是奇函数？是否是偶函数？ $f(x)$  何时单调上升？何时单调下降？并求： $f(\sin x)$ ,  $\sin(f(x))$ ,  $f(f(x))$ ,  $f(f(f(x)))$ ,  $f(f(\sin x))$  的表达式。其中哪些是线性函数？

答  $f(x)$  在任意有限区间  $[a, b]$  上都是有界函数，因为当  $x \in [a, b]$  时，有

$$f(x) = k \cdot x + 1 \leq k \cdot m + 1,$$

其中  $m = \max(a, b)$ 。

$k \cdot m + 1$  是一个确定的常数，故上述不等式说明： $f(x)$  在  $[a, b]$  上是有界的。 $f(x)$  在区间  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, a)$  或  $(-\infty, +\infty)$  上都是无界函数。当  $k > 0$  且  $1 = 0$  时  $f(x)$  是奇函数；当  $k = 0$  时  $f(x)$  是偶函数；当  $k \neq 0$  时  $f(x)$  既非奇函数，也非偶函数。当  $k > 0$  时  $f(x)$  单调上升，当  $k < 0$  时  $f(x)$  单调下降。

$$f(\sin x) = k \sin x + 1,$$

$$\sin(f(x)) = \sin(kx + 1),$$

$$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1$$

$$= k^2 x + (k + 1)1,$$

$$f(f(f(x))) = f(k^2 x + (k + 1)1) = k[k^2 x + (k + 1)1] + 1$$