

工科课程解题题典丛书

高等数学解题题典

崔荣泉 杨泮池 编

西北工业大学出版社

内容简介

本书精选了近千道工科高等数学典型题目,每道题给出了解答,多数题作了分析或注解,力图通过本书使读者学会从分析题意入手,启发读者掌握高等数学各类题目的方法和技巧,以提高分析问题解决问题的能力,本书还收入了部分历年考研的数学题目,使本书不仅可作为工科高校大学生学习高等数学的参考书,也可供报考硕士研究生的考生复习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题题典/崔荣泉,杨泮池编. 西安:西北工业大学出版社,2002.8

(工科课程解题题典丛书)

ISBN 7-5612-1452-9

. 高... . 崔... . 杨... . 高等数学—高等学校—
解题 . 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009908 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)8493844

网 址: <http://www.nwpup.com>

印刷者:陕西向阳印务有限公司

开 本:787 mm×960 mm 1/16

印 张:27.75

字 数:502 千字

版 次:2002 年 9 月第 1 版 2003 年 4 月第 2 次印刷

印 数:6 001~11 000 册

定 价:35.00 元

前 言

高等数学是工科大学最主要的基础课之一,解证一定数量的习题是学好高等数学必需的,也是重要的环节。这不仅是为了巩固和掌握课内所学内容,而且是对课内知识的加深和拓广,这将有助于学生能力与创新精神的培养。为此,我们编写了这本书。书中精选了近千道典型题目,除给出详尽的解答外,对许多题目都作了分析与注解,主要是点出解题的关键、思路和技巧。希望读者在使用本书时,能边阅读、边动手推导,边动脑筋思考以达到学以致用的目的。

本书紧扣高等数学课程的基本要求,可作为高等数学的教学参考书。另外,书中还含有部分考研题目(见*号标记),以期对考研的学生有所裨益。

限于作者水平,疏漏及不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2002年3月

目 录

第一章 函数与极限.....	1
. 客观题	1
一、填空题	1
二、单项选择题	4
三、多项选择题	7
. 非客观题	11
一、函数.....	11
二、极限.....	18
三、连续与间断.....	30
第二章 导数与微分	38
. 客观题	38
一、填空题.....	38
二、单项选择题.....	41
. 非客观题	45
一、导数概念与初等函数求导.....	45
二、隐函数的导数、参数方程所确定的 函数的导数.....	57
三、函数的微分及其应用.....	61
第三章 导数的应用	66
. 客观题	66
一、填空题.....	66
二、单项选择题.....	67
. 非客观题	72
一、微分中值定理.....	72

二、洛必达法则与泰勒公式.....	82
三、函数的单调性与极值.....	93
四、最大值与最小值问题	104
五、曲线的凹凸、拐点与曲率.....	111
六、函数图形的描绘	120
第四章 原函数与不定积分.....	126
. 客观题	126
一、填空题	126
二、单项选择题	127
. 非客观题	130
一、原函数与不定积分	130
二、换元积分法	132
三、分部积分法	137
四、几种特殊类型函数的积分	141
第五章 定积分及其应用.....	158
. 客观题	158
一、填空题	158
二、单项选择题	162
. 非客观题	168
一、定积分的概念及性质	168
二、微积分基本公式、定积分的计算.....	170
三、广义积分	188
四、定积分的应用	192
第六章 向量代数与空间解析几何.....	214
. 客观题	214
一、填空题	214
二、单项选择题	216
. 非客观题	219
一、向量代数	219
二、平面与空间直线	221
三、空间曲线与曲面	226

第七章 多元函数微分学及其应用.....	231
. 客观题	231
一、填空题	231
二、单项选择题	237
. 非客观题	240
一、偏导数、全微分及其应用.....	240
二、多元函数的极值、条件极值、最大 与最小值	255
第八章 重积分.....	260
. 客观题	260
一、填空题	260
二、单项选择题	268
. 非客观题	270
一、重积分的概念与性质	270
二、重积分的计算及其应用	273
第九章 曲线积分与曲面积分.....	287
. 客观题	287
一、填空题	287
二、单项选择题	291
. 非客观题	293
一、曲线积分	293
二、曲面积分	304
第十章 无穷级数.....	318
. 客观题	318
一、填空题	318
二、单项选择题	321
. 非客观题	325
一、常数项级数	325
二、幂级数	341
三、傅里叶级数	355

第十一章 微分方程.....	362
. 客观题	362
一、填空题	362
二、单项选择题	365
. 非客观题	369
一、一阶微分方程	369
二、可降阶的高阶微分方程	384
三、高阶线性微分方程	391
附录.....	402
. 第一 ~ 六章复习题及答案	402
. 第七 ~ 十一章复习题及答案	413
. 2002 年考研高等数学试题及答案	426

第一章

函数与极限

客观题

一、填空题

1.1 已知函数 $f(x-1) = x^2 + 1$, 则 $f(x) =$ _____ .

解 令 $x-1 = u$, 即 $x = u+1$, 那么

$f(u) = (u+1)^2 + 1 = u^2 + 2u + 2$
将变量 u 换为 x , 得

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

1.2 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则函数 $f(x^2)$ 的定义域是 _____, $f(\sin x)$ 的定义域是 _____ .

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 即 $0 \leq x \leq 1$, 那么 $f(x^2)$ 的定义域可由 $0 \leq x^2 \leq 1$ 确定, 即 $|x| \leq 1$ 或 $D = [-1, 1]$. 同理, 对于 $f(\sin x)$, $0 \leq \sin x \leq 1$, 由此, 它的定义域是 $D = [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbf{Z}$.

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

注 填空题是一种重要的客观题题型, 正确的填写答案来自严格的推证与细致的计算.

$$D = [-1, 1]$$

$$D = [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbf{Z}$$

注 函数的定义域与对应关系是确定函数的两要素.

1.3 设 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则 $f\left[\frac{x}{3}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$, 其定义域 $D_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $f\left[\frac{2}{x}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$, 其定义域 $D_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $f\left[\frac{x}{3}\right] + f\left[\frac{2}{x}\right]$ 的定义域 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 将 $\frac{x}{3}$ 与 $\frac{2}{x}$ 分别代入 $f(x)$ 即得

$$f\left[\frac{x}{3}\right] = \ln \frac{3+x}{3-x}, \text{ 与 } f\left[\frac{2}{x}\right] = \ln \frac{x+2}{x-2}$$

根据对数函数的定义知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $|x| < 1$, 因而 $f\left[\frac{x}{3}\right]$ 的定义域为 $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, 即 $D_1 = (-3, 3)$. $f\left[\frac{2}{x}\right]$ 的定义域为 $\left|\frac{2}{x}\right| < 1$, 即 $|x| > 2$ 或 $D_2 = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$f\left[\frac{x}{3}\right] + f\left[\frac{2}{x}\right]$ 的定义域是 $D = D_1 \cap D_2 = (-3, -2) \cup (2, 3)$.

1.4 函数 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x = y^3 - 1$, 调换变量 x, y 得 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数是 $y = x^3 - 1$.

1.5 初等函数 $y = |x|$ 是由基本初等函数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 与基本初等函数 $u = \underline{\hspace{2cm}}$ 复合而成.

解 由幂函数 $y = \sqrt{u}$ 与幂函数 $u = x^2$ 复合成

$$y = \sqrt{x^2} = |x|$$

1.6 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leq 1 \\ 0, & |f(x)| > 1 \end{cases}$$

$$f\left[\frac{x}{3}\right] = \ln \frac{3+x}{3-x}$$

$$D_1 = (-3, 3)$$

$$f\left[\frac{2}{x}\right] = \ln \left[\frac{x+2}{x-2}\right]$$

$$D_2 = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$D = (-3, -2) \cup (2, 3)$$

$$D = (-3, -2) \cup (2, 3)$$

注

本题求解的关键是熟悉对数函数的定义.

$$y = x^3 - 1$$

注 这虽是求反函数的一个很简单的题目, 但它体现了求反函数的基本步骤.

$$y = \sqrt{u}$$

$$u = x^2$$

注 $\sqrt{x^2}$ 与 $|x|$ 是同一个函数, 因为它们有相同的定义域和相同的对应关系.

$$f[f(x)] = 1$$

又由于对任何 x 都有 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$.

$$1.7 \quad \arctan(-\sqrt{3}) + \arctan(-1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 因为 $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

所以 $\arctan(-\sqrt{3}) + \arctan(-1) = -\frac{7\pi}{12}$

$$1.8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{2x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{1}{4}$$

$$1.9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2 - x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2 - x} = 0$.

$$1.10 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^4, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$

则 $a = 4$.

$$1.11 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 2$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

$$f(2) = a$$

$f(x)$ 在 $x = 2$ 连续, 应有 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, 即 $a = 4$.

$$1.12 \quad \text{函数 } y = \frac{1}{\sin x} \text{ 的间断点是 } x = \underline{\hspace{2cm}},$$

它们是第 类间断点.

解 函数 $y = \frac{1}{\sin x}$ 在 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 处没有

$$-\frac{7\pi}{12}$$

$$\frac{1}{4}$$

0

注 有界量与无穷小量的积为无穷小量.

$$a = 4$$

注 这里应用了著名

$$\text{极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= e.$$

$$a = 4$$

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

二

定义,所以它们是这个函数的间断点,而且 $x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = \infty$ 这些间断点都是无穷型间断点,因而是第二类间断点.

$$1.13 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 2} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 2} \sin \frac{2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 2} \cdot \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 10}{5x^2 + 2x} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

$$\frac{6}{5}$$

注 这里应用了等价无穷小代换 $\sin \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$.

二、单项选择题

1.14 函数 $y = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ 的反函数是().

(A) $y = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$; (B) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$;

(C) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$; (D) $y = \log_2 \frac{x}{1+x}$.

解 直接由原式解出 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 调换 x 与 y 得

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x}$$

故选(C).

1.15 设函数 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则复合函数() 是奇函数.

(A) $f[f(x)]$; (B) $g[f(x)]$;

(C) $f[g(x)]$; (D) $g[g(x)]$.

解 令 $(x) = f[f(x)]$,

$$\begin{aligned} (-x) &= f[f(-x)] = f[-f(x)] = \\ &= -f[f(x)] = -(x) \end{aligned}$$

故选(A).

1.16 设

C

注 这种选择题有一个且仅有一个选择是正确的, 故可以利用某些特殊点对应的函数值加以判断. 本题可对直接函数设 $x = 0$ 求出 $y = \frac{1}{2}$, 然后以 $x = \frac{1}{2}$ 代入(A), (B), (C), (D), 恰好(C)的 $y = 0$. 即可断定选(C). 这种方法适用于单值函数.

A

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$$

则 $f[g(x)] = (\quad)$.

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 1 - x, & x \geq 0 \end{cases}; & \text{(B)} & \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geq 0 \end{cases}; \\ \text{(C)} & \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geq 0 \end{cases}; & \text{(D)} & \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 1 + x, & x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

解 由 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$ 知

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 - g(x), & g(x) \geq 0 \\ g(x) + 2, & g(x) < 0 \end{cases}, \text{ 又由内层函数 } g(x)$$

知, $x \geq 0$ 时 $g(x) = -x \leq 0$, $x < 0$ 时 $g(x) = x^2 \geq 0$, 因此

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 + x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2, & x < 0 \end{cases}$$

故选(D) .

1.17 已知 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 那么 $f[f[f(x)]] =$

() .

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \frac{1}{1-x}; & \text{(B)} & \frac{1}{(1-x)^3}; \\ \text{(C)} & x; & \text{(D)} & 1-x. \end{aligned}$$

$$\text{解 } f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f[f[f(x)]] = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x$$

故选(C) .

1.18 若 $\lim_x \left[\frac{x+a}{x-a} \right]^x = 4$, 则 $a = (\quad)$

$$\text{(A)} 1; \quad \text{(B)} -1; \quad \text{(C)} \ln 3; \quad \text{(D)} \ln 2 .$$

$$\text{解 } \lim_x \left[\frac{x+a}{x-a} \right]^x = \lim_x \left[1 + \frac{2a}{x-a} \right]^x =$$

$$\lim_x \left[\left[1 + \frac{2a}{x-a} \right]^{\frac{x}{2a}} \right]^{2a} = e^{2a}$$

D

注 这是一个很典型的题目, 它考查读者对复合函数的理解. 求解的关键是搞清楚内层函数的值域含在外层函数的定义域内.

C

注 这类题目由内层向外层作, 比较简便.

D

$$e^{2a} = 4$$

$$a = \ln 2$$

故选(D) .

1.19 (1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的 _____ 条件; 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的 _____ 条件 .

B
A

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的 _____ 条件 .

B
A

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$ _____ 的条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$ _____ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内无界的 _____ 条件 .

B
A

(4) 左极限 $f(x_0 - 0)$ 与右极限 $f(x_0 + 0)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件 .

C

(5) 函数 $f(x)$ 在闭区间上连续是函数 $f(x)$ 在该区间上有界的 _____ 条件.

A

- (A) 充分; (B) 必要;
(C) 充分且必要; (D) 不充分也不必要 .

1.20 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} b, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

若 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 () .

C

- (A) $a = 1, b = 2$; (B) $a = 2, b = 1$;
(C) $a = b = 1$; (D) $a = b = 2$.

解 选 $a = 1$ 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 选 $b = 1$ 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 因此选(C), 即 $a = 1, b = 1$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续 .

1.21 设 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 () .

D

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散;
(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必无界;
(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小;

注 排除法是选择题的常用解法 .

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

解 应用排除法. 设 $x_n = 1, 0, 2, 0, \dots, n, 0, \dots, y_n = 0$, 那么 $x_n y_n = 0$, 但 x_n 发散而 y_n 收敛, 则排除(A), 这时 x_n 无界但 y_n 有界, 则排除(B).

又设 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$, 那么 $x_n y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

这时 x_n 有界但 y_n 无界, 排除(C).
排除了(A), (B), (C), 只能选(D).

三、多项选择题

1.22 下列函数中, 奇函数是(), 偶函数是(), 非奇非偶函数是().

(A) $f(x) = \sin x - \cos x$;

(B) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$;

(C) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(D) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$;

(E) $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

(F) $f(x) = x \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$.

解 对于(C), (D), (E) 中的函数都满足

$$f(-x) = -f(x)$$

因而都是奇函数, 对于(B), (F) 中的函数都满足

$$f(-x) = f(x)$$

因而都是偶函数, 对于(A) 中的函数

$$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{且} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

则(A) 中的函数是非奇非偶函数.

1.23 下列函数中周期函数是()

(A) $|\sin x|$; (B) $x \sin x$;

(C) $\sin^2 x$; (D) $\sin x^2$;

(E) C (常数); (F) $\sin \sqrt{x}$.

解 (A) 中函数 $|\sin x|$ 以 π 为周期, (C) 中函数

C, D, E

B, F

A

注 牢记奇函数与偶函数的定义.

奇函数与偶函数都定义于对称区间.

A, C, E

$\sin^2 x = \sin x \sin x$ 以 2π 为周期. (E) 中常数 C 是以任意正数 l 为周期, 它没有最小正周期.

(B) 中函数 $x \sin x$ 是周期函数 $\sin x$ 与非周期函数 x 的积, 故不是周期函数. (D) 中函数 $\sin x^2$ 是非周期函数 $y = u^2$ 与周期函数 $y = \sin u$ 的复合函数, 故不是周期函数. (F) 中的函数 $\sin \sqrt{x}$ 的定义域 $x \geq 0$, 有下界, 故不是周期函数.

注 周期函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$

1.24 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同的是().

A, C, D, E

(A) $f(x) = \tan x, g(x) = \frac{1}{\cot x};$

(B) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$
 $g(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$

(C) $f(x) = \lg(x^2 - 1),$
 $g(x) = \lg(x - 1) + \lg(x + 1);$

(D) $f(x) = x + 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$

(E) $f(x) = \sin(\arcsin x), g(x) = \arcsin(\sin x).$

解 (A), (C), (D), (E) 中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数, 这是因为它们的定义域不同.

1.25 下列命题成立的是().

B, C, E

- (A) 有界数列一定收敛;
 (B) 无界数列一定发散;
 (C) 收敛数列一定有界;
 (D) 单调数列一定发散;
 (E) 单调有界数列一定收敛.

解 (A) 显然不成立, 例如 $1, 0, 1, 0, \dots$ 为有界数列, 但不收敛. (B) 是成立的. (C) 也成立. (D) 不成立, 如数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ 是单调数列, 它收敛于零. (E) 成立, 这是一条收敛准则.

1.26 若 x_n, y_n 均为无穷小量, 那么必有().

A, D

- (A) $x_n y_n$ 为无穷小量;
 (B) $x_n y_n$ 未必为无穷小量;
 (C) $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 1;$

(D) $x_n + y_n$ 为有界量 .

解 无穷小量的积仍为无穷小量, 则(A) 成立, (B) 不成立 . 只在 x_n 与 y_n 为等价无穷小时才有 $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 1$, 则(C) 不成立 . 两个无穷小量的和仍为无穷小量, 则(D) 成立 .

1.27 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续的有() .

(A) $f(x) = |x|$;

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

(C) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

(D) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

解 (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, f(0) = 0$, 则 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 连续 .

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续 .

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 而 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续 .

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 而 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 .

1.28 下列各题中答案正确的是() .

(A) $\lim_n \left[1 + \frac{1}{n} \right]^{n+5} = e$;

(B) $\lim_n \left[1 - \frac{1}{n} \right]^{2n} = e^{-1}$;

(C) $\lim_n \left[1 - \frac{1}{n^2} \right]^n = 1$;

A, D

注 熟练掌握函数在一点连续性的判定方法, 判定分段函数分段点的连续性往往要注意左、右极限 .

A, C

注 这类题目要应用著名极限

$\lim_n \left[1 + \frac{1}{n} \right]^n = e$

因此必须将题目中形式转化为这个著名极

$$(D) \lim \left[1 + \frac{1}{n^2} \right]^n = e.$$

$$\text{解 (A)} \lim_n \left[1 + \frac{1}{n} \right]^{n+5} = \lim_n \left[1 + \frac{1}{n} \right]^n \cdot \left[1 + \frac{1}{n} \right]^5 = e.$$

$$(B) \lim_n \left[1 - \frac{1}{n} \right]^{2n} = \lim_n \left[\left[1 - \frac{1}{n} \right]^{-n} \right]^{-2} = e^{-2}.$$

$$(C) \lim_n \left[1 - \frac{1}{n^2} \right]^n = \lim_n \left[\left[1 - \frac{1}{n^2} \right]^{-n^2} \right]^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

$$(D) \lim_n \left[1 + \frac{1}{n^2} \right]^n = \lim_n \left[\left[1 + \frac{1}{n^2} \right]^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

由以上计算知答案正确的是(A), (C).

1.29 当 x 时, 为无穷小量的函数是(). A, B, D

$$(A) y = \frac{x \sin(1 - x^2)}{1 - x^2};$$

$$(B) y = \frac{(1 - x^2) \sin \frac{1}{1 - x^2}}{x};$$

$$(C) y = (1 - x^2) \sin \frac{x}{1 - x^2};$$

$$(D) y = \frac{1}{1 - x^2} \sin \frac{1 - x^2}{x}.$$

解 (A) x 时 $\frac{x}{1 - x^2} \rightarrow 0$, 而 $\sin(1 - x^2)$ 为有界量, 则 $\lim_x \frac{x \sin(1 - x^2)}{1 - x^2} = 0$

$$(B) \lim_x \frac{(1 - x^2) \sin \frac{1}{1 - x^2}}{x} = \lim_x \frac{\sin \frac{1}{1 - x^2}}{x \frac{1}{1 - x^2}} = 0.$$

$$(C) \lim_x (1 - x^2) \sin \frac{x}{1 - x^2} = \lim_x \frac{x \sin \frac{x}{1 - x^2}}{\frac{x}{1 - x^2}} = .$$

$$(D) \lim_x \frac{1}{1 - x^2} \sin \frac{1 - x^2}{x} = 0. \text{ 这是无穷小量与有界}$$

量的积, 仍为无穷小量.

限的形式.