教育科学"十五"国家规划课题研究成果

高等数学及其应用

(下册)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是为应用型本科编写的高等数学教材，内容紧扣国家颁布的高等数学课程教学基本要求，在保持教材内容的系统性和完整性的前提下，适当降低了某些内容的理论深度，更加突出对微积分中有重要应用背景的概念、理论、方法和实例的介绍。在文字表述上做到详尽通畅，浅显易懂，所选的习题突出能力的基本训练而不过分追求技巧，使教材易教易学，方便自学。书中有些内容加了 * 号，便于教师灵活掌握。

本书分上、下两册出版，下册内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。本书适用于应用型本科，也可作为大专、高职高专和成人教育的相关专业的高等数学教材，或作为这些专业的学生的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用 .下册/ 同济大学应用数学系编 .
北京: 高等教育出版社，2004.11
ISBN 7 - 04 - 015554 - 0

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 109772 号

策划编辑 王 强 责任编辑 王 强 封面设计 王凌波 责任绘图 杜晓丹
版式设计 胡志萍 责任校对 王 超 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: www .hep .edu .cn
总 机	010 - 58581000		http: www .hep .com .cn

经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			

开 本	787×960 1 16	版 次	年 月第 1 版
印 张	15	印 次	年 月第 1 次印刷
字 数	280 000	定 价	16.40 元

物料号:15554－00

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心(以下简称"教研中心")在承担全国教育科学"十五"国家规划课题——"21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践"研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以"教育科学'十五'国家规划课题研究成果"。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体,在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此,在课题研究过程中,各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果,并和教学实际结合起来,认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革,组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师,编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案,以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信,随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施,具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

第五章　向量代数与空间解析几何

作为学习多元微积分的预备知识,本章讨论向量代数与空间解析几何 .

自然界中的很多量既有大小、又有方向,数学上的向量就是对这一类量的概括与抽象 .本章先引进向量的概念,介绍向量之间的各种运算及其应用 .在建立了空间直角坐标系后,导出向量和向量运算的坐标表示 .

本章另一部分的内容是空间解析几何的基础知识 .我们以向量为工具讨论空间的平面和直线,接着简要介绍空间曲面和曲线 .

第一节　向量及其线性运算

一、向量概念

客观世界中有些物理量(比如位移、速度、加速度、力、力矩等)不仅有大小之分,还有方向之异,我们把这种既有大小,又有方向的量称为向量 .向量通常用上方加有箭头的字母或黑体字母来表示,比如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 或 $\overline{a}, \overline{b}$ 等 .在数学中用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向 .起点为 M_0,终点为 M 的有向线段所表示的向量可以记为 $\overline{M_0 M}$(图 5 - 1) .

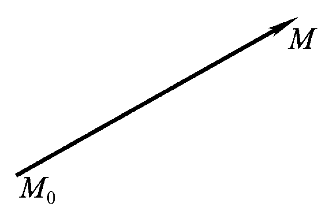

图 5 - 1

在实际问题中,有些向量与其起点有关,而有些向量与其起点无关,我们把与起点无关的向量称为自由向量,以后若不加说明,我们所指的向量均为自由向量 .

由于我们讨论的向量是自由向量,因此如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.两个相等的向量经过平移后能完全重合 .

向量的大小叫作向量的模,向量 $\overline{a}$, $\boldsymbol{a}$, $\overline{M_0 M}$ 的模依次记作 $|\overline{a}|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\overline{M_0 M}|$.模等于 1 的向量叫作单位向量,记作 $\boldsymbol{e}$;模等于零的向量叫作零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\overline{0}$,零向量的方向可以看作是任意的 .

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移,使它们的起点重合后,它们所在的射线之间的不超过胣的夹角 θ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5 - 2) .记作 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

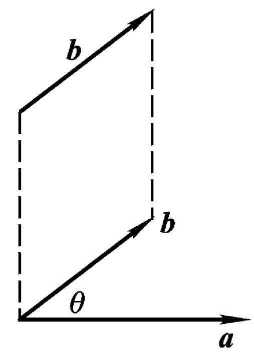

图 5 - 2

显然,$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = (\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$,且当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,有 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,有 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) =$肐.

当 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) =$肐,即非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时,就称这两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$;当 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\text{肐}}{2}$时,就称这两个向量垂直,记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向可以看作是任意的.因此零向量与任何向量都既平行且垂直.反之,与非零向量既平行且垂直的向量惟有零向量.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和起点应在一条直线上,因此平行向量也称为是共线的;类似地,当两个以上的向量的起点放在同一点,而它们的终点和共同的起点在一平面上时,则称这些向量共面.

二、向量的线性运算

向量与向量之间或向量与数之间可以按照某种方式发生联系,并由此产生出另一个向量或者数,这种联系抽象成数学形式,就是向量的运算.向量的加法、减法运算以及向量与数的乘法运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overline{BC} = \boldsymbol{b}$,连接 AC(图 5 - 3),则向量 $\overline{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

这一规则叫作向量相加的三角形法则.

在力学中有求两个力的合力或求两个速度的合速度的平行四边形法则,仿此,我们也有向量相加的平行四边形法则.这就是:当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$,以 AB, AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$,则对角线向量 $\overline{AC}$ 就等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$(图 5 - 4).显然,这样得出的和向量与按三角形法则得出的和向量是完全一样的.

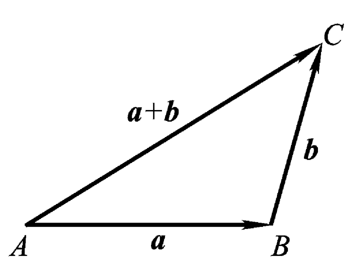

图 5 - 3

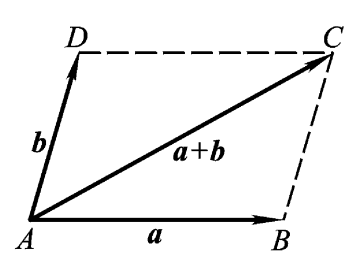

图 5 - 4

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

按照向量相加的三角形法则,由图 5 - 4 可见: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{DC}$, 即交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

成立 .又如图 5 - 5 所示,先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再加上 $\boldsymbol{c}$,即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,而先作 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,再加上 $\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,则得到同样的结果 .所以结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 也成立 .

由于向量的加法符合交换律和结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ $(n\geq 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下: 以前一个向量的终点作后一个向量的始点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 再以第一个向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ (图 5 - 6) .

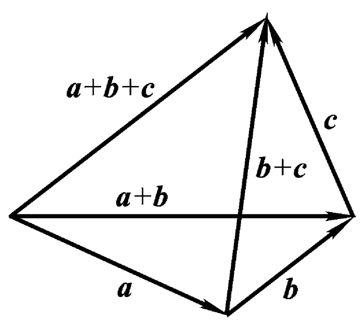

图 5 - 5

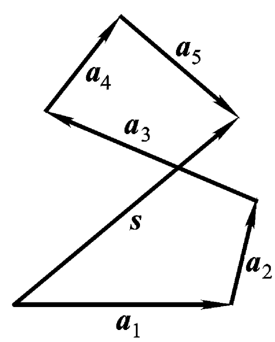

图 5 - 6

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 5 - 7) .

特别地,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

由向量加法的平行四边形法则可知,在以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中,两条对角线向量分别表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 5 - 8),由于三角形两边之和不小于第三边,故可得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时成立 .

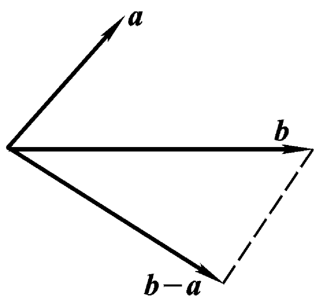

图 5 - 7

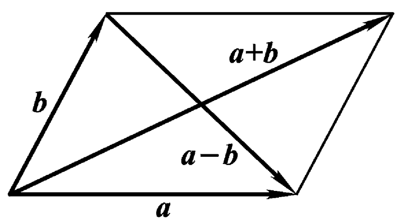

图 5 - 8

例 5. 1 对角线互相平分的四边形是平行四边形 .

证 如图 5 - 9, 设四边形 $ABCD$ 的对角线交于 E, 由于

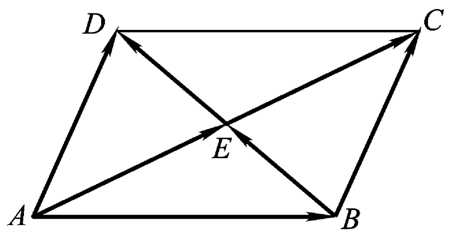

图 5 - 9

$$\overline{AE} = \overline{EC},\ \overline{BE} = \overline{ED},$$

故

$$\overline{AE} + \overline{ED} = \overline{BE} + \overline{EC},$$

即

$$\overline{AD} = \overline{BC}.$$

这说明线段 AD 与 BC 平行且长度相同, 因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

2. 向量与数的乘法

对任意实数 λ 及向量 $\boldsymbol{a}$, 规定 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积, 记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它为如下的一个向量, 它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda > 0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, 由于 $|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量, 这时它的方向是任意的 .

特别地, 当 $\lambda = \pm 1$ 时, 有 $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法简称为向量的数乘, 它满足下列运算规律:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (结合律);

(2) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (分配律) .

事实上, 根据向量与数的乘积的规定可知, 向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$, $\mu(\lambda\boldsymbol{a})$, $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 互相平行且指向一致, 并且 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\mu(\lambda\boldsymbol{a})| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu|\,|\boldsymbol{a}|$, 所以 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律同样可按向量与数的乘积的规定来证明, 这里从略 .

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, 记 $\boldsymbol{e}_a$ 是和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 由于 $|\boldsymbol{a}| > 0$, 故按照向量与数的乘积的规定可知, $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 方向相同, 从而 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同, 且

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a\big| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{e}_a| = |\boldsymbol{a}| \cdot 1 = |\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同, 因此

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a. \tag{5.1}$$

这表明任何一个向量均可以表示为它的模与同向的单位向量的乘积.上式也可写成

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{5.2}$$

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.即有

定理 5.1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在实数 λ,使

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \tag{5.3}$$

证 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$,则取 $\lambda = 0$,即有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$,则由 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{e}_b /\!/ \boldsymbol{e}_a$,则 $\boldsymbol{e}_b = \pm\boldsymbol{e}_a$($\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同时取正号,方向相反时取负号),于是由(5.1)式得

$$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b = |\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{e}_a) = |\boldsymbol{b}|\left(\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right) = \pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}, \tag{5.4}$$

于是当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同时取 $\lambda = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反时取 $\lambda = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,就有 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

从(5.4)式可知,若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,且向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$,则必有

$$\boldsymbol{b} = \pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a, \tag{5.5}$$

上式中当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同时,取“+”号,方向相反时,取“-”号.

现设 Ou 为数轴,其原点为 O,把与 Ou 的正向同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_u$,P 为轴上一点,其坐标为 u(图 5-10).根据轴上一点的坐标的定义知:$u = \pm|\overline{OP}|$(当 $\overline{OP}$ 与 $\boldsymbol{e}_u$ 同向时取正号,反向时取负号).而由(5.5)式知 $\overline{OP} = \pm|\overline{OP}|\boldsymbol{e}_u$,于是得

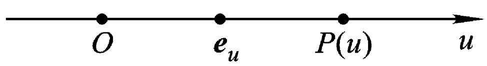

图 5-10

$$\overline{OP} = \pm|\overline{OP}|\boldsymbol{e}_u = u\boldsymbol{e}_u. \tag{5.6}$$

这就是说,Ou 轴上的有向线段 $\overline{OP}$ 等于 P 点的坐标与单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积.

习题 5-1

1. 设 A, B, C 为三角形的三个顶点,求 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

2. 设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$.

3. 用向量的方法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

4. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB| = 2|AC|$,O 为 AB 外一点,记 $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overline{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overline{OC}$,试用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

第二节　点的坐标与向量的坐标

一、空间直角坐标系与点的坐标

为了沟通空间的点与数、图形与方程的联系,我们先引进坐标系 .

在空间取一个定点 O,作三条以 O 点为原点的互相垂直的数轴,依次叫作 x 轴(横轴), y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴) .这三条数轴具有相同的长度单位,它们的正方向符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时,竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向,这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,称为直角坐标系 $Oxyz$.在空间直角坐标系中,分别用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向同方向的单位向量,并把它们称为 $Oxyz$ 坐标系下的标准单位向量 .

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面,称为坐标面,由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面,类似地有 yOz 面与 zOx 面 .这三个坐标面把空间划成八个部分,每一部分叫作一个卦限(图 5 - 11) .八个卦限分别用罗马字母Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示,第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方,按逆时针方向排定,其中由 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴确定的那个卦限是第一卦限 .第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方,也按逆时针方向排定,它们依次分别在第一至四卦限的下方 .

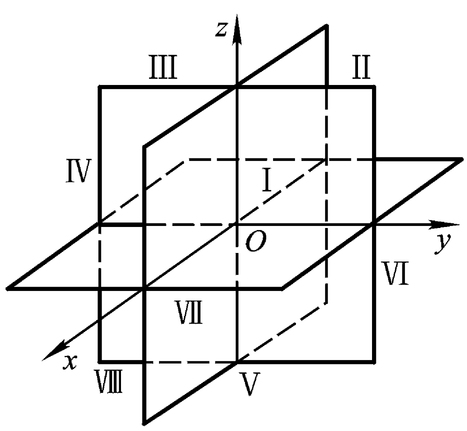

图 5 - 11

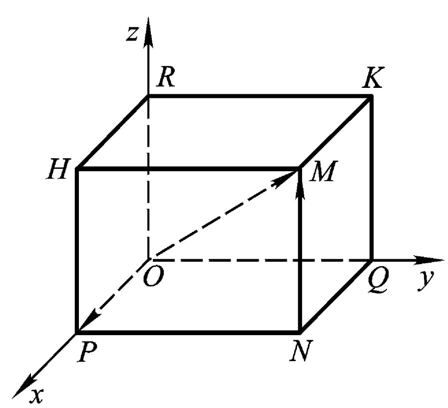

图 5 - 12

设 M 是空间的一点,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P, Q, R 三点 .点 P, Q, R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影 .设这三个投影在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x, y 和 z,则空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z .反过来,对给定的有序数组 x, y, z,可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,过点 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面,这三个平

面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 确定的唯一的点 M(图 5 - 12) .这样,空间的点与有序数组(x, y, z)之间就建立了一一对应的关系 .这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标,依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标,并把点 M 记作 $M(x, y, z)$.

二、向量的坐标及向量线性运算的坐标表示

任给向量 $\boldsymbol{a}$,总可通过平移使其起点位于原点 O,从而有对应点 M,使$\overline{OM} = \boldsymbol{a}$,以 OM 为对角线作长方体 $RHMK - OPNQ$(图 5 - 12) ,则有

$$\boldsymbol{a} = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} .$$

若点 P, Q 和 R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 a_x, a_y, a_z,则由(5.6)式知$\overline{OP} = a_x \boldsymbol{i}$,$\overline{OQ} = a_y \boldsymbol{j}$,$\overline{OR} = a_z \boldsymbol{k}$,于是得

$$\boldsymbol{a} = \overline{OM} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} . \tag{5.7}$$

显然,给定向量 $\boldsymbol{a}$,就确定了点 M 及$\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}$三个向量,从而就确定了 a_x, a_y, a_z 三个有序数;反之,给定三个有序数 a_x, a_y, a_z,就确定了向量

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} .$$

于是向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_x, a_y, a_z 之间就有了一一对应的关系:

$$\boldsymbol{a} = \overline{OM} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \leftrightarrow a_x, a_y, a_z ,$$

因此,我们把有序数组 a_x, a_y, a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,记作 (a_x, a_y, a_z) .即

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) . \tag{5.8}$$

这里(5.7)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的标准分解式,而 $a_x \boldsymbol{i}, a_y \boldsymbol{j}, a_z \boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴的分向量 .(5.8)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式 .

空间任何一点 $P(x, y, z)$,都对应一个向量 $\boldsymbol{r} = \overline{OP}$,称为点 P 关于原点 O 的向径 .由向量坐标的规定可知向径 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$,即一个点与该点的向径有相同的坐标 .这里的记号$(x, y, z)$既表示点 P,又表示向量$\overline{OP}$.因此在看到记号(x, y, z)时,要注意从上下文去认清它是表示向量$\overline{OP}$,还是表示点 P .

从图 5 - 12 中可以看到,向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$的模为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}| = |\overline{OM}| &= \sqrt{|\overline{OP}|^2 + |\overline{OQ}|^2 + |\overline{OR}|^2} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \end{aligned} \tag{5.9}$$

有了向量的坐标表示法,向量之间的线性运算就方便多了 .

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$,$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$,即 $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$,则根据向量的加法与数乘的运算律,有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

从而得
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$
$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见,对向量作加、减及数乘等线性运算,只需对向量的各个坐标分别作相应的数量运算就可以了.

上节定理 5.1 指出,当向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 等价于 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$($\lambda$为某一常数),按坐标表示式即为
$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),$$
于是有
$$b_x = \lambda a_x,\ b_y = \lambda a_y,\ b_z = \lambda a_z,$$
这就是说向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例:
$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}\text{①}. \tag{5.10}$$

对起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量 $\overline{M_1M_2}$,它的坐标表示式可通过以下方法获得
$$\begin{aligned}\overline{M_1M_2} &= \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)\\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).\end{aligned} \tag{5.11}$$

例 5.2 已知以向量 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线向量为 $\overline{AC} = (3,4,5)$, $\overline{DB} = (1,2,3)$,试求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$.

解 根据题意,$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$,因此可解得
$$\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{DB}),\ \overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{DB}),$$
从而得
$$\overline{AB} = \frac{1}{2}[(3,4,5) + (1,2,3)] = (2,3,4),\ \overline{AD} = \frac{1}{2}[(3,4,5) - (1,2,3)] = (1,1,1).$$

例 5.3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$,在直线 AB 上求点 M,使
$$\overline{AM} = \lambda \overline{MB}.$$

---

① 当 a_x, a_y, a_z 中有一个为零,例如 $a_x = 0$, a_y、$a_z \neq 0$,这时(5.10)式应理解为
$$b_x = 0,$$
$$\frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z};$$
当 a_x, a_y, a_z 中有两个为零,例如 $a_x = a_y = 0$, $a_z \neq 0$,这时(5.10)式应理解为
$$b_x = 0,$$
$$b_y = 0.$$

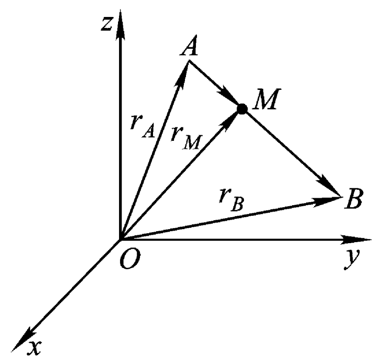

图 5 - 13

解　如图 5 - 13,记 A, B, M 关于原点的向径分别为 $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_M$,则

$$\overline{AM} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A, \quad \overline{MB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M,$$

因此 $\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M)$,从而得 $\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}(\boldsymbol{r}_A + \lambda\boldsymbol{r}_B)$.以 $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$ 的坐标(即点 A, B 的坐标)代入,即得

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}[(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)]$$

$$= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} ,$$

上式右端就是点 M 的坐标 .本例中的点 M 叫作有向线段$\overline{AB}$的 λ 分点 .特别取 $\lambda = 1$ 时,得线段$\overline{AB}$的中点 M $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}$.

例 5. 4　试建立空间两点间的距离公式 .

解　设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点,则由(5. 11)式,向量 $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,再由(5. 9)式得$\overline{M_1M_2}$的模为

$$|\overline{M_1M_2}| = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 ,$$

由于模$|\overline{M_1M_2}|$即为有向线段的$\overline{M_1M_2}$长度,亦即为点 M_1, M_2 之间的距离,从而得点 M_1, M_2 之间的距离公式

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 . \qquad (5.12)$$

例 5. 5　已知两点 $A(4,0,5)$和 $B(7,1,3)$,求和$\overline{AB}$平行的单位向量 .

解　$\overline{AB} = (7-4, 1-0, 3-5) = (3, 1, -2)$,故$|\overline{AB}| = 3^2 + 1^2 + (-2)^2 = 14$,于是和$\overline{AB}$平行的单位向量为

$$\boldsymbol{e} = \pm\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \pm\frac{1}{14}(3, 1, -2) = \pm\frac{3}{14}, \pm\frac{1}{14}, ê\,\frac{2}{14} .$$

例 5. 6　求证以 $M_1(4,3,1)$, $M_2(7,1,2)$, $M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形 .

解　由公式(5. 12)得$|\overline{M_1M_2}| = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$,

$$|\overline{M_2M_3}| = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|\overline{M_3M_1}| = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以$|\overline{M_2M_3}| = |\overline{M_3M_1}|$,即$\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形 .

例 5. 7　在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$和点 $B(3,5,-2)$等距离的点 .

解　因为所求的点 M 在 z 轴上,所以设该点坐标为$(0,0,z)$,依题意有$|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$,即

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

解得 $z=\frac{14}{9}$,**所以所求的点为** $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

三、方向角、方向余弦与投影

如图 5 - 14,**非零向量** $\boldsymbol{a}$ **与** x **轴、**y **轴、**z **轴的正向所成的夹角** α,β,γ **称为向量** $\boldsymbol{a}$ **的方向角**$(0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq\pi)$,**方向角的余弦** $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ **称为向量** $\boldsymbol{a}$ **的方向余弦**.**方向角完全确定了向量** $\boldsymbol{a}$ **的方向**.

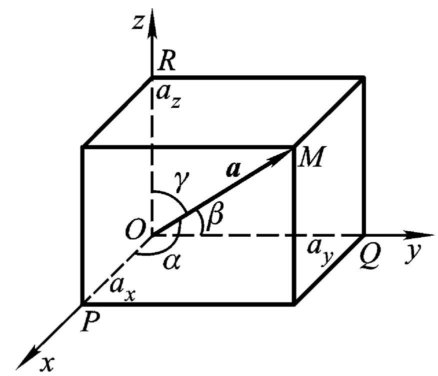

图 5 - 14

设向量 $\boldsymbol{a}=\overline{OM}=(a_x,a_y,a_z)$,**从图** 5 - 14 **可以看出**

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},\tag{5.13}$$

其中

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

从而可得向量 $\boldsymbol{a}$ **的单位向量**

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z)=\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),\tag{5.14}$$

并由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\tag{5.15}$$

例 5. 8　已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1,-\sqrt{2})$,**求它的模,方向余弦及方向角**.

解

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 5. 9　设点 A **位于第一卦限,其向径的模** $|\overline{OA}|=6$,**且向径** $\overline{OA}$ **与** x **轴、**y **轴的夹角依次为** $\frac{\pi}{3}$ **和** $\frac{\pi}{4}$,**求点** A **坐标**.

解　已知 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4}$,**由关系式** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,**得**

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{4}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

因点 A 位于第一卦限,故 $\cos\gamma > 0$,于是 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.因此

$$\overline{OA} = |\overline{OA}| \boldsymbol{e}_{OA} = |\overline{OA}| (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\ 2, 3),$$

这也是点 A 的坐标.

如图 5 - 15,设向量 $\boldsymbol{a} = \overline{OM}$, $\boldsymbol{b} = \overline{ON}$,且 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \varphi$,过点 M 作垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在直线的平面并交该直线于点 M',点 M' 称为点 M 在该直线上的投影,有向线段 $\overline{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量,易见

$$\overline{OM'} = (|\boldsymbol{a}| \cos\varphi) \boldsymbol{e}_b,$$

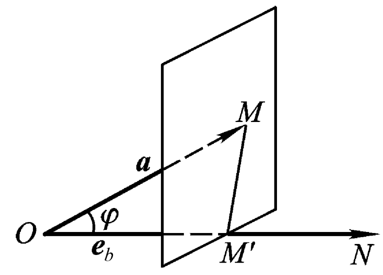

图 5 - 15

其中数 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,并把它记作 $\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a}$,即有

$$\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi. \tag{5.16}$$

显然,当 $0 \leq \varphi < \frac{肫}{2}$ 时, $\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\overline{OM'}$ 的长度;当 $\frac{肫}{2} < \varphi \leq 肫$ 时, $\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a}$ 等于该投影向量 $\overline{OM'}$ 的长度的相反数;当 $\varphi = \frac{肫}{2}$ 时, $\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} = 0$.

按上述定义和(5.13)式可知,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是它在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x = \mathrm{Prj}_x \boldsymbol{a}, \quad a_y = \mathrm{Prj}_y \boldsymbol{a}, \quad a_z = \mathrm{Prj}_z \boldsymbol{a},$$

上式给出了向量坐标的几何意义.

例 5.10 设立方体的一条对角线为 OM,一条边为 OA,且 $|OA| = a$,求 $\overline{OA}$ 在 $\overline{OM}$ 上的投影.

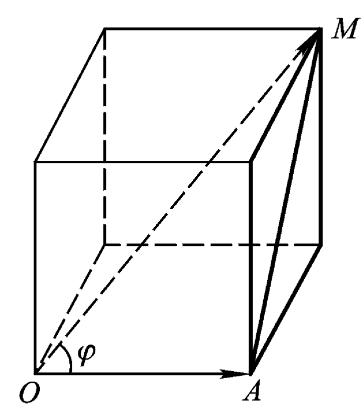

图 5 - 16

解 如图 5 - 16,记 $\angle MOA = \varphi$,则 $\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{3}$,从而 $\mathrm{Prj}_{OM} \overline{OA} = |\overline{OA}| \cos\varphi = \frac{a}{3}$.

习题 5 - 2

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$$A(2, -3, 1);\ B(7, -1, -2);\ C(-2, -3, -1);\ D(-1, 2, -3).$$

2. 指出下列各点所在的坐标面或坐标轴:

$$A(-1, 2, 0);\ B(0, -2, 3);\ C(1, 0, 0);\ D(0, -1, 0).$$

3. 分别求出点 (a, b, c) 关于(1)各坐标面、(2)各坐标轴、(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标,并求出点

P_0 到各坐标面和各坐标轴的距离.

5. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特征.

6. 已知三点 $A(1, -1, 3)$, $B(-2, 0, 5)$, $C(4, -2, 1)$,问这三点是否在一直线上?

7. 试确定 m 和 n 的值,使向量 $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 平行.

8. 已知点 $A(-1, 2, -4)$和点 $B(6, -2, z)$,且 $|\overline{AB}| = 9$,求 z 的值.

9. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\gamma = 0$; (2) $\cos\alpha = 1$; (3) $\cos\alpha = \cos\gamma = 0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

10. 已知两点 $M_1(4, 2, 1)$和 $M_2(3, 0, 2)$,计算向量$\overline{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角,如果 $|\boldsymbol{a}| = 2\ \ 3$,求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

12. 一向量的终点为 $B(3, -2, 6)$,它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $5, 3, -4$,求这向量的起点 A 的坐标.

13. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

第三节　向量的数量积和向量积

一、向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动到点 M,如果用 $\boldsymbol{s}$ 表示位移$\overline{M_0M}$,那么由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 5 - 17).

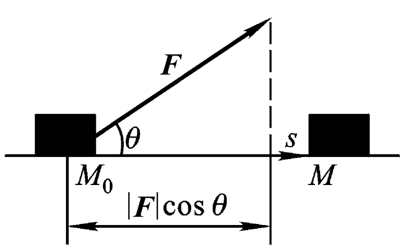

图 5 - 17

由此实际背景,我们来定义向量的一种运算.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$,称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \qquad (5.17)$$

按数量积的定义,上面所说的力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功就可以表达为 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

显然,对任何向量 $\boldsymbol{a}$,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;且由(5.17)式可以推得:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$;

这时因为夹角 $\theta = 0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2$.

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

这是因为,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量时结论显然成立;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,即 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ 时,如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$,则由(5.17)式推得 $\cos\theta = 0$,从而 $\theta = \frac{\text{肶}}{2}$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\theta = \frac{\text{肶}}{2}$则有 $\cos\theta = 0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\text{肶}}{2} = 0$.

数量积符合下列运算规律: