高职高专成教数学系列教材

高 等 数 学

(上册)

总主编摇肖果能
主摇编摇周泰文摇邓国栋
副主编摇粟摇芷摇陈先觉
摇摇摇摇刘建文摇王烂曼

中 南 大 学 出 版 社

内容简介

本书根据国家教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》编写，是这类高校学生(包括函授生)《高等数学》课程的教材，分上、下两册鄄

上册有函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程四章；

下册有向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，无穷级数四章鄄

本书融会了编者多年的从教经验，结构严谨，重点突出，通俗简明，例题典型，章末均有学习辅导，好教好学鄄可作为高职、高专、成教的高等数学教材，亦可供有关专业的自考生和教师参阅鄄

总摇摇序

一年前，我开始接触高职、高专、成教的教学，深有感触！高职、高专、成教是现行高等教育中的另一方天地，这里培养的高级应用型人才，从一个方面顺应了人才市场的需要，正是这种需要激发了高职、高专、成教的蓬勃发展：属于这一类型的学校越来越多，生源越来越好，我觉得这里确是一个有作为的教育工作者的用武之地！

发展高职、高专和成教，教材建设是根本郾中南大学出版社考虑到这类学校教材建设的需要，邀我做些教材开发的工作郾我认为这是一件有意义的事情，欣然领命郾经过一番策划，邀请了几位专业水平高、教学经验丰富的同仁做主编，结合几位在高职、高专及成教教学第一线的教师参加，同心协力，编写了这套适用高职、高专和成教的数学教材，计有《高等数学》（上、下）、《线性代数》、《概率论与数理统计》四册郾

百年大计，教育为本郾教育的根本目的在于培养人才；教育要用人类的先进文化武装劳动者，教材就必须反映先进文化的渊源和发展；教育牵连千家万户，关系国计民生郾在编写过程中，我们以教育部颁发的高职、高专和成教数学课程基本要求为依据，在编写时充分考虑到这类高校学生的具体情况，注重理论严谨，论述简明，重点突出，联系实际，使教材好教好学郾

我和编者们以绵薄之力奉献教育，很高兴又为她做了一件有益的事郾

肖果能摇谨识

[illegible]年春于湖南涉外经济学院

前摇摇言

为培养圆员世纪的高级应用型人才，根据教育部颁发的高职、高专、成教《高等数学课程教学基本要求》，汇集我们多年从事高等数学教学所积累的经验，吸收同类教材的优点，我们编写了本教材，力求做到理论严谨、重点突出、表述简明、深入浅出、好教好学鄢

本教材具有以下特色：

（员 教材内容体现大纲要求，难度适当且具有“弹性”，凡超出课程基本要求的内容（包括习题），均用小号字排出或标记“ * ”号，供选用；

（圆 从实例引入基本概念，注重概念的直观背景与理论意义，对重要概念，不吝笔墨，阐述详尽；

（猿 结合图形讲解定理，便于学生理解记忆；

（源 突出重点选配例、习题，着重解题思路、方法、步骤，加强示范性；

（缘 每章附学习辅导，抓住要点，化厚为薄，使知识脉络清晰，基本要求、重点、难点一目了然鄢归纳题型、分类举例，便于读者掌握解题规律和技巧鄢

本教材分上、下两册鄢参加上册编写的有（按章节先后次序）：湖南大众传媒学院粟芷（函数、极限、连续）、陈先觉（导数、微分及应用），湖南交通职业技术学院刘建文（不定积分），长沙通讯职业技术学院王烂曼（定积分及应用、微分方程）；参加下册编写的有：湖南生物与机电工程职业技术学院温芝元（向量代数与空间解析几何），长沙大学李定武（多元函数微分学），湖南涉外经济学院李金妹（二重积分），湖南工业职业技术学院陈珊（无穷级数）鄢

中南大学周泰文、长沙大学邓国栋对全书初稿进行了统稿、定稿鄢

中南大学肖果能教授对本教材的编写进行了组织策划和审稿，并提出了许多宝贵的修改意见鄢

我们期望本教材能在高职、高专、成教及函授的教学中，发挥很好的作用并殷切希望广大师生批评、指正鄢

编摇者

圆园园猿年猿月

目摇摇录

目录

第一章 摇 函数 摇 极限 摇 连续

函数是高等数学课程首要的基本概念和主要的研究对象，它是现实世界中变量之间的依存关系的数学抽象援极限是研究函数及高等数学其他重要概念与理论的基本工具，是整个高等数学的基石，因而也是学习高等数学的入门关援本章将系统地讨论函数的概念和性质，学习极限的理论与方法，建立连续的概念，为进一步学习高等数学的主要内容 —— 微积分学作好准备援

第一节 摇 函 摇摇 数

本书将在实数范围内展开对变量的研究援

一 摇 实数与数集

员援实数

有理数与无理数统称为实数援实数与数轴上的点是一一对应的援有理数对应的点叫有理点，无理数对应的点叫无理点援如图 员原员所示援

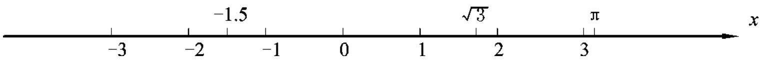

图 员原员

由全体实数组成的集合叫做实数集援实数集具有如下两个性质：

(员 有序性 摇 任何两个互异的实数 葬，遭都可比较其大小，或者 葬跃遭，或者 葬约遭援实数按照由小到大的顺序从左至右排列在数轴上，排在左边的实数小于排在右边的实数援

(圆 完备性 摇 有理点在数轴上处处稠密，但有理点并未充满整个数轴，比如还有√猿，π 等这样的无理点存在援而由全体有理点与全体无理点构成的实数充满整个数轴，没有空隙，这就是实数的完备性援

实数与数轴上的全体点一一对应援为简单起见，我们常将实数与数轴上和它相对应的点不加区别，如点 葬和实数 葬意义相同援

圆援数集

以数为元素的集合叫做数集援通常把全体自然数的集合记作“晕”，全体整数的集合记作“在”，全体有理数的集合记作“匝”，全体实数的集合记作“砸”，晕，在，匝都

是实数集 砸的真子集援

(员 区间

区间是用得较多的一类数集援

设 葬遭∈ 砸,且 葬约遭数集 {曾渣葬约曾约遭 称为开区间,记作 (葬遭 即

摇摇摇摇 (葬遭 越 {曾渣葬约曾约遭,

葬遭分别称为该区间的左端点和右端点援

类似地有

闭区间 摇摇摇 [葬遭 越 {曾渣葬≤ 曾≤ 遭；

半开区间 摇摇 (葬遭 越 {曾渣葬约曾≤ 遭 摇 [葬遭 越 {曾渣葬≤ 曾约遭援

开区间不包含端点,而闭区间包含两个端点,半开区间只包含其中一个端点援

以上各区间都称为有限区间援数 遭原葬称为区间的长度援在数轴上,有限区间是长度有限的线段,在图 员原圆中表示了闭区间 [葬遭 和开区间 (葬遭援

图 员原圆

除有限区间外,还有五种无限区间：

摇摇摇摇摇摇摇 [葬 垣肄) 越 {曾渣曾≥ 葬, ①

摇摇摇摇摇摇摇 (葬 垣肄) 越 {曾渣曾跃葬, ②

摇摇摇摇摇摇摇 (原肄,遭 越 {曾渣曾≤ 遭, ③

摇摇摇摇摇摇摇 (原肄,遭 越 {曾渣曾约遭, ④

摇摇摇摇摇摇摇 (原肄, 垣肄) 越 {曾渣原肄 约曾约垣肄} 援 ⑤

上述无限区间的 ①,④ 如图 员原猿所示援②、③、⑤ 的图形,请读者自作援

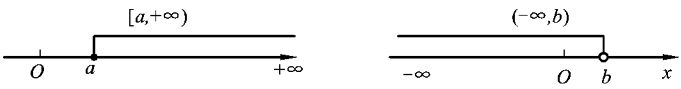

图 员原猿

以后当不必考虑区间的端点以及区间是否有限时,我们将有限区间和无限区间都简称为“区间”援

(圆 邻域

设 曾园∈ 砸,δ 跃园则称开区间

摇摇摇摇 (曾园 原δ,曾园 垣δ) 越 {曾渣曾原曾园 渣约δ}

为点 曾园的 δ 邻域,分别称 曾园和 δ 为此邻域的中心和半径援如图 员原源所示援

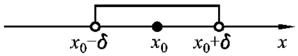

图 员原原

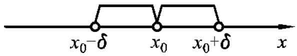

图 员原缘

例如 渣曾原圆渣约园援员即为以点 圆为中心,以 园援员为半径的邻域 (或称为点 圆的 园援员邻域),它就是开区间 (员援怨,圆援员) 援

如果在点 曾$_0$的 δ 邻域中去掉点 曾$_0$,则称

摇摇摇摇 (曾$_0$ 原δ,曾$_0$) $\cup$ (曾$_0$,曾$_0$ 垣δ) 越 {曾渣园约渣曾原曾$_0$渣约δ}

为点 曾$_0$的去心的 δ 邻域,如图 员原缘所示援

例如 园约渣曾原圆渣约园援员即点 圆的去心的 园援员邻域,还可表示为

(员援怨,圆) $\cup$ (圆,圆援员) 援

另外,还可用含绝对值的不等式表示数集,如

摇摇摇摇 渣曾渣约葬即 (原葬,葬) ;摇摇摇摇 渣曾渣跃遭即 (原肄,原遭) $\cup$ (遭,垣肄) 援

其中 葬跃园,遭$\geqslant$园援

二 摇 函数概念

员援常量与变量

在某个变化过程中保持数值不变的量叫做常量,通常用英文的前几个字母 葬,遭,糟等等表示常量;在某个变化过程中可以取不同数值的量叫做变量,通常用英文的后几个字母 曾,赠,扎等等表示变量援变量的变化不是孤立的,它与同一过程中的其他变量之间有一定的对应关系援研究变量就应该掌握变量之间的这种对应关系援

圆援函数的定义

我们先来看两个例子:

例 员摇 在自由落体运动中,物体下落时间 贼与下落距离 泽是两个相互联系的变量,由自由落体实验知道,变量 泽与贼之间有如下的对应关系:

摇摇摇摇泽越$\frac{员}{圆}$早贼,摇园$\leqslant$ 贼$\leqslant$ 栽

其中,早为重力加速度,是一个常量,栽为物体落地的时间援当 贼在 [园,栽] 上任取一值时,下落距离 泽都有惟一确定的值与之对应援

例 圆摇 某工厂每天生产 曾件产品,每天的固定成本为 圆园园园元,生产每件产品所需的原材料费及人工费等单位变动成本为 愿元,那么,日产量 曾(件) 与生产总成本 糟(元) 之间就有如下对应关系:

摇摇摇摇糟越圆园园园垣愿曾援

假定该厂日产量最多为 源园园件,当产量 曾在集合 {园,员,圆,…,源园园} 上任取一个数值时,总成本 糟就有惟一确定的数值与之对应援

上述例 员 例 圆中各有两个变量,且每对变量间都有确定的对应关系,这种对应关系正是函数概念的实质援

定义 摇 设 曾和 赠是两个变量,阅是一个给定的数集,如果对于 阅中每一个数 曾按照某种对应法则 枣,变量 赠总有惟一确定的值与之对应,则称 赠是 曾的函数,记作 赠越枣(曾)援这里,数集 阅叫做这个函数的定义域,曾叫做自变量,函数 赠也叫因变量援

当 曾取定数值 曾园时,与 曾园相对应的 赠的数值称为函数在点 曾园处的函数值,记作 枣(曾园)援函数值的全体构成的集合称为函数的值域,记作 宰,即

摇摇摇摇宰 越 {赠渣赠越枣(曾),曾∈ 阅}援

特别要指出的是:对于定义域 阅中自变量的每个值 曾函数 赠都只有惟一确定的值 枣(曾) 与之对应,这个性质称为函数的单值性援这是函数概念的本质属性援

在函数 赠越枣(曾) 中,表示对应法则的记号 枣也可以改用其他字母,例如“φ”,“云”等援随之,函数可记作 赠越φ(曾),赠越云(曾) 等等,有时为了简化符号,也可以用 赠越赠(曾),怎越怎(曾) 等表示,不过,此时等式左边的 赠,怎表示函数值,等式右边的 赠,怎表示对应法则援但同一函数在讨论中应取定一种记号;同一问题涉及多个函数时,应取不同的记号来表示它们各自的对应法则援

猿援函数的两要素

由函数的定义可知,确定一个函数有两个要素:定义域与对应法则援

如果两个函数的定义域和对应法则分别相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不相同的援至于用什么字母来表示变量则无关紧要援

(员) 如何确定函数的定义域?

函数的定义域是自变量的取值范围援确定函数的定义域,就是要确定自变量的取值范围援为此,要考虑两个方面:

员毅从表示函数的解析式考虑,确定使此解析式有意义的实数集(通常被称为函数的自然定义域)援必须注意:

(员毅 分母不为零;

(圆毅 偶次根式中被开方数不能为负数;

(猿毅 对数式中的真数不能为零或负数;

(源毅 对一些特殊函数[如奇(或偶)函数、反函数等等]的特殊要求援

圆毅从函数的实际意义考虑,确定使此实际问题有意义的实数集援

如例 员中,泽是 贼的函数,泽越$\frac{员}{圆}$早贼圆援如果仅从使解析式有意义考虑,贼的取值范围可以是(原肄,垣肄)援但此函数表示的是自由落体运动中,物体由静止到下落至

地面时位移与时间的关系,因此 贼不能取负数,贼的最大值为落到地面所需的时间栽所以此函数的定义域应为 [园,栽] ,而不是 (原肄, 垣肄) 援

在例圆中,根据问题的实际意义,定义域不应是自然定义域 (原肄, 垣肄),而应是从 园到 源园园的整数集:{园,员,圆,…,源园园} 援

当函数不联系实际问题时,则仅从解析式来确定其定义域援

例 猿摇 求下列函数的定义域:

$$(员)\ 赠越\frac{员}{源原曾^{圆}}垣\sqrt{曾垣圆}垣造早(圆原曾)\ ;摇摇(圆)\ 赠越\frac{\sqrt{猿曾原员}}{造早(曾原圆)}\ ;$$

$$(猿)\ 赠越\sqrt{(曾原葬)(曾原遭)}\ 摇摇(园约葬约遭)\ 援$$

解 (员) 摇 由分母不能为零得

摇摇摇摇$源原曾^{圆}\neq 园$即 $曾\neq 依圆$; ①

由偶次根式中被开方数不能为负数得 摇$曾垣圆\geqslant 园$即 $曾\geqslant 原圆$; ②

由对数式中的真数不能为零和负数得 摇圆原曾跃园即 曾约圆援 ③

将 ①,②,③ 画在数轴上 (见图 员原远) ,取交集得此函数的定义域 阅 越 (原圆,圆) 援

注意 摇 在图 员原远中,表示 ① 时,在整个数轴上挖去 原圆,圆两点 (用空心圆圈表示) ,剩余部分即是 ① 的图形表示援

(圆) 摇 定义域 阅应满足

$$摇摇摇摇\begin{cases}猿曾原员\geqslant 园\\ 曾原圆跃园\\ 曾原圆\neq 员\end{cases}摇即\begin{cases}曾\geqslant \frac{员}{猿}, & ①\\ 曾跃圆 & ②\\ 曾\neq 猿援 & ③\end{cases}$$

将 ①、②、③ 画在数轴上 (见图 员原苑所示) 取交集,即得此函数的定义域阅 越 (圆,猿) ∪ (猿, 垣肄) 援

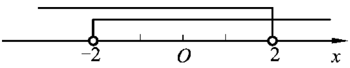

图 员原远

图 员原苑

(猿) 摇 定义域 阅应取不等式组

$$①\begin{cases}曾原葬\geqslant 园\\ 曾原遭\geqslant 园\end{cases}摇与\ ②\begin{cases}曾原葬\leqslant 园\\ 曾原遭\leqslant 园\end{cases}$$

的解集的并援解 ① 得 曾≥ 遭解 ② 得 曾≤ 葬 (见图 员原愿) ,故此函数的定义域

摇摇摇摇阅 越 (原肄,葬] ∪ [遭, 垣肄) 援

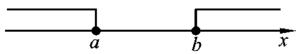

图 员原愿

摇摇 例 源摇 下列各组中的两个函数是否相同?为什么?

(员 枣(曾 越造早曾圆,早(曾 越圆造早曾;摇 (圆 枣(曾 越曾渣早(曾 越√曾圆;

(猿 枣(曾 越藻造早曾,早(曾 越曾;摇 (源 枣(曾 越√员原糟燥泽圆曾,早(曾 越泽蚤灶曾援

解 摇 (员 不相同援因为定义域不同援

枣(曾 的定义域为 (原肄,园 ∪ (园 垣肄),而 早(曾 的定义域为 (园 垣肄);

(圆 相同援因为定义域与对应法则都相同援枣(曾 的定义域为(原肄,垣肄),早(曾 的定义域亦为(原肄,垣肄)对同一个 曾 渣曾渣越√曾圆,故 枣(曾 越早(曾;

(猿 不相同援因为定义域不同援枣(曾 的定义域为 (园 垣肄),早(曾 的定义域为(原肄,垣肄);

(源 不相同援因为对应法则不同,对同一个 曾枣(曾 不能取负值,而 早(曾 却可以取负值援

(圆 如何表示对应法则?

函数的对应法则可以用以下几种方式表示:

员援公式法(或解析法)

对自变量 曾依次施行一些数学运算,而得出 赠的对应值,这样来表示函数的方法,称为公式法或解析法援例如,赠越√员原曾圆,赠越泽蚤灶曾等等援

圆援图像法

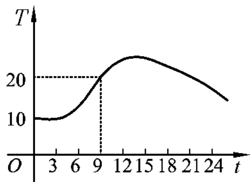

图 员原怨

把自变量 曾与因变量 赠看成平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标,用所有这些点组成的图形来表示 曾与 赠之间的函数关系的方法,叫做图像法援例如图 员原怨就是某地某日气象台自动记录仪记录的气温 栽与时间 贼之间的对应关系曲线援

猿援表格法

把一系列自变量 曾与因变量 赠的对应值用表格列出,以此来表示两个变量之间的函数关系的方法,称为表格法援如我们常用的平方根表、对数表、三角函数表等等援下表就是某商店上半年销售情况统计表援

表 员原员 单位:万元

月份 贼	员	圆	猿	源	缘	远
销售额 泽	源园	缘员	猿员	猿缘	缘怨	源愿

摇摇源援描述法

用语言描述来给定两个变量之间函数关系的方法,称为描述法援

例如：π 为无穷不循环小数，π 越猿援员源员缘怨圆…在正的自然数集上定义“枣（灶）等于 π 的小数点后的第 灶 位数值”，则变量 灶 与 枣（灶）之间确定了一个函数关系，即枣（员）越员，枣（圆）越源…，枣（缘）越怨…

表示函数关系的上述方法各有特点援公式法给出的函数关系解析式便于进行理论分析和计算；图像法给出的函数图像形象直观，富有启发性，便于记忆；表格法给出的对应值一目了然，但它常常是不完全的援今后我们以公式法（解析法）为主，配合使用图像法、表格法和描述法援

下面是一个建立函数关系的实例援

例 缘摇 水池中有 源园园 皂猿 的水，从出水口放水，流速为 圆 皂猿/分，用函数关系表示水池中所剩的水 赠（皂猿）与放水所用时间 贼（分钟）之间的关系援

解 摇 根据题意，可列出函数关系式 赠越源园园原圆贼，其定义域为 园≤ 贼≤ 圆园园援

（源）函数的图像

设函数 赠越枣（曾）的定义域为 阅，对于任意取定的 曾∈ 阅，对应的函数值为 赠援把自变量的值 曾 和对应的函数值 赠 作为点的横坐标和纵坐标，就可以在直角坐标系中确定一点（曾，赠），所有这些点在直角坐标系中形成的图形称为函数 赠越枣（曾）的图像（或图形）援

如图 员原远 中函数 赠越枣（曾）的定义域为 阅，值域为 宰，其图像为点集

摇摇悦越{（曾，赠）渣曾∈ 阅，赠越枣（曾）∈ 宰}援

它是一段曲线援

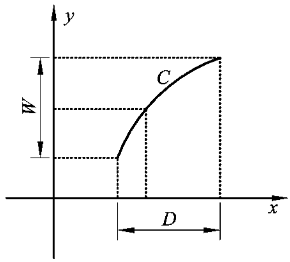

图 员原远

（缘）分段函数

如果在定义域的不同部分，有不同的对应法则，这样的函数称为分段函数援应当注意，分段函数作为一个整体是一个函数而不是几个函数援

例 远摇 根据国家税收规定，个人月收入不超过 愿园园 元，则不交纳个人所得税，超过 愿园园 元而少于 员猿园园 元的部分按 缘豫 纳税；超过 员猿园园 元而少于 圆愿园园 元的部分按 员园豫 纳税援求个人月收入 曾 与应纳税额 赠 之间的函数关系援

摇 解 摇赠越{ 园，曾≤ 愿园园，
（曾原愿园园）伊缘豫， 摇愿园园 约曾≤ 员猿园园，
（员猿园园原愿园园）伊缘豫 垣（曾原员猿园园）伊员园豫， 员猿园园 约曾≤ 圆愿园园援

摇摇 例 苑摇 取整函数援设 曾 为任一实数，称不超过 曾 的最大整数为 曾 的整数部分，记为［曾］，称函数 赠越［曾］为取整函数援它的定义域为 砸，值域为 在，例如［园援缘］越园，［员］越员，［员援怨怨］越员，［π］越猿，［原圆］越原圆，［原猿援远］越原源等等，其图形如图

员原员源所示援

取整函数是分段函数,它还可表示为

赠越 [曾] 越灶,灶≤ 曾约灶垣员,摇灶∈ 在援

例 愿摇 设分段函数

$$枣(曾) 越\begin{cases} 圆曾垣员,摇曾\geqslant 园 \\ 曾^{圆} 垣原摇曾约园援 \end{cases}$$

求 枣(原员),枣(园),枣(员)援

解 摇 分段函数在某点处的值应根据该点所在区间对应的解析式来确定,于是有

枣(原员) 越(原员)^{圆} 垣原越缘; 枣(园) 越圆伊园垣员越员;

枣(员) 越圆伊员垣员 越猿援

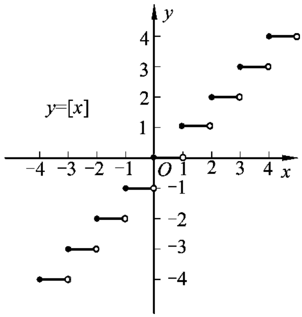

图 员原员源

三 摇 几种特殊的函数

在研究函数时,经常遇到几种特殊的函数援

员援有界函数

例如,正弦函数 赠越泽蚤灶曾 其函数值总介于 原员与 员之间,即 渣泽蚤灶曾渣≤ 员援这时,我们说在整个定义域(原肄, 垣肄)上,正弦函数 赠越泽蚤灶曾是有界的援

一般地,设函数 枣(曾) 的定义域为 阅,如果存在正数 酝,对于 阅的某子集上的任一 曾均有 渣枣(曾) 渣≤ 酝,则称函数 枣(曾) 在该子集上为有界函数,或称 枣(曾) 在此子集上有界,否则称 枣(曾) 在此子集上无界援

例如,函数 赠越糟燥泽曾在(原肄, 垣肄)上有界,因为取 酝 越员(也可取 酝为大于员的任何实数)总有 渣糟燥泽曾渣≤ 酝,曾∈ 砸援

而函数 赠越$\frac{员}{曾}$在(园,员)内无界,因为对任意取定的一个正数 酝,不能使 渣$\frac{员}{曾}$渣≤ 酝在(园,员)内都成立援因为在(园,员)内,渣$\frac{员}{曾}$渣越$\frac{员}{曾}$,要使$\frac{员}{曾}$跃酝,只要园约曾约$\frac{员}{酝}$,如果取 曾$_{园}$ 越$\frac{员}{酝垣员}$∈(园,员),则有 曾$_{园}$ 约$\frac{员}{酝}$,渣$\frac{员}{曾_{园}}$渣越$\frac{员}{曾_{园}}$越酝垣员跃酝,故 赠越$\frac{员}{曾}$在(园,员)内无界援但是 赠越$\frac{员}{曾}$在(员,圆)内却有界,因为取 酝 越员,当 曾∈(员,圆)时,均有 渣赠渣越$\frac{员}{曾}$≤ 酝援

圆援单调函数

设函数 枣(曾) 在其有定义的某区间上,当自变量增大时,函数值总是增大(或减小),则称 枣(曾) 在此区间上单调增加(或减小),并称此区间为函数的单调区间援单

调增加或单调减小的函数统称为单调函数援在单调区间上，它们的图形分别上升或下降援

这种单调增加（或单调减小）是严格的，广义的单增或单减是指当自变量增大时，函数值不减或不增的情形援

例 怨摇 证明函数 枣渊曾冤越员原造早曾 在定义域（园，垣肄）内单调减少援

证明 摇 任取两点 曾$_{员}$，曾$_{圆}$∈（园，垣肄）且 曾$_{员}$ 约曾$_{圆}$，则有

摇摇摇摇枣渊曾$_{员}$冤原枣渊曾$_{圆}$冤越（员原造早曾$_{员}$）原（员原造早曾$_{圆}$）越造早$\frac{曾_{圆}}{曾_{员}}$跃园，

即 摇枣渊曾$_{员}$冤跃枣渊曾$_{圆}$冤，故 枣渊曾冤越员原造早曾 在（园，垣肄）内单调减少援

猿援奇函数和偶函数

设函数 枣渊曾冤 的定义域 阅 关于原点对称（即若 曾∈阅，则必有 原曾∈阅），如果对于任一 曾∈阅，恒有 枣渊原曾冤越原枣渊曾冤，则称 枣渊曾冤 为奇函数；如果对于任一 曾∈阅，恒有 枣渊原曾冤越枣渊曾冤，则称 枣渊曾冤 为偶函数援

例如，赠越泽蚤灶曾 是奇函数，因为在（原肄，垣肄）上，枣渊原曾冤越泽蚤灶（原曾）越原泽蚤灶曾越原枣渊曾冤；而 赠越曾^{圆} 则是偶函数，因为在（原肄，垣肄）上，枣渊原曾冤越（原曾）^{圆}越曾^{圆}越枣渊曾冤援

若 赠越枣渊曾冤 是偶函数，则在其定义域 阅 上恒有 枣渊原曾冤越枣渊曾冤，其图像上的点（曾，枣渊曾冤）与（原曾，枣渊原曾冤）关于 赠 轴对称，所以偶函数的图像关于 赠 轴对称（图 员原员猿），同理可知，奇函数的图像关于原点对称（图 员原员圆）援

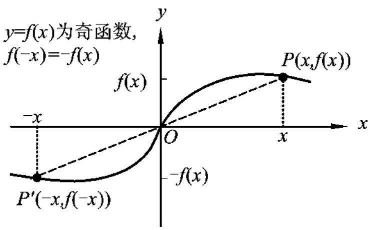

图 员原员圆

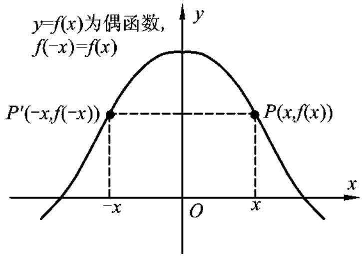

图 员原员猿

源援周期函数

设函数 赠越枣渊曾冤 的定义域为 阅，如果存在一个不为 园 的常数 栽，使得对于 阅 内的任一 曾 均有 曾垣栽∈阅，且 枣渊曾垣栽冤越枣渊曾冤，则称 枣渊曾冤 为周期函数，并称 栽 为函数 枣渊曾冤 的周期援我们通常所说周期函数的周期是指其最小正周期援

例如，赠越泽蚤灶曾 是以 圆π 为周期的周期函数；赠越贼葬灶曾 是以 π 为周期的周期函数；赠越糟燥泽$\left(猿曾垣\frac{\pi}{圆}\right)$是以$\frac{圆\pi}{猿}$为周期的周期函数；而 赠越糟 则是一个特殊的周期函数，