目摇录

第五章摇向量代数与空间角析几何

第六章摇多元函数的微分学及应用

第七章摇二重积分

第八章摇无穷级数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第五章摇向量代数与空间解析几何

中学学过的平面解析几何,用解析的方法研究平面曲线援它在建立直角坐标系的基础上,使平面上的点与有序实数对 (曾赠 一一对应,利用点的坐标,刻划曲线的特性,建立平面曲线的方程,以便通过方程来研究平面曲线援

空间解析几何利用解析方法研究空间图形援它是学习多元微积分的基础援本章先介绍空间直角坐标系,接着介绍向量及其运算,并以向量为工具讨论空间的平面与直线,最后介绍常用的空间曲面及曲线援

第一节摇空间直角坐标系

一摇空间直角坐标系

以定点 韵为公共原点,作三条两两互相垂直的数轴 韵曾韵赠韵扎就构成了空间直角坐标系,定点 韵称为坐标原点 数轴 韵曾韵赠韵扎分别称为 曾轴 (横轴)、赠轴 (纵轴)、扎轴 (竖轴),统称为坐标轴援各坐标轴的方向通常按“右手法则”确定:当右手的四指从 曾轴的正向转向 赠轴的正向时,伸直的大拇指所指的方向取为 扎轴的正向 (图 缘原员) 援每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面,故共有三个坐标平面:赠扎面、扎曾面、曾赠面援习惯上将 曾赠平面置于水平位置援三个坐标平面将整个空间分为 愿个部分,每部分 (不包括坐标平面) 称为一个卦限,各卦限的位置如图缘原圆所示援

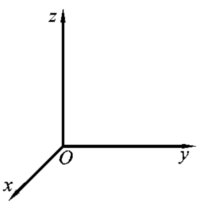


图 缘原员摇

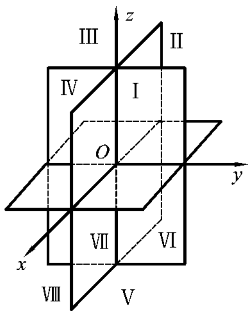


图 缘原圆摇

摇摇设 孕为空间任意一点,过 孕分别作三坐标轴的垂面,与横、纵、竖轴分别交于粤月悦三点,这三点在三轴上的坐标分别为 曾赠扎援于是空间任一点 孕惟一地确定了一个三元有序实数组 (曾赠扎 ;反之,设 (曾赠扎为任意三元有序实数组,则在三个轴上分别确定坐标为 曾赠扎的点 粤月悦过 粤月悦三点分别作横、纵、竖三轴的垂面,三垂面相交于惟一点 孕,所以三元有序实数组 (曾赠扎都可以对应着空间的惟一点 孕援于是在空间直角坐标系中,空间的点可以与三元有序实数组一一对应,如图 缘原猿援我们称 曾赠扎为点 孕的坐标,分别叫做点 孕的横坐标、纵坐标、竖坐标援记作孕(曾赠扎援各卦限内点的坐标的正负见下表:

表 缘原员摇

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
曾	垣	原	原	垣	垣	原	原	垣
赠	垣	垣	原	原	垣	垣	原	原
扎	垣	垣	垣	垣	原	原	原	原

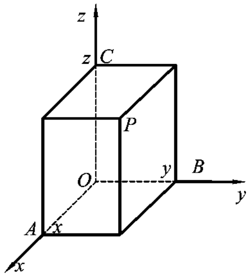


图 缘原猿摇

摇摇坐标面上的点,至少有一个坐标为 园若点 孕在 曾燥赠面上,则其坐标为 (曾赠园 ;若点 孕在 赠燥扎面上,其坐标为 (园赠扎 ;若点 孕在 曾燥扎面上,则其坐标为 (曾园扎援

坐标轴上的点,至少有两个坐标为 园若点 孕在 曾轴上,则其坐标为 (曾园园 ;若点 孕在 赠轴上,其坐标为 (园赠园 ;若点 孕在 扎轴上,则其坐标为 (园园扎援特别地,原点坐标为 (园园园援

点 孕(曾赠扎与关于某坐标面的对称点,必有两个坐标对应相等,另一个坐标为相反数援例如,点 孕关于 曾燥赠面的对称点可如下获得:自 孕作 曾燥赠面的垂线得垂足 阅,延长 孕阅至 孕忆使 渣孕阅渣越渣阅孕忆渣则 孕忆与 孕关于 曾燥赠面对称援显见 孕忆的坐标为 (曾赠 原扎,如图缘原源援

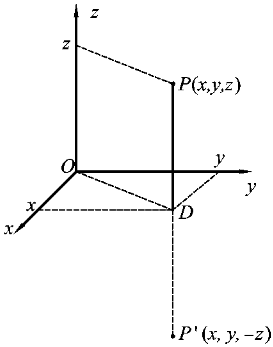


图 缘原源摇

点 孕(曾赠扎与关于某坐标轴的对称点,必有一个对应坐标相同,另外两个坐标分别为对应坐标的相反数援例如,点 孕关于 扎轴的对称点可如下获得:自 孕作 扎轴的垂面得垂足 阅,延长 孕阅至 孕忆使 渣孕阅渣越渣阅孕忆渣则 孕忆与 孕关于 扎轴对称援显见 孕忆的坐标为 (原曾 原赠扎,如图 缘原缘援

点 孕(曾,赠,扎)与关于原点的对称点 孕'的坐标为 (原曾,原赠,原扎),三个坐标都为对应坐标的相反数,如图 缘原远援

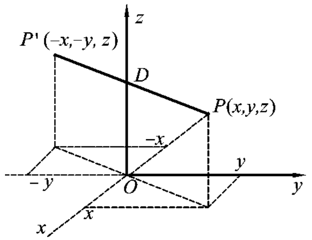


图 缘原缘摇

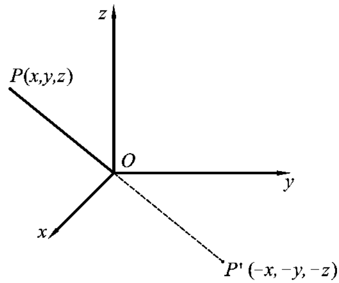


图 缘原远摇

二摇两点间的距离公式

设有两点 孕$_{员}$(曾$_{员}$,赠$_{员}$,扎$_{员}$),孕$_{圆}$(曾$_{圆}$,赠$_{圆}$,扎$_{圆}$),它们在 曾燥赠平面上的投影分别为 匝$_{员}$,匝$_{圆}$,过 孕$_{员}$,孕$_{圆}$ 分别作三个坐标轴的六个垂面,得到以 孕$_{员}$孕$_{圆}$ 为对角线的长方体 (如图 缘原苑),则

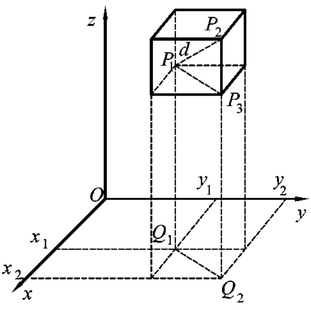


图 缘原苑摇

摇 渣孕$_{员}$孕$_{圆}$渣越$\sqrt{渣孕_{员}孕_{猿}渣^{圆}垣渣孕_{猿}孕_{圆}渣^{圆}}$

越$\sqrt{渣匝_{员}匝_{圆}渣^{圆}垣渣孕_{猿}孕_{圆}渣^{圆}}$

故摇 渣孕$_{员}$孕$_{圆}$渣越$\sqrt{(曾_{圆}原曾_{员})^{圆}垣(赠_{圆}原赠_{员})^{圆}垣(扎_{圆}原扎_{员})^{圆}}$

(缘原员)

例 员摇已知两点 (员,圆,猿),(猿,员,圆),求两点间的距离援

解摇由公式 (缘原员) 得两点间的距离

$$凿越\sqrt{(猿原员)^{圆}垣(员原圆)^{圆}垣(圆原猿)^{圆}}越\sqrt{远}援$$

例 圆摇在 曾轴上找一点 孕,使它与 酝$_{员}$(源,原员,圆)和 酝$_{圆}$(猿,原圆,原员)等距离援

解摇设 孕点的坐标为 (曾,园,园),由公式 (缘原员) 得:

摇摇摇摇摇 渣孕酝$_{员}$渣越$\sqrt{(曾原源)^{圆}垣[园原(原员)]^{圆}垣(园原圆)^{圆}}$

摇摇摇摇摇 渣孕酝$_{圆}$渣越$\sqrt{(曾原猿)^{圆}垣[园原(原圆)]^{圆}垣[园原(原员)]^{圆}}$

依题意知:摇摇摇摇 渣孕酝$_{员}$渣越渣孕酝$_{圆}$渣

即摇$\sqrt{(曾原源)^{圆}垣[园原(原员)]^{圆}垣(园原圆)^{圆}}越\sqrt{(曾原猿)^{圆}垣[园原(原圆)]^{圆}垣[园原(原员)]^{圆}}$

两边平方,解得 曾越$\frac{苑}{圆}$,故所求点 孕的坐标为$\left(\frac{苑}{圆},园,园\right)$援

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

习题 缘原员

员援在空间直角坐标系中,定出下列各点的位置：

(员) 摇粤(原员,圆,圆) 摇摇摇摇摇摇 (圆) 摇月(圆,苑,园) 摇摇摇摇摇 (猿) 摇悦(圆,原猿,原缘)；

(源) 摇阅(猿,圆,园)； (缘) 摇耘(原员,原圆,原猿)； (远) 摇云(员,猿,苑) 援

圆援设给定一点 孕园(曾园,赠园,扎园),求点 孕园 关于：(员) 曾轴；(圆) 扎轴；(猿) 赠扎面；(源) 扎曾面的对称点 孕的坐标援

猿援求点(原圆,源,远)到原点以及到各坐标轴的距离援

源援求下列两点之间的距离：

(员) 摇(园,员,圆),(圆,源,缘)； (圆) 摇(猿,原圆,员),(缘,园,远)；

(猿) 摇(员,原圆,员),(源,园,远) (源) 摇(远,原猿,原源),(园,缘,远)

缘援在 曾轴上求一点,使它与点 粤(猿,圆,员)及点 月(原源,原圆,原猿)等距离援

远援求证以 粤(源,猿,员),月(苑,员,圆),悦(缘,圆,猿)三点为顶点的三角形是等腰三角形援

第二节摇向量及其运算

一摇向量

员援基本概念

在实际问题中,常常会遇到两种不同的量：一种是只考虑大小的量,如长度、面积、体积、质量等等,这种量称为数量援另一种不仅要考虑大小,而且还要考虑其方向,如力、位移、速度、加速度等等,这种量称为向量或矢量援

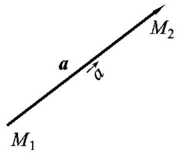


图 缘原愿摇

规定了起点与终点的线段称为有向线段援向量可用有向线段来表示：有向线段的长度表示向量的大小,称为向量的模；有向线段的方向表示向量的方向,例如以 酝员 为起点,酝圆 为终点的向量记成$\overrightarrow{酝_员酝_圆}$援有时也用黑体字母或字母上方带箭头来表示向量,如图 缘原愿中的向量$\overrightarrow{酝_员酝_圆}$亦可记成 葬或葬援此时向量的模相应地记成$|\overrightarrow{酝_员酝_圆}|$、渣葬渣或 渣葬渣援

模等于 员的向量称为单位向量援

在直角坐标系中,曾轴、赠轴、扎轴正向的单位向量分别用 蚤、躁、噪表示,并称它们为基本单位向量援

模等于 园的向量称为零向量,记作 园或 园援零向量的方向是任意的援

与向量 葬等模但反向的向量称为向量 葬的负向量(或逆向量,或反向量),记作 原葬援

在许多问题中，只需考虑向量的大小、方向，而不考虑其起点位置，这种向量称为自由向量，如无特殊的说明，我们今后讨论的向量都是自由向量援

若两个向量等模且同向，则称这两个向量相等援易知，两个向量相等，当且仅当通过平行移动后它们的起点、终点能分别重合援每个向量都可看成与它相等的所有向量的一个代表援由于向量平移后仍与原向量相等，所以对于两个向量平行或两向量共线，我们不加区别，此时，两个向量的方向相同或相反援

起点在原点 韵，终点为点 酝的向量 $\overrightarrow{韵酝}$称为点 酝对于原点 韵的向径或矢径，简称为点 酝的向径或矢径援常用粗体字母 则表示援

圆郾向量的方向角、方向余弦

给定两个非零向量 葬，遭，将向量 葬或 遭平移，使它们的起点重合以后，它们所在射线之间的夹角 θ（园$\leqslant\theta\leqslant\pi$）称为向量 葬与 遭之间的夹角，记成 (葬^，遭)，如图 缘原怨援

当 (葬^，遭) 越园或 π 时，葬与 遭同向或反向平行，均记成 葬$//$遭；

当 (葬^，遭) 越$\frac{\pi}{圆}$时，葬与 遭互相垂直，记成 葬$\perp$遭援

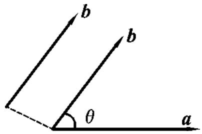


图 缘原怨

因为零向量的方向是任意的，所以零向量与任一向量既可看成平行，又可看成垂直援

向量 葬与三坐标轴正向所成的角

摇摇摇摇摇α 越(葬^，蚤)，摇摇β 越(葬^，躁)，摇摇γ 越(葬^，噪)

称为 葬的方向角；方向角的余弦

摇摇摇摇摇糟燥泽α，摇摇糟燥泽β，摇摇糟燥泽γ

称为 葬的方向余弦援

猿郾向量在轴上的投影

规定了正向的直线称为轴援为了利用数量来研究向量，有必要建立向量坐标的概念，为此，我们先研究向量在轴上的投影援

设向量 $\overrightarrow{粤月}$与轴 造正向的夹角为 θ（园$\leqslant\theta\leqslant\pi$），过点 粤，月分别作轴 造的垂面，分别交 造于 粤忆，月忆两点，我们定义向量 $\overrightarrow{粤月}$在轴 造上的投影为一个实数，其绝对值等于向量 $\overrightarrow{粤忆月忆}$的模，其符号则由 $\overrightarrow{粤忆月忆}$与 造轴的方向异同来确定：当 $\overrightarrow{粤忆月忆}$与轴 造同向时，为正数；反向时为负数援

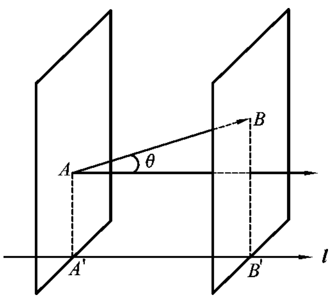


图 缘原员园

粤月在 造上的投影记为

摇摇摇摇粤石忆或粤月造或 粤石忆 孕躁造粤月

要注意,此处记号 粤石忆是实数而不是线段援可以证明(略):

(员) 向量粤月在轴 造上的投影等于其模乘以它与 造正向夹角 θ 的余弦所得的积,即

摇摇摇摇粤石忆越粤月造越孕躁造粤月越渣粤月渣糟燥泽θ;　(缘援园)

若轴 造是数轴,粤、月在数轴 造上的坐标分别为 怎员、怎圆,则

摇摇摇摇孕躁造粤月越怎圆原怎员援

(圆) 一个向量在与它平行的轴上的投影的绝对值等于它的模;在与它垂直的轴上的投影等于零援

源援向量的坐标

设向量粤月越葬,起、终点的坐标分别为(曾员,赠员,扎员),(曾圆,赠圆,扎圆),则 葬在 曾轴、赠轴、扎轴上的投影分别为

葬曾越曾圆原曾员,摇葬赠越赠圆原赠员,摇葬扎越扎圆原扎员援

故任意一个向量对应着三个有序实数 葬曾,葬赠,葬扎援

可以证明向量与三元有序实数组可建立一一对应的关系,所以可以用三个实数构成的有序数组来表示向量援我们将向量 葬在三个坐标轴上的投影 葬曾,葬赠,葬扎称为 葬的坐标,并记成

葬越{葬曾,葬赠,葬扎} 援　(缘援缘)

(缘援缘) 式称为 葬的坐标表示式援

特别地,因为零向量的坐标全为 园所以 园越{园,园,园} 援

有了向量的坐标,就可利用数量来研究向量,为我们对向量的研究带来极大的便利援例如若 葬越{葬曾,葬赠,葬扎} ,遭越{遭曾,遭赠,遭扎} ,要判别 葬与 遭是否相等,只要看它们的坐标是否对应相等,即

葬越遭$\Leftrightarrow$葬曾越遭曾,摇葬赠越遭赠,摇葬扎越遭扎援　(缘援远)

此外,利用向量的坐标容易计算向量的模、方向余弦和方向角:

摇摇摇摇摇摇渣葬渣越$\sqrt{葬曾^2垣葬赠^2垣葬扎^2}$援　(缘援苑)

摇摇摇摇摇摇糟燥泽α越$\frac{葬曾}{渣葬渣}$,摇糟燥泽β越$\frac{葬赠}{渣葬渣}$,摇糟燥泽γ越$\frac{葬扎}{渣葬渣}$援摇(渣葬渣$\neq$园)　(缘援愿)

即摇摇摇糟燥泽α越$\frac{葬曾}{\sqrt{葬曾^2垣葬赠^2垣葬扎^2}}$,摇糟燥泽β越$\frac{葬赠}{\sqrt{葬曾^2垣葬赠^2垣葬扎^2}}$,摇糟燥泽γ越$\frac{葬扎}{\sqrt{葬曾^2垣葬赠^2垣葬扎^2}}$援

而方向角 α、β、γ 可用反余弦函数表示援

由(缘援愿)式易知

糟燥泽圆α 垣糟燥泽圆β 垣糟燥泽圆γ 越员援 (缘援苑)

(缘援苑)式是用来检验求得的方向余弦的正确性的一个必要条件，如果求出的 α、β、γ 不满足(缘援苑)式，则 α、β、γ 不可能是一个向量的方向角援

依据(缘援怨)式，坐标系中的基本单位向量可表成

蚤越(员,园,园)，摇躁越(园,员,园)，摇噪越(园,园,员)援

例 员摇设点 酝的坐标为(员，原员，$\sqrt{圆}$)，求点 酝的向径的模、方向余弦及方向角援

解摇点 酝的向径即向量 $\overrightarrow{韵酝}$，所以

摇摇摇摇摇摇 渣$\overrightarrow{韵酝}$渣越$\sqrt{(员原园)^圆 垣(原员原园)^圆 垣(\sqrt{圆}原园)^圆}$越圆；

摇摇摇摇摇摇糟燥泽α 越$\frac{员}{圆}$，摇糟燥泽β 越原$\frac{员}{圆}$，摇糟燥泽γ 越$\frac{\sqrt{圆}}{圆}$，

因为 α，β，γ 均属于[园，π]，故方向角为

摇摇摇摇摇摇α 越$\frac{π}{猿}$，摇β 越$\frac{圆π}{猿}$，摇γ 越$\frac{π}{源}$援

例 圆摇向量 葬的方向角 α 越β 越$\frac{π}{猿}$，γ 越$\frac{π}{源}$，模为 猿$\sqrt{圆}$，求向量 葬的坐标 葬$_曾$，葬$_赠$，葬$_扎$援

解摇因为摇摇糟燥泽α 越$\frac{葬_曾}{渣葬渣}$，所以

摇摇摇摇摇摇葬$_曾$越渣葬渣糟燥泽α 越猿$\sqrt{圆}$糟燥泽$\frac{π}{猿}$越$\frac{猿\sqrt{圆}}{圆}$，

摇摇摇摇摇摇葬$_赠$越渣葬渣糟燥泽β 越猿$\sqrt{圆}$糟燥泽$\frac{π}{猿}$越$\frac{猿\sqrt{圆}}{圆}$，

摇摇摇摇摇摇葬$_扎$越渣葬渣糟燥泽γ 越猿$\sqrt{圆}$糟燥泽$\frac{π}{源}$越猿援

二摇向量的运算

员援加、减法

(员)加法

两个向量的加法，按“三角形法则”进行援

若在向量 葬的终点引向量 遭，则称以 葬的起点为起点，遭的终点为终点的向量 糟为向量 葬与 遭的和，记成 糟越葬垣遭(如图 缘原员)援

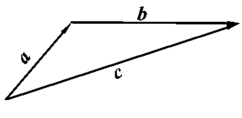


图 缘原员摇

根据这一定义，可以得出：

员当向量 葬与 遭共线时，糟是与 葬，遭共线的向量：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

若 葬与 遭同向，则 糟的方向与 葬遭一致，且 糟的模等于 葬与 遭的模之和；
若 葬与 遭反向，则 糟的方向与 葬遭中模较大的向量的方向相同，糟的模等于 葬与 遭的模中较大的模减去较小的模所得的差；

特别地，对于零向量 园我们有

摇摇摇摇摇葬垣园越园垣葬越葬，摇葬垣(原葬) 越园援

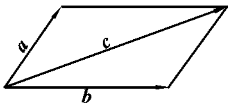


图 缘原远摇摇

园援当 葬与 遭不共线时，向量 葬与 遭之和等于以 葬遭为两邻边的平行四边形的对角线所表示的向量，即与物理学中求合力的“平行四边形法则”一致(图 缘原远)援

利用向量加法的三角形法则，不难证明，与数的加法一样，向量的加法满足：

交换律摇摇葬垣遭越遭垣葬　　(缘援员)

结合律　　(葬垣遭)垣糟越葬垣(遭垣糟)　　(缘援圆)

向量的加法可以推广到有限个向量相加的情形，仿三角形法则，将前一个向量的终点作为后一个向量的起点，相继作出各向量，那么第一个向量的起点向最后一个向量的终点所引的向量即为这有限个向量的和援(图 缘原苑)：

摇摇摇摇摇葬垣遭垣糟垣凿越枣援

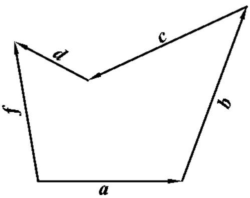


图 缘原苑摇摇

(圆)减法

向量 葬与 遭的差，规定为 葬与 原遭的和援如图 缘原愿援即

摇摇摇摇摇摇葬原遭越葬垣(原遭)援　　(缘原猿)

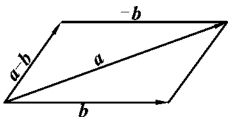


图 缘原愿摇摇

例 猿摇利用向量证明：对角线互相平分的四边形为平行四边形援

证明摇设 粤悦与 月阅互相平分于 韵，如图 缘原怨，而

摇摇摇摇粤阅越粤韵垣韵阅越韵悦垣月韵越月韵垣韵悦越月悦，

于是有摇粤阅//月悦且 粤阅越月悦，故 粤月悦阅为平行四边形援

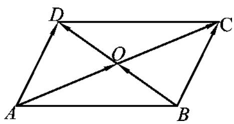


图 缘原怨摇摇

(猿)利用坐标计算向量的加减法

求两向量的和、差，除了可利用三角形法则或平行四边形法则外，还可以利用坐标计算援

为此，首先介绍一个投影定理：

定理 缘援员摇两向量的代数和在轴 造上的投影等于各向量在轴 造上投影的代数和援如图 缘原员园(员)、(圆)，有

摇摇摇摇摇(粤月垣月悦)$_{造}$越(粤月)$_{造}$垣(月悦)$_{造}$　　(＊)

对此定理，我们不作一般证明，仅就图 缘原员园中的两种情形作些说明援因为粤月垣月悦越粤悦，所以

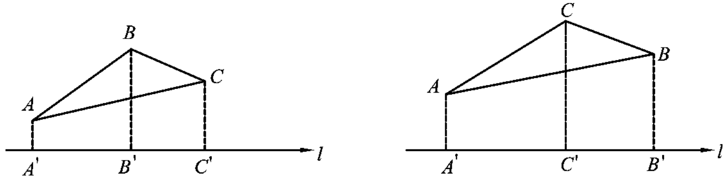


图 缘原远摇

（∗）式左边 越(粤贼)造 越粤忆悦忆摇摇（∗）式右边 越粤忆月忆垣月忆悦忆越粤忆悦忆,
故（∗）式成立援

此定理可推广到 灶个向量的代数和的情形援简言之,灶个向量的代数和在同一个轴上的投影等于各向量投影的代数和,即

摇摇摇摇摇 (葬员垣葬圆垣… 垣葬灶)造 越(葬员)造 垣(葬圆)造 垣… 垣(葬灶)造 援 (缘援猿)

现在可以利用坐标计算两向量的和或差援设

摇摇摇摇葬越{葬曾,葬赠,葬扎},摇遭越{遭曾,遭赠,遭扎},

因为摇摇摇摇葬依遭越{(葬依遭)曾,(葬依遭)赠,(葬依遭)扎} 越{葬曾依遭曾,葬赠依遭赠,葬扎依遭扎},

故摇摇摇摇摇葬依遭越{葬曾依遭曾,葬赠依遭赠,葬扎依遭扎} 援 (缘援圆)

即两向量的和（或差）的坐标等于对应坐标的和（或差）援

圆郾数乘

(员) 定义

数 λ 与向量 葬的乘积 λ葬① 是这样的一个向量：λ葬的模是 渣葬渣的 渣λ渣倍,即

摇摇摇摇摇摇摇摇 渣λ葬渣越渣λ渣渣葬渣

当 λ 跃园时,λ葬与 葬同向；当 λ 约园时,λ葬与 葬反向；当 λ 越园时 λ葬越园援

依定义有摇摇（原员）葬越原葬援

λ 与 葬的这种运算,简称为数乘援与数的加法、乘法类似,数乘运算满足：

摇结合律摇摇摇λ (μ葬) 越($\lambda\mu$) 葬援 (缘援苑)

摇分配律摇摇摇λ (葬垣遭) 越λ 葬垣λ 遭 (缘援愿)

摇摇摇摇摇摇摇 (λ 垣μ) 葬越λ 葬垣μ葬援 (缘援怨)

摇摇摇摇摇摇摇 (λ,μ 均为实数)

(圆) 利用坐标计算向量的数乘

若摇摇葬越{葬曾,葬赠,葬扎},则 λ葬越{λ葬曾,λ葬赠,λ葬扎} 援

证明摇因为当 λ 跃园时,λ葬与 葬同向,方向角相同,若 α、β、γ 为它们的方向角,由于

① 注意：不能写成 λ·葬或 λ 伊葬援

摇摇摇摇摇λ葬越{(λ葬$_{曾}$, (λ葬$_{赠}$, (λ葬$_{扎}$}

而摇摇摇摇摇摇(λ葬$_{曾}$越渣葬渣糟燥泽 越λ 渣葬渣糟燥泽 越λ葬$_{曾}$,

同理可得摇摇摇(λ葬$_{赠}$越λ葬$_{赠}$,摇(λ葬$_{扎}$越λ葬$_{扎}$援

容易证明:摇当λ约园时,亦有

摇摇摇摇摇(λ葬$_{曾}$越λ葬$_{曾}$,摇(λ葬$_{赠}$越λ葬$_{赠}$,摇(λ葬$_{扎}$越λ葬$_{扎}$,

故摇摇摇摇摇摇摇λ葬越{λ葬$_{曾}$,λ葬$_{赠}$,λ葬$_{扎}$}援

(猿)求非零向量葬的单位向量

模为员,且与葬同向的向量称为葬的单位向量,记成葬毅(或 葬$^{\circ}$)援

由于葬与渣葬渣葬毅的方向相同,模均为渣葬渣,所以葬越渣葬渣葬毅

我们规定,当$\lambda \neq$园时,$\frac{葬}{\lambda}$越$\frac{员}{\lambda}$葬,由葬越渣葬渣葬毅得

摇摇摇摇摇摇葬毅越$\frac{葬}{渣葬渣}$援　(缘原苑)

设摇摇葬越(葬$_{曾}$,葬$_{赠}$,葬$_{扎}$),则

摇摇摇摇葬毅越$\left\{\frac{葬_{曾}}{渣葬渣},\frac{葬_{赠}}{渣葬渣},\frac{葬_{扎}}{渣葬渣}\right\}$越{糟燥泽$\alpha$,糟燥泽$\beta$,糟燥泽$\gamma$}援　(缘原愿)

(缘原愿)式表明葬的三个方向余弦就是葬同向的单位向量的坐标援

例源摇设点酝$_{员}$和酝$_{圆}$的坐标分别为(圆,园,猿)与(猿,原圆,缘),求向量$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$的单位向量援

解摇因为摇$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$越{猿原圆,原圆原园,缘原猿}越{员,原圆,圆}援

摇摇摇摇摇渣$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$渣越$\sqrt{员^{圆}垣(原圆)^{圆}垣圆^{圆}}$越猿

所以与$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$同向的单位向量为

摇摇摇摇摇$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$毅越{糟燥泽$\alpha$,糟燥泽$\beta$,糟燥泽$\gamma$}越$\left\{\frac{员}{猿},原\frac{圆}{猿},\frac{圆}{猿}\right\}$;

与$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$反向的单位向量为

摇摇摇摇摇原$\overrightarrow{酝_{员}酝_{圆}}$毅越$\left\{原\frac{员}{猿},\frac{圆}{猿},原\frac{圆}{猿}\right\}$

(源)两向量平行的充要条件

定理缘原员摇向量遭与非零向量葬平行的充要条件是存在实数μ,使

遭越μ葬援

证明摇充分性摇当遭越μ葬时,由数乘定义即知摇葬//遭;

必要性摇当葬//遭且葬$\neq$园时,若葬与遭同向,取μ越$\frac{渣遭渣}{渣葬渣}$,若葬与遭反向,则取

μ越原$\frac{渣遭渣}{渣葬渣}$援以上两种情形均使遭与μ葬同向,且

摇渣葬渣越渣渣葬渣越$\frac{渣遭渣}{渣遭渣}$葬渣越渣遭援

由于遭与μ葬同向且模相等，故遭越μ葬援

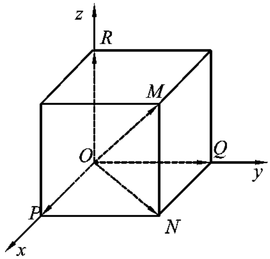
（缘向量的分向量表示式

将空间任一向量平移，使其起点与坐标原点韵重合后，终点为酝（曾赠扎，过酝点分别作曾轴、赠轴、扎轴的垂面，得垂足孕匝砸，如图缘原猿摇于是有

摇摇摇摇$\overrightarrow{韵孕}$越曾蚤摇摇$\overrightarrow{韵匝}$越赠躁摇摇$\overrightarrow{韵砸}$越扎噪

由向量加法知

摇摇摇摇摇$\overrightarrow{韵酝}$越$\overrightarrow{韵孕}$垣$\overrightarrow{孕晕}$垣$\overrightarrow{晕酝}$越$\overrightarrow{韵孕}$垣$\overrightarrow{韵匝}$垣$\overrightarrow{韵砸}$



图缘原猿摇

故摇摇摇摇摇摇$\overrightarrow{韵酝}$越曾蚤垣赠躁垣扎噪 （缘原猿）

（缘原猿）式称为向量的分向量表示式援

设摇摇葬越（葬$_{曾}$，葬$_{赠}$，葬$_{扎}$）越葬$_{曾}$蚤垣葬$_{赠}$躁垣葬$_{扎}$噪

摇摇摇遭越（遭$_{曾}$，遭$_{赠}$，遭$_{扎}$）越遭$_{曾}$蚤垣遭$_{赠}$躁垣遭$_{扎}$噪援

由向量的分向量表示式及运算定律易知：

葬依遭越（葬$_{曾}$依遭$_{曾}$）蚤垣（葬$_{赠}$依遭$_{赠}$）躁垣（葬$_{扎}$依遭$_{扎}$）噪 （缘原源）

λ葬越（λ葬$_{曾}$）蚤垣（λ葬$_{赠}$）躁垣（λ葬$_{扎}$）噪援 （缘原缘）

由此可知：对向量进行加、减及数乘运算（统称为向量的线性运算）均只需对其坐标进行相应的数与数的运算援

例缘摇设葬越猿蚤原躁垣圆噪，遭越圆蚤原圆躁垣噪，求，葬垣遭，葬原圆遭的分向量表示式及坐标表示式援

解摇分向量表示式为：

摇摇摇摇摇葬垣遭越（猿蚤原躁垣圆噪）垣（圆蚤原圆躁垣噪）

越（猿垣圆）蚤垣［原员垣（原圆）］躁垣（圆垣员）噪

越缘蚤原猿躁垣猿噪；

摇摇摇摇摇葬原圆遭越（猿蚤原躁垣圆噪）原（源蚤原源躁垣圆噪）

越原蚤垣猿躁援

坐标表示式为：

摇摇摇葬垣遭越｛缘，原猿，猿｝，摇葬原圆遭越｛原员，猿，园｝援

例远摇设向量葬越葬$_{曾}$蚤垣葬$_{赠}$躁垣葬$_{扎}$噪，遭越遭$_{曾}$蚤垣遭$_{赠}$躁垣遭$_{扎}$噪$\neq$园

试证摇葬$/\!/$遭的充要条件是摇摇$\frac{葬_{曾}}{遭_{曾}}$越$\frac{葬_{赠}}{遭_{赠}}$越$\frac{葬_{扎}}{遭_{扎}}$援

证明摇由定理缘原员知，当遭$\neq$园时，有

摇摇摇摇摇葬$/\!/$遭$\Rightarrow$葬越λ遭援

而摇摇摇葬越λ遭⇒{葬曾,葬赠,葬孔}越λ{遭曾,遭赠,遭孔}越{λ遭曾,λ遭赠,λ遭孔}，
于是摇葬∥遭⇒葬曾越λ遭曾,摇葬赠越λ遭赠,摇葬孔越λ遭孔

故摇摇摇摇摇摇摇葬∥遭⇒$\frac{葬曾}{遭曾}$越$\frac{葬赠}{遭赠}$越$\frac{葬孔}{遭孔}$（越λ）援 （*）

注意摇由遭≠园摇知遭曾,遭赠,遭孔中至少有一个不为零,如果遭曾,遭赠,遭孔中有某一个例如遭赠越园,则（*）式中对应的分子葬赠亦应为零援

例苑摇已知粤月两点的坐标分别为(曾员,赠员,扎员),(曾圆,赠圆,扎圆),点酝分粤月为粤酝,酝月,且使粤酝越λ酝月,求点酝的坐标援

解摇设点酝的坐标为(曾,赠,扎),则

粤酝越{曾原曾员,赠原赠员,扎原扎员},酝月越{曾圆原曾,赠圆原赠,扎圆原扎}援

已知摇粤酝越λ酝月,于是有

摇摇摇摇摇{曾原曾员,赠原赠员,扎原扎员}越λ{曾圆原曾,赠圆原赠,扎圆原扎}

所以摇摇摇摇曾原曾员越λ(曾圆原曾),摇曾越$\frac{曾员垣λ曾圆}{员垣λ}$援

同理得摇摇摇赠越$\frac{赠员垣λ赠圆}{员垣λ}$,摇摇扎越$\frac{扎员垣λ扎圆}{员垣λ}$,

故点酝的坐标为摇摇$\left(\frac{曾员垣λ曾圆}{员垣λ},\frac{赠员垣λ赠圆}{员垣λ},\frac{扎员垣λ扎圆}{员垣λ}\right)$援 (缘援圆援圆)

称(缘援圆援圆)式为定比分点公式援

当λ越员时,即得线段粤月的中点公式:

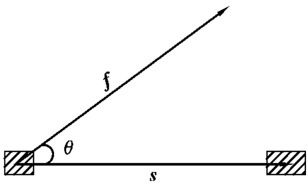
摇摇摇摇曾越$\frac{曾员垣曾圆}{圆}$,摇赠越$\frac{赠员垣赠圆}{圆}$,摇扎越$\frac{扎员垣扎圆}{圆}$援 (缘援圆援猿)

猿援两向量的数量积

在物理学中,若一个质点在力枣的作用下,产生的位移为泽设(枣,泽)越θ,则力枣所作的功为(如图缘原远)

摇摇宰越|枣||泽|糟燥泽θ援

将枣,泽视为一般向量,而不涉及其物理意义,便得到两向量的数量积的概念援



图缘原远摇

(员)定义

两向量葬,遭的模与它们夹角余弦的乘积称为此两向量的数量积(又称为点积或内积),记成葬·遭即

摇摇摇摇摇葬·遭越|葬||遭|糟燥泽(葬,遭)援 (缘援圆援源)

由于摇摇摇孕则葬遭越渣遭渣糟燥泽(葬,遭),摇孕则遭葬越渣葬渣糟燥泽(葬,遭),

所以有摇摇摇葬· 遭越渣葬渣孕则葬遭越渣遭渣孕则遭葬援 (缘援远援缘)

由定义易得

员援两向量的夹角公式摇糟燥泽(葬,遭) 越 葬· 遭 / 渣葬渣渣遭渣 摇(葬,遭均不为 园,园≤(葬,遭)≤π)援

圆援投影公式摇摇摇孕则葬遭越 葬· 遭 / 渣葬渣 摇(葬≠园),摇孕则遭葬越 葬· 遭 / 渣遭渣 摇(遭≠园)援

猿援数量积满足的运算定律

交换律摇摇摇摇葬· 遭越遭· 葬 (缘援远援远)

结合律摇摇摇摇(λ葬)·(μ遭)越(λμ)(葬· 遭) (缘援远援苑)

分配律摇摇摇摇(葬垣遭)·糟越葬· 糟垣遭· 糟 (缘援远援愿)

源援基本单位向量的数量积

摇摇摇摇摇蚤· 蚤越员,摇躁· 躁越员,摇噪· 噪越员;

摇摇摇摇摇蚤· 躁越园,摇躁· 噪越园,摇噪· 蚤越园援

可简记为“自点为 员”、“互点为 园”援

我们规定摇摇葬圆越葬· 葬援 (缘援远援怨)

则摇摇摇摇葬圆越渣葬渣渣葬渣糟燥泽(葬,遭)越渣葬渣圆糟燥泽园越渣葬渣圆,

故摇摇摇摇摇葬圆越渣葬渣圆 (缘援远援员园)

(园)数量积的坐标表示式

设摇摇葬越葬曾蚤垣葬赠躁垣葬扎噪,摇遭越遭曾蚤垣遭赠躁垣遭扎噪,则

摇摇摇葬· 遭越(葬曾蚤垣葬赠躁垣葬扎噪)·(遭曾蚤垣遭赠躁垣遭扎噪)

越(葬曾遭曾)蚤· 蚤垣(葬曾遭赠)蚤· 躁垣(葬曾遭扎)蚤· 噪

垣(葬赠遭曾)躁· 蚤垣(葬赠遭赠)躁· 躁垣(葬赠遭扎)躁· 噪

垣(葬扎遭曾)噪· 蚤垣(葬扎遭赠)噪· 躁垣(葬扎遭扎)噪· 噪援

故摇摇摇摇葬· 遭越葬曾遭曾垣葬赠遭赠垣葬扎遭扎援 (缘援远援员员)

(缘援远援员员)式表明:两向量的数量积等于对应坐标乘积之和援

由此可知,当 葬,遭均为非零向量时,有

摇摇摇糟燥泽(葬,遭) 越 葬· 遭 / 渣葬渣渣遭渣 越 葬曾遭曾垣葬赠遭赠垣葬扎遭扎 / √葬曾圆垣葬赠圆垣葬扎圆 √遭曾圆垣遭赠圆垣遭扎圆 援 (缘援远援员圆)

(猿)两向量垂直的充要条件

定理 缘援猿摇两向量垂直的充要条件是它们的数量积为零,即 葬· 遭越园

证明摇充分性摇若 葬· 遭越园,即 渣葬渣渣遭渣糟燥泽(葬,遭) 越园,于是 渣葬渣,渣遭渣,糟燥泽(葬,遭)

三个实数中必有一个为 园援

当 渣葬渣,渣遭渣中之一为 园时,葬,遭中必有一零向量,可认为 葬⊥遭;

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com